Al Kut Journal of Economics and Administrative Sciences /ISSN: 1999 -558X /ISSN Online 2707-4560/ Vol (14) Issue: 45-2022 (December)

AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

# تقدير معلمات توزيع ليندلي المختلط مع تطبيق عملي

م.م. لؤي عادل عبد الجبار[1] / وزارة التعليم العالي والبحث العلمي / دائرة الدراسات والتخطيط والمتابعة

luay.yahya1989@gmail.com

م. علي محمد علي جيجان[2]/ الجامعة التقنية الوسطى / معهد الادارة الرصافة

alimohammed520@mtu.edu.iq

م.م. مصطفى علي فخري[3] / جامعة ابن سينا للعلوم الطبية والصيدلانية

mustafa.ali@ibnsina.edu.iq

**المستخلص**

في هذا البحث تم دراسة توزيع ليندلي المختلط (ذو الثلاث معلمات) مع خصائص هذا التوزيع ، حيث سيتم تقدير معلمات هذا التوزيع بثلاث طرائق وهي (طريقة الامكان الاعظم ، طريقة العزوم ، طريقة التقليص) وتطبيق هذه الطرائق على بيانات حقيقية خاصة بانتظار المسافرين للحصول على تأشيرة الفيزا من السفارة التركية اذ تم استخدام متوسط مربعات الخطأ للمقارنة بين هذه الطرائق ، واظهرت النتائج أنّ افضل طريقة لتقدير معلمات توزيع ليندلي المختلط هي طريقة التقليص .

**المصطلحات الرئيسية بالبحث :توزيع ليندلي المختلط ، طريقة الامكان الاعظم ، طريقة العزوم المعممة ، طريقة التقليص ، متوسط مربعات الخطأ.**

## 1-المقدمة : introduction

يتم استعمال النماذج المختلطة لنمذجة الظواهر المختلفة ، إذ تستخدم هذه النماذج في العديد من التطبيقات مثل علم الأحياء وعلم الوراثة والطب والاقتصاد وغيرها من العلوم الطبيعية والاجتماعية ، من مميزات هذه النماذج هو دمج توزيعين أو أكثر عن طريق دمج النسب للحصول على توزيع جديد بخصائص جديدة، لذلك من المهم دراسة الخصائص الإحصائية لنموذج المختلط المقترح وتقدير معلماته المجهولة بالطرق المناسبة. سوف نقوم في هذا البحث بدراسة دمج توزيعين Lindley أحادي المعلمة ، يعد توزيع Lindley مهمًا لنمذجة مجموعات مختلفة من بيانات اوقات الانتظار وغيرها ، يعد هذا التوزيع أحد التوزيعات المختلطة المستمرة المهمة التي تتميز بإمكانية تمثيلها في المجتمعات المركبة او غير المتجانسة

مـن ناحيـة والمرونـة العاليـة فـي دراسـة وتحليـل أوقـات الفشـل والبقـاء مـن ناحيـة اخـرى [1] كـون هـذا التوزيـع ينـتج مـن دمـج متغيـرين عشـوائيين يتبعـان تـوزيعين إحتمـاليين همـا التوزيـع exponential وتوزيـع Gamma ، [9].

فـي هـذا البحـث سـوف نقـوم بدراسـة النمـوذج المخـتلط لتـوزيعي لينـدلي بمعامـل واحـد وكيفيـة صـياغة دالـة كثافـة احتمالية لهذا التوزيع مع بيان عدة خصائص احصائية لهذا التوزيع المختلط .

### 1-1هدف البحث : objective of the study

يهـدف البحـث الـى كيفيـة دمـج تـوزيعي Lindley ذو المعلمـة الواحـدة مـن خـلال اسـتعمال التوزيـع المخـتلط ، وكـذلك تقـدير معلمـات توزيـع Lindley مـع تقـدير معلمـة الـدمج بعـدة طرائـق تقـدير وتطبيقهـا علـى بيانـات حقيقيـة والخاصة بانتظار المسافرين للحصول على تأشيرة الفيزا من السفارة التركية.

