Journal of Education and Science (ISSN 1812-125X), Vol: 29, No: 2, 2020 (149-157)

Existence of Positive Solutions of Boundary Value Problem For Fractional-Order Differential Equation

Noora L .Husaen[1*]; Nawal A. Abdul-Kader[2]

[1, 2] Department of Mathematics, College of Education for Pure Science, University of Mosul, Mosul, Iraq

Email: [1*] nooralaith84@gmail.com, [2] mahmod.amir74@gmail.com

(Received September 02, 2019; Accepted December 11, 2019; Available online June 01, 2020)

DOI: 10.33899/edusj.2019.125873.1014,

Abstract

Recently boundary value problems for differential equations of non-integral order have studied in many papers . Zaho etal studied the following boundary value problem of fractional differential equations.

$$D_{0^+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)) \quad , t \in (0,1)$$
$$x(0) = x'(0) = x'(1) = 0$$

Where D^{α} denotes the Rimann-Liouville fractional derivative equation of order α , $2 < \alpha \leq 3$. By using the lower and upper solution method and fixed point theorem. Liang and Zhang studied the non-linear fractional differential boundary value problem

$$D_{0^+}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)) \quad , t \in (0,1)$$
$$x(0) = x'(0) = x''(0) = x''(1) = 0$$

Where $3 < \alpha \leq 4$ is a real number . $D_{0^+}^{\alpha}$ is the Rimann-Liouville fractional differential operator of order α . By means of fixed point theorems , they obtained results on the existence of positive solutions for boundary value problem of fractional differential equations.

In this paper , we deal with some existence of positive solution of the following non-linear fractional differential equation.

$$D_{0^+}^{\delta} h(t) + g(t, h(t)) = 0 \quad , t \in (0, T)$$
$$h(0) = h'(0) = h''(0) = h'''(0) = h'''(T) = 0$$

Where $4 < \delta \leq 5$, δ is a real number. $D_{0^+}^{\delta}$ denotes Rimann-Liouville fractional derivative of order δ .

Our work based on Banach contraction mapping and Krasnoel'skii fixed point theorems to investigate the existence of positive solution.

Keywords: Positive solution, Fractional derivatives, Boundary value problem, fixed point theorem.

Journal of Education and Science (ISSN 1812-125X), Vol: 29, No: 2, 2020 (149-157)

وجود الحلول الموجبة لمسائل القيم الحدودية لمعادلة تفاضلية لاخطية من الرتب الكسرية

نورا ليث حسين[1*] و نوال عزيز عبد القادر[2]

قسم الرياضيات, كلية التربية للعلوم الصرفة, جامعة الموصل, جامعة الموصل

الملخص

تم مؤخرا دراسة الحلول الموجبة لمسائل القيم الحدودية لمعادلات تفاضلية من الرتب الكسرية.

لقد قام الباحث Zaho etal بدراسة مسائل القيم الحدودية للمعادلة التفاضلية الكسرية التالية

$$D_{0^+}^{\alpha}x(t) = -f\,(t, x(t)) \quad , \; t \in (0,1)$$
$$x(0) = x'(0) = x'(1) = 0$$

علما ان α تمثل عدد حقيقي يقع ضمن الفترة $[2,3)$ و $D_{0^+}^{\alpha}$ يمثل الاشتقاق الكسري ل ريمان- ليوفيل وذلك بالاعتماد على طريقة الحل الادنى والحل الاعلى ومبرهنة النقطة الثابتة وحصل على نتائج وجود الحل للمعادلة اعلاه .

كما درس الباحثان Liang و Zhang مسائل القيم الحدودية للمعادلة اللاخطية التالية

$$D_{0^+}^{\alpha}x(t) = -f\,(t, x(t)) \quad , \; t \in (0,1)$$
$$x(0) = x'(0) = x''(0) = x''(1) = 0$$

حيث $3 < \alpha \le 4$ و $D_{0^+}^{\alpha}$ تمثل الاشتقاق الكسري ل ريمان- ليوفيل واعتمد الباحث على بعض مبرهنات النقطة الثابتة للحصول على نتائج وجود الحلول الموجبة.