## 2-الجانب النظري:

### 1-2 توزيع ليندلي المختلط:

تـم اقتراحـه مـن قبـل الباحـث (D.V. Lindley , 1958) وهـو مـن التوزيعـات المختلطـة وينـتج مـن دمـج متغيـرين عشـوائيين الاول يتبـع التوزيـع الاسـي بمعلمـة قيـاس (λ1) ، والمتغيـر الاخـر يتبـع توزيـع كامـا بـنفس معلمـة القيـاس (λ2) وبمعلمـة شكــل ( وهـي المعلمـة التـي تـؤثر علـى الشـكل العـام لمنحنـى دالـة توزيـع لينـدلي) ، وبإسـتخدام صـيغة الـدمج لنمـوذج توزيـع لينـدلي المخـتلط فسـتكون الدالـة الكثافـة الاحتماليـة (pdf) لتوزيـع لينـدلي المختلط كالاتي [7]:

$$f(\lambda; p, \lambda_1, \lambda_2) = pf_1(x; \lambda_1) + (1-p)f_2(x; \lambda_2) \qquad , \quad 0 < p < 1 \qquad \dots (1)$$

$\lambda_1$ : معلمة دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي الاول

$\lambda_2$ :معلمة دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي الثاني

$p = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ : معلمة دمج التوزيع

حيـث ان المتغيـر العشـوائي (x)هنـا سـوف يكـون تابعـاً لتوزيـع لينـدلي ذي المعلمـة الواحـدة فسـتكون الدالـة الكثافة الاحتمالية (pdf) له بالشكل الاتي [10] :

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda+1}(1+x)e^{-\lambda x} \qquad , x \geq 0 \ , \qquad \lambda > 0 \qquad \dots (2)$$

وبتعويض معادلة رقم (2) في (1) ستكون الدالة الكثافة الاحتمالية (pdf) لتوزيع ليندلي المختلط كالاتي :

$$f(\lambda; p, \lambda_1, \lambda_2) = p\frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}(1+x)e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}(1+x)e^{-\lambda_2 x} \quad \dots (3)$$

$x \geq 0 \quad , \qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0$

وايضاً يكون لتوزيع ليندلي المختلط دالة كثافية تراكمية (cdf) بالشكل الاتي ، [1] :

$$F(x;p,\lambda_1,\lambda_2) = pF_1(x;\lambda_1) + (1-p)F_2(x;\lambda_2) \qquad \dots(4)$$

حيث ان

$$F_i(x;\lambda_i) = 1 - \frac{\lambda_i + 1 + \lambda_i x}{\lambda_i + 1} e^{-\lambda_i x} \quad ,i = 1,2 \quad x \geq 0\,, \lambda_i > 0 \quad \dots(5)$$

**2-2 خصائص توزيع ليندلي المختلط :**

إنّ من خصائص توزيع ليندلي المختلط كما يلي :

**1- ان دالة pdf تساوي واحد ** :**

$$\int_0^\infty \mathrm{f}(\mathrm{x}/p,\lambda_1,\lambda_2) = p\left[\frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}\int_0^\infty e^{-\lambda_1 x}dx + \frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}\int_0^\infty xe^{-\lambda_1 x}dx\right] +$$

$$(1-p)\left[\frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}\int_0^\infty e^{-\lambda_2 x}dx + \frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}\int_0^\infty xe^{-\lambda_2 x}dx\right] \quad \dots(6)$$

$$= p\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1} + \frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}\left[\frac{\Gamma(2)}{{\lambda_1}^2}\right]\right] + (1-p)\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2+1} + \frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}\left[\frac{\Gamma(2)}{{\lambda_2}^2}\right]\right] \quad \dots(7)$$

**** الاشتقاق من قبل الباحث**

$$= p\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1} + \frac{1}{\lambda_1+1}\right] + (1-p)\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2+1} + \frac{1}{\lambda_2+1}\right] \quad \dots(8)$$

$$= p\left[\frac{\lambda_1+1}{\lambda_1+1}\right] + (1-p)\left[\frac{\lambda_2+1}{\lambda_2+1}\right] \qquad \dots \quad (9)$$

$$= p + (1-p) \qquad \dots \quad (10)$$

$$= 1$$

من الاشتقاق اعلاه نلاحظ ان دالة توزيع ليندلي المختلط هي دالة pdf

**2- الوسط الحسابي (Mean) و التباين (Variance) **:**

يمكن اشتقاق الوسط الحسابي والتباين من الدالة المولدة للعزوم وكما يلي

$$\mu^r = E(X^r) = \int_0^\infty \left[p\frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}(1+x)e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}(1+x)e^{-\lambda_2 x}\right]dx \,. (11)$$

$$= p\left[\frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}\left[\int_0^\infty X^r e^{-\lambda_1 x}dx + \int_0^\infty X^{r+1}e^{-\lambda_1 x}dx\right]\right] +$$

$$(1-p)\left[\frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}\left[\int_0^\infty X^r e^{-\lambda_2 x}dx + \int_0^\infty X^{r+1}e^{-\lambda_2 x}dx\right]\right] \dots (12)$$

$$= p\left[\frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}\left[\frac{\Gamma(r+1)}{{\lambda_1}^{r+1}} + \frac{\Gamma(r+2)}{{\lambda_1}^{r+2}}\right]\right] + (1-p)\left[\frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}\left[\frac{\Gamma(r+1)}{{\lambda_2}^{r+1}} + \frac{\Gamma(r+2)}{{\lambda_2}^{r+2}}\right]\right] \dots (13)$$

$$= p\left[\frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}\left[\frac{\lambda_1 r! + (r+1)!}{{\lambda_1}^{r+2}}\right]\right] + (1-p)\left[\frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}\left[\frac{\lambda_2 r! + (r+1)!}{{\lambda_2}^{r+2}}\right]\right] \qquad \dots (14)$$

$$= p\left[\frac{r!\,(\lambda_1+r+1}{\lambda_1^r(\lambda_1+1)}\right] + (1-p)\left[\frac{r!\,(\lambda_2+r+1}{\lambda_2^r(\lambda_2+1)}\right] \qquad \dots (15)$$

العزم الاول عندما r=1 وهو الوسط الحسابي

$$E(X) = p\left[\frac{\lambda_1+2}{\lambda_1(\lambda_1+1)}\right] + (1-p)\left[\frac{\lambda_2+2}{\lambda_2(\lambda_2+1)}\right] \qquad \dots (16)$$

**الاشتقاق من قبل الباحث

العزم الثاني عندما r=2 هو $E(X^2)$ وكما يلي :

$$E(X^2) = p\left[\frac{2(\lambda_1+3)}{\lambda_1^2(\lambda_1+1)}\right] + (1-p)\left[\frac{2(\lambda_2+3)}{\lambda_2^2(\lambda_2+1)}\right] \qquad \dots (17)$$

ويمكن كتابة التباين كما يلي :

$$V(x) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \qquad \dots (18)$$

$$V(X)=p\left[\frac{2(\lambda_1+3)}{\lambda^2{}_1(\lambda_1+1)}-p\left(\frac{\lambda_1+2}{\lambda_1(\lambda_1+1)}\right)^2\right]+(1-p)$$

$$\left[\frac{2(\lambda_2+3)}{\lambda^2{}_2(\lambda_2+1)}-(1-p)\left(\frac{\lambda_2+2}{\lambda_2(\lambda_2+1)}\right)^2\right]-2p(1-p)$$

$$\left(\frac{\lambda_1+2}{\lambda_1(\lambda_1+1)}\right)\left(\frac{\lambda_2+2}{\lambda_2(\lambda_2+1)}\right),\quad \text{o}<\text{p}<1,\qquad \lambda_1,\lambda_2>0\qquad \dots(19)$$

**3- المنوال (Mood)** [6] **:**

$$M0=\frac{p\lambda_1{}^2}{\lambda_1+1}\left[e^{-\lambda_1 x}-(1+x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\right]+\frac{(1-p)\lambda_2{}^2}{\lambda_2+1}$$

$$\left[e^{-\lambda_2 x}-(1+x)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\right]=0\qquad \dots(20)$$

**4- الوسيط (Median)** [6]**:**

$$Me=\ F(x;p,\lambda_1,\lambda_2)=pF_1(x;\lambda_1)+(1-p)F_2(x;\lambda_2)=0.5\quad \dots(21)$$

وللاطلاع على خصائص الوسيط والمنوال يمكن الذهاب الى المصدرين [8] ، [4]