اما عملنا هذا فتضمن وجود الحل الموجب للمعادلة اللاخطية من الرتب الكسرية التالية

$$D_{0^+}^{\delta}h(t) + g\,(t, h(t)) = 0 \quad , \; t \in (0,T)$$
$$h(0) = h'(0) = h''(0) = h'''(0) = h'''(T) = 0$$

علما ان $4 < \delta \le 5$ و δ تمثل عدد حقيقي ضمن الفترة و $D_{0^+}^{\delta}$ هو الاشتقاق الكسري ل ريمان- ليوفيل من الرتبة δ و $t \in J = [0,T]$ والدالة اللاخطية g معرفة ب $g:[0,T]\times X \to X$ واعتمدنا في دراستنا على مبرهنة الانكماش لباناخ ومبرهنة Krasnoel'skii للنقطة الثابتة للحصول على وجود الحل .

الكلمات المفتاحية : الحل الموجب, الاشتقاق الكسري, مسائل القيم الحدودية, مبرهنة النقطة الثابتة.

---

1. المقدمة

تعد المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية ذات اهمية كبيرة عند الكثير من علماء الرياضيات اذ كان لها الدور الكبير في تحديث مبرهنة حساب التفاضل الكسري والتكامل الكسري بالاضافة الى تطبيقات الانكماش في كثير من العلوم والهندسة مثل الكيمياء, الفيزياء والهندسة الميكانيكية والكثير من العلوم [1,2,3] ، كما ان معظم الدراسات في حساب التفاضل والتكامل تم اعتمادها لامكانية حل المعادلة

الكسرية اللاخطية , وفي السنوات القليلة الماضية نشرت بعض الدراسات التي تناولت تعدد وجود الحلول الموجبة لمعادلة تفاضلية كسرية لاخطية بالعتماد على بعض الشروط الحدودية باستعمال التحليل اللاخطي. نشر Yang and Chen [4] ، Kilbas وجماعته [6] تعدد وجود الحلول الموجبة لمسائل القيم الحدودية لمعادلات لاخطية كسرية.

في عملنا هذا درسنا المعادلة التالية

$$D_{0^+}^{\delta} h(t) + g(t, h(t)) = 0 \qquad , 0 < t < T \ , \ 4 < \delta \le 5 \qquad (1.1)$$

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = h'''(0) = h'''(T) \qquad (1.2)$$

حيث ان $D_{0^+}^{\delta}$ هو الاشتقاق الكسري القياسي ل Riemann-Liouville و $t \in J = [0,T]$ والدالة اللاخطية g معرفة ب $g : [0,T] \times X \to X$ حيث X هو فضاء باناخ Banach مزود بمعيار $\|.\|$.

وليكن $C = C([0,T], X)$ فضاء باناخ لكل الدوال المستمرة .

درسنا ايجاد الحل لمسالة القيم الحدودية $(1.1)-(1.2)$ لمعادلة ذات اشتقاق كسري في فضاء باناخ باستعمال نظرية باناخ ونظرية Krasnoel'skii .

2. تعاريف

هذا البند يتضمن بعض التعاريف والمأخوذات والنظريات التي نحتاجها في دراستنا .

تعريف 2.1 [6]

اذا كان $\lambda > 0,$ والدالة u مستمرة في $[a,b]$ فان $\overset{b}{\underset{a}{I}}{}^{\lambda} u(t)$ موجود ومستمر ويعرف بالصيغة

$$\overset{b}{\underset{a}{I}}{}^{\lambda} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^b (b-\sigma)^{\lambda-1} u(\sigma)\, d\sigma$$

تعريف 2.2 [6]

الاشتقاق الكسري ل Riemann-Liouville للدالة g المعرفة على $[a,b]$

$$D_{0^+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} g(\tau)\, d\tau$$

حيث $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ يمثل الجزء الصحيح ل α .

مأخوذة 2.1 [7]

لتكن $q > 0$ و $h \in C(0,T) \cap L(0,T)$ فان حل المعادلة $D_{0^+}^{q} h(t) = 0$ معرف ب $h(t) = b_1 t^{q-1} + b_2 t^{q-2} + \dots + b_n t^{q-n}$ لبعض $b_i \in R$, $i = 1,2,\dots,n$, $n = [q] + 1$ حيث $[q]$ يمثل الجزء الصحيح ل q .