**<u>3-2 طريقة الامكان الاعظم (MLE)(Maximum Likelihood Method ):</u>**

من الطرائق التي تجعل دالة الامكان ( Likelihood Function) في نهايتها الصغرى فاذا كانت العينة العشوائية للمشاهدات المستقلة ( $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ ) لمتغير يتبع توزيع ليندلي المختلط فان دالة الامكان تكون كالاتي [2] [8] , :

$$\boldsymbol{L}\ =\prod_{i=1}^{n} f(\lambda;p,\lambda_1,\lambda_2)\qquad \dots(22)$$

$$L^*=\log L=\sum_{i=1}^{n}\log\left(p\frac{\lambda_1{}^2}{\lambda_1+1}(1+x_i)e^{-\lambda_1 x_i}+(1-p)\frac{\lambda_2{}^2}{\lambda_2+1}(1+x_i)e^{-\lambda_2 x_i}\right).(23)$$

$$0<p<1\quad ,\quad x\geq 0\,,\lambda_1,\lambda_2>0$$

من خلال اشتقاق المعادلة (23) بالنسبة الى المعلمات ( $p,\lambda_1,\lambda_2$ ) ومساواتها للصفر نحصل على التالي :

$$\frac{L^*}{\partial_p}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\lambda_1{}^2}{\lambda_1+1}(1+x_i)e^{-\lambda_1 x_i}-\frac{\lambda_2{}^2}{\lambda_2+1}(1+x_i)e^{-\lambda_2 x_i}}{p\frac{\lambda_1{}^2}{\lambda_1+1}(1+x_i)e^{-\lambda_1 x_i}+(1-p)\frac{\lambda_2{}^2}{\lambda_2+1}(1+x_i)e^{-\lambda_2 x_i}}=0\ \dots(24)$$

$$\frac{L^*}{\partial_{\lambda_1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p\left[\frac{{\lambda_1}^2 + 2\lambda_1}{(\lambda_1+1)^2}(1+x_i)e^{-\lambda_1 x_i} - \frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}(1+x_i)(-xe^{-\lambda_1 x_i})\right]}{p\frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}(1+x_i)e^{-\lambda_1 x_i} + (1-p)\frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}(1+x_i)e^{-\lambda_2 x_i}} = 0 \quad \dots (25)$$

$$\frac{L^*}{\partial_{\lambda_2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-p)\left[\frac{{\lambda_2}^2 + 2\lambda_2}{(\lambda_2+1)^2}(1+x_i)e^{-\lambda_2 x_i} - \frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}(1+x_i)(-xe^{-\lambda_2 x_i})\right]}{p\frac{{\lambda_1}^2}{\lambda_1+1}(1+x_i)e^{-\lambda_1 x_i} + (1-p)\frac{{\lambda_2}^2}{\lambda_2+1}(1+x_i)e^{-\lambda_2 x_i}} = 0 \quad \dots (26)$$

نلاحظ ان المعادلات (11) و (12) و (13) لايمكن ايجاد مقدرات الامكان الاعظم بالطرق الاعتيادية لذلك سوف نقوم بتقدير مقدرات الامكان الاعظم باستخدام طريقة نيوتن رافسن باستعمال برنامج ($R$) بواسطة حزمة *(x,fn,method="Newton-Rphson)* [2].

## 2-4 طريقة العزوم المعممة (GMM)(Generalized Method of Moments Estimation):

هناك طريقة بديلة لتقدير طريقة العزوم وهي طريقة العزوم المعممة (GMM) التي تم استخدامها بكثرة في الأبحاث الحديثة وتم استخدامها في مختلف التطبيقات مثل الزراعة ودورات الأعمال والتعليم والرعاية الصحية والاستثمار والعديد من مجالات الاقتصاد والتمويل التطبيقي وتم تطوير هذه الطريقة من قبل العالم لارس بيتر هانسن عام 1982 وجعلها طريقة معممة للعزوم وتطبيقها على نطاق واسع لتحليل البيانات الاقتصادية والمالية [5].

لنفترض أنه تم استيفاء شروط العزوم لمجتمع معين ولدينا عينة من المشاهدات $x_i\,;\, i = 1,2,..,n$ التي نريد تقدير معلمة غير معروفة (λ) من متجه المعلمة $\Theta$. ولنفترض ان $E[h(x_i,\lambda)]$ عبارة عن مجموعة من r من عزوم المجتمع و $h(x_i,\lambda)$ نظائر العينة المقابلة. حيث ان الطريقة المعممة لمقدر العزوم هي قيمة (λ) ، مما يقلل من مقياس دالة $\mathbb{Q}_n(\lambda)$ ، والتي تقيس انحراف شرط العزوم [2].

$$\mathbb{Q}_n(\lambda) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} h(x_i,\acute{\lambda})W_n n^{-1}\sum_{i=1}^{n} h(x_i,\lambda) \qquad \dots (27)$$