مأخوذة 2.2 [7]

لتكن $q>0$ فان ${}^{t}D_a^{-q}\ {}^{t}D_a^{q}\,v(t)=v(t)+b_1t^{q-1}+b_2t^{q-2}+\ldots+b_nt^{q-n}$ لبعض
$n=[q]+1\ ,\ i=1,2,\ldots,n\ \ ,\ b_i\in R$

مبرهنة 2.1 (Krasnoel'skii fixed point theorem) [8]

لتكن M مقيدة ومغلقة –محدبة ومجموعة جزئية غير خالية في فضاء باناخ X . ليكن Φ,Ψ مؤثرين بحيث

1- $\Phi x+\Psi y\in M$ لكل $x,y\in M$,
2- Φ مدمج ومستمر ,
3- Ψ تطبيق انكماشي .

فيوجد عدد $z\in M$ بحيث ان $z=\Phi z+\Psi z$.

ليكن X فضاء باناخ مع النظيم $\|.\|$ وليكن $C=C([0,T],X)$ فضاء باناخ لكل الدوال المستمرة من J الى X مع المعيار $\|h\|=\sup\{y(t):t\in J\}$.

مأخوذة 2.3

لتكن $4<\delta\le 5$, $g:J\times X\to X$ دالة مستمرة ، $J=[0,T]$ فان مسالة القيم الحدودية $(1.1)-(1.2)$ تكافئ المعادلة التكاملية

$$h(t)=-\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t(t-r)^{\delta-1}g(r,h(r))\,dr+\frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)\,T^{\delta-4}}\int_0^T(T-r)^{\delta-4}g(r,h(r))\,dr \qquad (2.1)$$

البرهان

بالاعتماد على الماخوذة (2.2) يمكن كتابة $(1.1)-(1.2)$ بشكل معادلة تكاملية بالصيغة التالي

$$h(t)=-{}_0^tI^{\delta}g+a_1t^{\delta-1}+a_2t^{\delta-2}+a_3t^{\delta-3}+a_4t^{\delta-4}+a_5t^{\delta-5} \qquad (2.2)$$

$$h(t)=-\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t(t-r)^{\delta-1}g(r,h(r))\,dr+a_1t^{\delta-1}+a_2t^{\delta-2}+a_3t^{\delta-3}+a_4t^{\delta-4}+a_5t^{\delta-5}$$

وبتطبيق الشرط (1.2) نحصل على $a_2=a_3=a_4=a_5=0$ وان

$$a_1=\frac{1}{T^{\delta-4}\Gamma(\delta)}\int_0^T(T-r)^{\delta-4}g(r,h(r))\,dr$$

وعليه فان الحل الوحيد لمسألة القيم الحدودية $(1.1)-(1.2)$ هو

$$h(t)=-\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-r)^{\delta-1} g(r,h(r))\,dr+\frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)T^{\delta-4}}\int_0^T (T-r)^{\delta-4} g(r,h(r))\,dr$$

وبذلك ينتهي البرهان .

3 – المبرهنات الاساسية للبحث

بداية تعتمد دراستنا على مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة لاثبات وجود ووحدانية الحل

مبرهنة 3.1: نفرض ان

(i1) الدالة $h: J\times X\to X$ دالة مستمرة وليكن K ثابت يحقق الشرط التالي $\|h(t,z_1)-h(t,z_2)\|\le K\|z_1-z_2\|$ لكل $z_1,z_2\in X\ ,\ t\in J$ اذا

$$KT^{\delta}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}+\frac{1}{(\delta-3)\Gamma(\delta)}\right)<1 \qquad (3.1)$$

فان مسالة القيم الحدودية (1.1) – (1.2) لها حل وحيد على J .

البرهان : نعرف المؤثر $\pounds: C\to C$ على النحو التالي

$$\pounds h(t)=-\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-r)^{\delta-1} g(r,h(r))\,dr+\frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)T^{\delta-4}}\int_0^T (T-r)^{\delta-4} g(r,h(r))\,dr \qquad (3.2)$$

من الواضح ان النقطة الثابتة للتطبيق £ هي الحل للمسألة (1.1) – (1.2).