حيث ان $W_n$ هي مصفوفة موجبة شبه محددة والتي قد تعتمد على البيانات ولكنها تتقارب في الاحتمال إلى مصفوفة محددة موجبة من الثوابت. هناك طريقتان لترجيح شرط عزوم العينة ، وهما الأوزان المنتظمة والمثالية حيث تستخدم الاوزان المنتظمة في مصفوفة الوحدة لتوزن شرط العزوم وتستعمل الاوزان المثالية معكوس مصفوفة التباين لشرط عزم العينة وسوف نوضح مقدرات GMM لمزيج توزيعي ليندلي أحادي المعلمة من خلال إيجاد مجموعة شرط عزوم المجتمع التي تعادل عزوم العينة كالاتي [2]:

$$x_i - E(X) = 0 \qquad \dots (28)$$

$$x^2{}_i - E(X^2) = 0 \qquad \dots (29)$$

$$x^3{}_i - E(X^3) = 0 \qquad \dots (30)$$

من خلال معادلة رقم (14) ، يمكننا الحصول على مقدرات GMM للمعلمات غير المعروفة $(p, \lambda_1, \lambda_2)$ من خلال إيجاد قيم المعلمات التي تقلل من مقياس دالة $\mathbb{Q}_n(\Theta)$

$$\mathbb{Q}_n(\Theta) = \frac{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}{n} - \frac{2\sum_{i=1}^n x_i}{n} E(X) + E(X)^2 + \frac{\sum_{i=1}^n {{x_i}^2}^2}{n} - \frac{2\sum_{i=1}^n {x_i}^2}{n} E(X^2)$$

$$+E(X^2)^2 + \frac{\sum_{i=1}^n {{x_i}^3}^2}{n} - \frac{2\sum_{i=1}^n {x_i}^3}{n}\, E(X^3) + E(X^3)^2 \qquad \dots (31)$$

حيث ان :

$$\Theta = (p, \lambda_1, \lambda_2)$$

$$E(X) = p\left[\frac{\lambda_1 + 2}{\lambda_1(\lambda_1 + 1)}\right] + (1-p)\left[\frac{\lambda_2 + 2}{\lambda_2(\lambda_2 + 1)}\right] \qquad \dots (32)$$

$$E(X^2) = p\left[\frac{2(\lambda_1 + 3)}{{\lambda_1}^2(\lambda_1 + 1)}\right] + (1-p)\left[\frac{2(\lambda_2 + 3)}{{\lambda_2}^2(\lambda_2 + 1)}\right] \qquad \dots (33)$$

$$E(X^3) = p\left[\frac{6(\lambda_1 + 4)}{{\lambda_1}^3(\lambda_1 + 1)}\right] + (1-p)\left[\frac{6(\lambda_2 + 4)}{{\lambda_2}^3(\lambda_2 + 1)}\right] \qquad \dots (34)$$

من خلال تعويض المعادلات (19) و (20) و (21) في معادلة رقم (18) و اشتقاق المعاملات $( p, \lambda_1, \lambda_2)$ ومساواتها للصفر نحصل على التالي [2] , [5] :

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_n(\Theta)}{\partial_p} = 2\left[\left(\frac{6(1-p)(\lambda_2 + 4)}{{\lambda_2}^3(\lambda_2 + 1)}\right)\left(\frac{6p(\lambda_1 + 4)}{{\lambda_1}^3(\lambda_1 + 1)}\right)\left(\frac{6(\lambda_1 + 4)}{{\lambda_1}^3(\lambda_1 + 1)}\right)\left(\frac{6(\lambda_2 + 4)}{{\lambda_2}^3(\lambda_2 + 1)}\right)\right] = 0$$

$$\dots (35)$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_n(\Theta)}{\partial_{\lambda_1}} = 12p\left[\frac{1}{{\lambda_1}^3(\lambda_1 + 1)} - \left(\frac{{\lambda_1}^2(4\lambda_1 + 3)(\lambda_1 + 4)}{{\lambda_1}^3(\lambda_1 + 1)^2}\right)\left(\frac{6(1-p)(\lambda_2 + 4)}{{\lambda_2}^3(\lambda_2 + 1)}\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{6p(\lambda_1 + 4)}{{\lambda_1}^3(\lambda_1 + 1)}\right)\right] = 0 \qquad \dots (36)$$