ليكن $x,y\in C(J,X)$ فان لكل $t\in J$ نحصل على

$$\begin{aligned}
\|\pounds x(t)-\pounds y(t)\| &\le \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-r)^{\delta-1}\|g(r,x(r))-g(r,y(r))\|\,dr \\
&\quad+\frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)T^{\delta-4}}\int_0^T (T-r)^{\delta-4}\|g(r,x(r))-g(r,y(r))\|\,dr \\
&\le \frac{K}{\Gamma(\delta)}\|x-y\|\int_0^t (t-r)^{\delta-1}dr+\frac{T^{\delta-1}K}{\Gamma(\delta)T^{\delta-4}}\|x-y\|\int_0^T (T-r)^{\delta-4}dr \\
&\le \frac{KT^{\delta}}{\Gamma(\delta+1)}\|x-y\|+\frac{T^{\delta}K}{\Gamma(\delta)(\delta-3)}\|x-y\| \\
&\le KT^{\delta}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}+\frac{1}{\Gamma(\delta)(\delta-3)}\right)\|x-y\|
\end{aligned}$$

فبموجب المعادلة (3.1) وباتباع مبدأ الانكماش الاساسي , نستنتج ان £ هو تطبيق انكماشي وحسب مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة

(Banach contraction principle theorem. Let T be a contraction mapping of a complete metrek space S into it self . then there is a uniqie point $u \in S$ such that Tu=u) [9]

يوجد نقطة وحيدة للتطبيق L تمثل حلا لمسألة القيم الحدودية $(1.1) - (1.2)$.

مبرهنة 3.2

نفرض ان

(i2) الدالة $g : J \times X \to X$ مستمرة ,

(i3) يوجد ثابت $M > 0$ بحيث ان $\| g(t,z) \| \le M$ لكل $t \in J$ وكل $z \in X$

فان مسالة القيم الاحدودية $1.2) - (1.1)$ تمتلك على الاقل حل واحد على J .

البرهان:

ومن السهولة اثبات ان £ تمتلك نقطة ثابتة على المجموعة $h \in B_\eta = \{h \in C(J,X) : \|h\| \le \eta\}$ نحصل على $\| £(h)\| \le \ell$ حيث $\ell > 0$ عدد ثابت, وهذه النقطة هي الحل للمسألة $(1.2) - (1.1)$ وعليه

$$\begin{aligned}
\| £h(t)\| &\le \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-r)^{\delta-1} \|g(r,h(r))\| dr + \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) T^{\delta-4}} \int_0^T (T-r)^{\delta-4} \|g(r,h(r))\| dr \\
&\le \frac{M}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-r)^{\delta-1} dr + \frac{M\, t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) T^{\delta-4}} \int_0^T (T-r)^{\delta-4}\, dr \\
&\le \frac{MT^\delta}{\Gamma(\delta+1)} + \frac{T^\delta M}{\Gamma(\delta)(\delta-3)} \\
\| £h(t)\| &= MT^\delta \left(\frac{1}{\Gamma(\delta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\delta)(\delta-3)} \right) := \ell.
\end{aligned}$$

لذا $£(B_\eta)$ مقيد.

مبرهنة 3.3

لتكن الفرضيات i1–i3 متحققة وان $KT^\delta \left(\frac{1}{\Gamma(\delta)(\delta-3)} \right) < 1$ فان المسالة $(1.1) - (1.2)$ لها حل وحيدا على [0,T] **.**

البرهان

لتكن $B_\eta = \{h \in C(J,X) : \|h\| \le \eta\}$ نعرف المؤثريين θ_1, θ_2 كالتالي

$$(\theta_1 x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-r)^{\delta-1} g(r, x(r))\, dr$$

$$(\theta_2 x)(t) = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) T^{\delta-4}} \int_0^T (T-r)^{\delta-4} g(r, x(r))\, dr$$

من الملاحظ انه اذا كان $x, y \in B_\eta$ فان $\theta_1 x + \theta_2 y \in B_\eta$

$$\begin{aligned}
\|\theta_1 x + \theta_2 y\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-r)^{\delta-1} g(r, x(r))\, dr + \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) T^{\delta-4}} \int_0^T (T-r)^{\delta-4} g(r, y(r))\, dr \right\| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-r)^{\delta-1} \|g(r, x(r))\|\, dr + \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) T^{\delta-4}} \int_0^T (T-r)^{\delta-4} \|g(r, y(r))\|\, dr \\
&\le \frac{M}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-r)^{\delta-1} dr + \frac{M\, T^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) T^{\delta-4}} \int_0^T (T-r)^{\delta-4}\, dr \\
&\le \frac{MT^\delta}{\Gamma(\delta+1)} + \frac{T^\delta M}{\Gamma(\delta)(\delta-3)} \\
&\le MT^\delta \left(\frac{1}{\Gamma(\delta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\delta)(\delta-3)} \right)
\end{aligned}$$