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_n(\Theta)}{\partial_{\lambda_2}} = 12p(1-p)\left[\frac{1}{{\lambda_2}^3(\lambda_2+1)} - \left(\frac{{\lambda_2}^2(4\lambda_2+3)(\lambda_2+4)}{{\lambda_2}^3(\lambda_2+1)^2}\right)\left(\frac{6(1-p)(\lambda_2+4)}{{\lambda_2}^3(\lambda_2+1)}\right)\left(\frac{6p(\lambda_1+4)}{{\lambda_1}^3(\lambda_1+1)}\right)\right] = 0 \qquad \dots (37)$$

نلاحظ من المعادلات (22) و (23) و (24) بانه لايمكن ايجاد مقدرات العزوم المعممة بالطرق الاعتيادية لذلك سوف نقوم بتقدير مقدرات العزوم المعممة بالطرق العددية باستعمال برنامج ($R$) .

## 2-5 طريقة التقليص (SH)( Srinkage Method):

دالة التقليص تعني مقدار ثقة الباحث في المعلومات السابقة وما هو متاح منها حيث يكون اعتماد طريقة التقليص على المعلومات القديمة بحيث تكون اعتماد فكرة مقدر التقليص على استخدام ماهو موجود من المعلومات السابقة حول المعلمة التي يراد تقديرها على شكل قيمة اولية ولتكن $\kappa_0$ مع قيمة تقديرية اخرى $\hat{\kappa}$ والتي تحسب باحدى الطرائق التقليدية وصيغة مقدر التقلص تحسب كالاتي [3] :

$$\hat{\kappa}_{sh} = \alpha\hat{\kappa} + (1-\alpha)\kappa_0 \qquad \dots (38)$$

$\kappa_0$: معلومات مسبقة حول المعلمة.

$\hat{\kappa}$ : مقدر غير متحيز اولي.

$\alpha$ : مقدار التقليص وتكون قيمته بين (0,1).

في هذا البحث سيتم افتراض قيمة $\alpha = 0.5$ ، وسوف نستخدم التقديرات المتوفرة لدينا التي تم تقديرها بالفعل وهي مقدر الامكان الاعظم ومقدر العزوم وتوظيفها في طريقة التقليص كالاتي كما في البحوث الحديثة:

$$\hat{\kappa}_{sh} = \alpha\hat{\kappa}_{MLE} + (1-\alpha)\kappa_{GMM} \qquad \dots (39)$$

ولتقدير معلمات الانموذج ( $p, \lambda_1, \lambda_2$ ) المستخدم لهذه الطريقة ، سوف نتبع ما يلي:

$$\hat{p}_{sh} = \alpha\hat{p}_{MLE} + (1-\alpha)p_{GMM} \qquad \dots (40)$$

$$\hat{\lambda}_{1_{sh}} = \alpha\hat{\lambda}_{1_{MLE}} + (1-\alpha)\lambda_{1_{GMM}} \qquad \dots (41)$$

$$\hat{\lambda}_{2_{sh}} = \alpha\hat{\lambda}_{2_{MLE}} + (1-\alpha)\lambda_{2_{GMM}} \qquad \dots (42)$$

## 3- الجانب التطبيقي:

### 1-3 وصف البيانات

في هذا البحث سيتم تطبيق الجانب النظري على بيانات حقيقية والخاصة بدراسة وتحليل الوقت اللازم للحصول على الفيزا من السفارة التركية .

للحصول على الفيزا من السفارة التركية يجب على المسافر تقديم طلب الى القنصلية التركية الموجودة في العراق من خلال مركز يسمى (gateway) ، في بداية الامر يجب تحضير المستمسكات اللازمة لتقديم الفيزا وهي ( جواز السفر و هوية الاحوال المدنية (او البطاقة الموحدة ) ، وبطاقة سكن وبطاقة تموينية وسند العقار الخاص بالمتقدم للفيزا او لاحد من أقربائه من الدرجة الاولى ، وكذلك تأييد استمرارية او عمل للموظف او المتقاعد يذكر فيه الراتب الاسمي او الكلي ، واذا كان المسافر غير موظف فيطلب منه اجازة سوق اواي هوية اخرى لديه ، واخيراً كشف حساب مصرفي بالنسبة للمتقدم للحصول على الفيزا او لاحد من اقربائه من الدرجة الاولى ) .