وعليه فان $\theta_1 x + \theta_2 y \in B_\eta$

الان سنبرهن ان θ_2 هو انكماش

$$\begin{aligned}
\|\theta_2 x - \theta_2 y\| &\le \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) T^{\delta-4}} \int_0^T (T-r)^{\delta-4} \|g(r, x(r)) - g(r, y(r))\|\, dr \\
&\le \frac{Kt^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) T^{\delta-4}} \int_0^T (T-r)^{\delta-4} \|x-y\|\, dr \\
&\le \frac{KT^\delta}{\Gamma(\delta)(\delta-3)} \|x-y\|
\end{aligned}$$

من هنا نستنتج ان θ_2 هو تطبيق انكماشي ، وبما ان x(t) مستمرة فان $\theta_1 x$.

$$\begin{aligned}
\|\theta_1 x(t)\| &\le \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-r)^{\delta-1} g(r, x(r))\, dr \\
&\le \frac{MT^\delta}{\Gamma(\delta+1)}
\end{aligned}$$

وبالتالي فأن θ_1 مقيدة بانتظام على B_η .

الان سنبرهن ان $\theta_1 x(t)$ متساوية الاستمرارية.

لتكن $t_1, t_2 \in [0.T]$, $t_1 - t_2 < 0$, $x \in B_\eta$. وباعتبار g مقيدة على المجموعة المدمجة $J \times B_\eta$ فان

$$\sup_{(t,r)\in J\times B\eta} \| g(r, x(r)) \| = b_\circ < \infty$$

نحصل على

$$\|\theta_1 x(t_1) - \theta_1 x(t_2)\| = \left\| \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{t_1} (t_1 - r)^{\delta-1} g(r, x(r))\, dr - \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{t_2} (t_2 - r)^{\delta-1} g(r, x(r))\, dr \right\|$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{t_1} [\ (t_2 - r)^{\delta-1} - (t_1 - r)^{\delta-1}\ ] \|\ g(r, x(r))\ \| dr$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - r)^{\delta-1} \|\ g(r, x(r))\ \| dr$$

$$\le \frac{b_\circ}{\Gamma(\delta)} \int_0^{t_1} [\ (t_2 - r)^{\delta-1} - (t_1 - r)^{\delta-1}\ ] dr + \frac{b_\circ}{\Gamma(\delta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - r)^{\delta-1} dr$$

$$\le \frac{b_\circ}{\Gamma(\delta+1)} \left[2(t_2 - t_1)^\delta - (t_1^{\ \delta} - t_2^{\ \delta})\ \right]$$

لذا فان θ_1 مدمج محليا وبنص مبرهنة Arzela-Ascoli فان θ_1 يعتبر مدمجة وعليه فان نتائج مبرهنة Krasnoel'skii تتحقق .

مكان العمل : جامعة الموصل , كلية التربية للعلوم الصرفة, قسم الرياضيات

References

[1] F. Mainardi, " The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation," Applied Mathematics Letters, Vol. 9,no. 6,pp. 23-28, 1996.

[2] E. Buckwar and Y. Luchko, " Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations," Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 227, no. 1, pp. 81-97, 1998.

[3] Z. Y. Zhu,G. G. Li, and C. J. Cheng, " Quasi-static and dynamical analysis for viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivative constitutive relation," Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 23, no. 1, pp. 1-12, 2008.

[4] L.Yang, H.chen," Unique positive solutions for fractional differential equation boundary value problems ," Aplyy. Math. Lett. 23, 1045-1098, (2010)

[5] Z. Bai and H. Lu " positive solutions for boundary value problem of non linear Fractional differential equation," Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 311, no. 2, pp. 495-505,(2005).

[6] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J. J. Trujillo," Theory and Applications of Fractional differential equations," North-Holland Mathematics studies, 204. Elsevies Science B.V., Amsterdam,(2006).

[7] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Nieto, Theory and Applicational Differential Equations, Elsevier, Amsterdam (2006).

[8] D. R. Smart, Fixed point theorem, Cambrigagd, University press, London, UK, (1980).

[9] A. Granas and J. Dugundji, Fixed point theory, Springer – deriag, New York, (2003).