إنّ المركز الخاص للحصول على الفيزا التركية ( gateway) لديه ثلاثة مراكز في بغداد وهي في منطقة الكرادة والوزيرية والسيدية ، وفي هذا البحث تم سحب العينة من المركز الموجود في منطقة الوزيرية ، وللحصول على الفيزا يجب على المتقدم المرور بعدة خطوات لغرض استكمالها وكما يلي :

1- موظف الاستعلامات : يقوم هذا الموظف بتدقيق الجواز من حيث اسم الشخص ورقم الجواز للتأكد بان الشخص قد أتم الحجز مسبقاً قبل القدوم الى المركز واكمال إجراءات الفيزا التركية .

2- موظف استقبال المراجعين : يقوم هذا الموظف بإدخال كافة المعلومات المطلوبة ورفعها الى السفارة التركية من اجل الحصول على الفيزا المطلوبة من قبل الشخص (فيزا سياحية ، مرضية ،اخرى) .

3- موظف الاستنساخ : يقوم هذا الموظف باستنساخ المستمسكات المطلوبة .

4- العودة الى موظفة استقبال المراجعين : لتسليم الاستنساخات والتأكد من صحة المعلومات المعطاة .

5- موظف البصمة : يقوم هذا الموظف بأخذ بصمة الاصابع العشرة مع اخذ صورة للوجه .

6- موظف الحسابات : يقوم هذا الموظف بإخذ الرسوم الخاصة بمنح الفيزا والبالغة (135 دولار) وتشمل الفيزا والتأمين الصحي واجور خدمة توصيل الفيزا الى منزل طالب الفيزا .

في هذا البحث تم حساب الوقت اللازم لإنجاز الخطوات اعلاه لـ(40) شخصاً في منفذ منطقة الوزيرية علماً ان الوقت يكون متغيراً من مسافر لآخر وكذلك حسب الموسم والزخم وحسب الجدول التالي :

جدول رقم (1) يبين الوقت اللازم للحصول على الفيزا (بالساعات) من منفذ منطقة الوزيرية

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.88 | 0.70 | 1.15 | 1.38 | 0.77 |
| 1.03 | 1.12 | 0.78 | 1.02 | 1.37 |
| 1.05 | 1.33 | 1.35 | 0.95 | 1.25 |
| 0.78 | 1.03 | 0.77 | 1.35 | 0.82 |
| 1.07 | 1.02 | 0.93 | 0.92 | 1.00 |
| 0.95 | 0.72 | 1.38 | 0.97 | 1.43 |
| 1.48 | 0.88 | 0.80 | 1.45 | 0.98 |
| 0.83 | 1.37 | 0.98 | 1.23 | 0.73 |

### 2-3 اختبار البيانات

في هذا الجزء سيتم اختبار البيانات للتأكد من ان البيانات الحقيقية تتبع توزيع ليندلي باستعمال اختبار حسن المطابقة (Goodness of Fit) من خلال استعمال برنامج R بواسطة حزمة الاختبار ( Kolmogorov Smirnov) وبمستوى معنوية 5% وكانت النتائج كما يلي :

جدول رقم (2) يوضح اختبار Kolmogorov Smirnov للبيانات الحقيقية

| p-Value | Kolmogorov Smirnov |
|---|---|
| 0.4345 | 0.3024 |

### 3-3 تقدير معلمات توزيع ليندلي المختلط :

في هذا الجزء سيتم تقدير معلمات توزيع ليندلي المختلط باستعمال طرائق التقدير المذكورة في الجانب النظري ، اذ نلاحظ ان تقديرات طريقة الامكان الاعظم طريقة العزوم تمتلك درجة خطية عالية جدا ولا يمكن حلها الا بعد استعمال الطرق العددية ، في هذا البحث تم استعمال طريقة نيوتن رافسون لحل هذه المعادلات ، وكذلك سوف نستخدم متوسط مربعات الخطأ للمقارنة للحصول على افضل طريقة ، ولإتمام ذلك قام الباحث بكتابة البرنامج باستعمال برنامج (R) ، اذ ان متوسط مربعات الخطأ الذي تم استخدامه في هذا البحث كما يلي:

$$MSE(\hat{\lambda}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\lambda} - \lambda)^2}{n} \qquad \dots (43)$$

اذ ان : $\hat{\lambda}$ تمثل القيمة المقدرة لمعلمات التوزيع ( $p, \lambda_1, \lambda_2$)

$n$ تمثل حجم العينة

الجدول ادناه يبين تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ للتوزيع للطرق المستخدمة وكما يلي:

جدول رقم (3) يبين تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ للتوزيع لكل طريقة

| Methods | p | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | MSE |
|---|---|---|---|---|
| MLE | 0.17 | 0.73 | 0.034 | 0.423 |
| GMM | 0.23 | 0.92 | 0.052 | 0.642 |
| SH | 0.20 | 0.83 | 0.04 | 0.107 |

نلاحظ من الجدول اعلاه ان افضل طريقة لتقدير توزيع ليندلي المختلط هي طريقة التقليص وتأتي بعدها طريقة الامكان ، اذ ان طريقة التقليص تعتمد على طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم المعممة لذلك اعطت اقل متوسط مربعات خطأ وان الانموذج الرياضي بعد تقدير المعلمات كما يلي :

$$f(\hat{\lambda}; \hat{p}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = (0.20)\frac{(0.83)^2}{(0.83)+1}(1+x)e^{-(0.83)x} + (1-0.20)\frac{(0.04)^2}{(0.04)+1}$$

$$(1+x)e^{-(0.04)x} \quad \dots (44)$$

## 4- الاستنتاجات والتوصيات :

1-4 الاستنتاجات :

1- من النتائج الظاهرة في جدول رقم 3 نلاحظ ان افضل طريقة لتقدير معلمات توزيع ليندلي المختلط كانت طريقة التقليص .

2- إنّ طريقة الامكان الاعظم تأتي بالمرتبة الثانية بعد طريقة التقليص .

5-2 التوصيات :

1- يوصي الباحث باستخدام طريقة التقليص لتقدير معلمات التوزيع لأنها اعطت سرعة عالية في تقدير النتائج وكذلك اقل متوسط مربعات خطأ.

2- يوصي الباحث باستخدام طرق اخرى لتقدير معلمات التوزيع غير مستخدمة في هذا البحث مثل طريقة بيز.

3- يوصي الباحث باستعمال المحاكاة للمقارنة بين الطرائق باختلاف احجام العينات .

**6 - المصادر** :


1- عبد الله ، ثائرة نجم ، 2018 . "**تقدير معلمة المقياس لتوزيع ليندلي - دراسة مقارنة لتحليل وقت الانتظار** ".*كلية الرافدين الجامعية للعلوم*.(43)

2- Al-Moisheer, A. S., Daghestani, A. F., & Sultan, K. S. (2021), "**Mixture of two one-parameter Lindley distributions: properties and estimation**", *Journal of Statistical Theory and Practice*, *15*(1), 1-21.

3- Chichan, A. M. A. (2020), "**Estimate the parameters of the Generalized Goel-okumoto model using the Maximum likelihood and the shrinkage methods**", *Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences*, *16*(52 part 3).

4- Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008), "**Lindley distribution and its application. *Mathematics and computers in simulation***", *78*(4), 493-506.

5- Hansen,L.P.(1982),"**Large sample properties of generalized method of moments estimators**",*Econometrica: Journal of the econometric society*, 1029-1054.

6- Khan, A. H., & Jan, T. R. (2015), "**Estimation of stress-strength reliability model using finite mixture of two parameter Lindley distributions**", *Journal of Statistics Applications and Probability*, *4*(1), 147-159.

7- Mazucheli, J., & Achcar, J. A. (2011). "**The Lindley distribution applied to competing risks lifetime data**", *Computer methods and programs in biomedicine*, *104*(2), 188-192.

8- Shanker, R., Sharma, S., & Shanker, R. (2013), "**A two-parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data**". *Applied Mathematics*, *4*, 363-368

9- Titterington DM, Smith AFM, Makov UE (1985)," **Statistical analysis of finitee mixture distribution**", John Wiley & Sons, Chichester.

10- Zakerzadeh, H., & Dolati, A. (2009), "**Generalized Lindley Distribution**", *Journal of Mathematical Extension*, *3*(2), 1-17.


**Estimation of Parameters of a Mixed Lindley Distribution with Practical Application**


**Abstract:**

. In this research, we will study the mixed Lindley distribution (with three parameters) with the properties of this distribution, where the parameters of this distribution will be estimated by three methods namely (maximum likelihood method, generalized method of moments estimation , shrinkage method) and the application of these methods to real data about waiting passengers to obtain a visa the visa from the Turkish embassy, as the mean squares of error was used to compare between these methods, and the results showed that the best way to estimate the parameters of the mixed Lindley distribution is the shrinkage method.

**Key word :** Mixed Lindley distribution, Maximum Likelihood Method, Generalized Method of Moments Estimation , Shrinkage Method, Mean squares of errors (MSE).