ISSN (1681- 6870)

استخدام التحليل اللامعلمي لتقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل

أ. د. حامد سعد نور الشمرتي [1]
[1] كلية إدارة الأعمال – جامعة البيان، بغداد، العراق

م. م. رائد فاضل محمد الحسني [2]
[2] كلية الإدارة والاقتصاد - الجامعة المستنصرية، بغداد، العراق

المستخلص

مع التزايد الواسع في الصناعة وازدياد التعقيدات الميكانيكية والإليكترونية ازداد الاهتمام بدراسة المعولية وطرائق تقديرها ومنها الطرائق اللامعلمية، لذلك فأن هذا البحث يهدف الى تقدير معولية النظام المعقد المكون من عدد كبير من المكونات بطريقه لامعلمية من مصفوفة الاحتمالات الانتقالية. إذ تم استعمال التحليل العنقودي لتقدير مصفوفة الاحتمالات الانتقالية للعملية التصادفية التي تمثل النظام المعقد المدروس ثم إيجاد التوزيع المستقر لهذه المصفوفة وبعدها يتم حساب معولية النظام المعقد.

تم استعمال أسلوب المحاكاة لتوليد البيانات ثم تقدير دالة معولية النظام بالطرائق المعلمية (طريقة العزوم، طريقة الإمكان الأعظم) والطرائق اللامعلمية (الطريقة التجريبية، التحليل اللامعلمي)، وعند المقارنة بين هذه الطرائق المختلفة باستعمال متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) أظهرت مقدرات دالة المعولية لتوزيع ويبل بأسلوب التحليل اللامعلمي كفاءتها مقارنةً بالطرائق الأخرى المختارة في حالة العينات الصغيرة، كما أظهرت طريقة الإمكان الأعظم (MLE) كفاءتها في تقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل في حالة العينات الكبيرة.

الكلمات المفتاحية: الأنظمة المعقدة، التحليل اللامعلمي، العمليات العشوائية

Using Nonparametric Analysis to Estimate the Reliability Function for Weibull Distribution

Prof. Dr. Hamed Saad Noor Al-Shamarti
Al-Bayan University / College of Business Administration / Iraq.
hamed.saad@albayan.edu.iq

Raed Fadel Mohamed Al-Hassani
Mustansiriyah University / College of Administration and Economics / Iraq.
raad@uomustansiriyah.edu.iq

Abstract:

With a wide increasing in industry and increasing mechanical and electronic complexities, increased attention to the study of reliability and methods of estimations, including non-parametric methods. The paper aims to estimate the reliability of the complex system that contains a large number of components by non-parametric method from transitions probability matrix that is estimated using stochastic processes. We used clustering analysis to estimate the transitions probability matrix of the stochastic processes, which is a representation of the study complex system, then find the equilibrium distribution of the process and from it, we can calculate the reliability of the system.

By using simulation, we generated a data to estimates reliability function via parametric methods (method of moments, maximum likelihood methods) and non-parametric methods (empirical method, non-parametric analyze), when comparison between these methods by using IMSE, shown the estimators of Weibull reliability function using non-parametric analyze better than another selected methods, in case of small samples.

Keywords: **Complex System; Non-parametric analysis; Stochastic Processes.**

ISSN (1681- 6870)

1. المقدمة: Introduction

بعد الانتشار الواسع للصناعة وازدياد التعقيدات الميكانيكية، الكهربائية والإلكترونية في المعدات ازداد الاهتمام بالمعولية إذ تتعامل نظرية المعولية (Reliability Theory) مع أعمار الأنظمة والمُعدات والمكائن ونظرية البقاء (Survival Theory) كما تتعامل مع احتمالات البقاء ومتوسط عمر الحياة واحتمال أن يكون عمر الخلية أو الكائن الحي أكبر من زمن معين وهما يشتركان في قياس طول عمر الحياة سواء أكان للماكينة أو للكائن الحي. فمن خلال معرفة معولية أي جهاز أو نظام يمكن تقييم أداء وكفاءة ذلك النظام وتحديد ألمدة الزمنية لأوقات العمل، إذ يمكن وضع جداول زمنية لمدة التشغيل والصيانة والاستبدال التي يجب أن تخضع لها المكائن وذلك من أجل رفع مستوى أداء هذه الأنظمة وكفاءتها. ويمكن حساب معولية أي نظام بسيط باستعمال الطرائق المعلمية التحليلية المتعارف عليها، لكن مع كبر حجم النظام وزيادة تعقيده تصبح الطرائق التحليلية غير مجدية لتقدير معولية هذه الأنظمة المعقدة والكبيرة، وكما هو معروف أن معظم أنظمة الاتصالات والطاقة والأنظمة الإلكترونية والميكانيكية وغيرها من الأنظمة الموجودة في مختلف مجالات الحياة هي أنظمة معقدة، لذلك يتم استعمال الطرائق اللامعلمية لحساب معولية هذه الأنظمة.

في هذا البحث تم تقدير معولية النظام المكون من عدد كبير من المكونات بطريقه لامعلمية من خلال تقدير مصفوفة الاحتمالات الانتقالية، وذلك بتوظيف أسلوبي العمليات التصادفية والتحليل العنقودي اللامعلمي، إذ تعد الطرائق اللامعلمية من اهم الطرائق الإحصائية الاستدلالية التي لا يتطلب استعمالها أية افتراضات أو معلومات حول خصائص التوزيع للمجتمع، كما يمكن التوصل إلى استنتاجات بشأن المجتمع في ضوء العينة بغض النظر عن نوع التوزيع النظري لذلك المجتمع أو الطريقة المستعملة في اختيار العينة.

2. مفهوم المعولية: Reliability Concept

يشير مصلح المعولية إلى الوثوق بالشيء والاعتماد عليه، وهي احتمال إن يؤدي النظام أو أحد مكوناته وظيفته المطلوبة لمده من الزمن عند الاستعمال تحت ظروف تشغيلية ملائمة، وهي بذلك تمثل احتمال عدم الفشل لمده من الزمن ويمكن أن تعرف المعولية بالاعتماد على الزمن أو أي مقياس أخر مثلاً لكل كيلو متر أو لكل عدد من الوحدات أو لكل دفعة إنتاج أو غيرها. وتُعرف دالة المعولية رياضياً كالآتي:

$$R(t) = p_r\,(T > t) \qquad (1)$$

إذ يمثل المتغير العشوائي (T) المدة الزمنية اللازمة لحدوث الفشل، أو وقت الاشتغال حتى حدوث الفشل. ولغرض إيجاد علاقة بين الدالة الاحتمالية ودالة المعولية نفرض إن الزمن (T) للنظام يتوزع حسب دالة التوزيع التجميعية $F(t)$، وبما أن: [5]

$$R(t) = p_r\,(T > t) = 1 - p_r\,(T \le t)$$

$$R(t) = 1 - F(t) \qquad (2)$$

حيث إن دالة المعولية $R(t)$ هي دالة موجبة ومستمرة ومتناقصة لجميع قيم (t) ضمن المدة $[0, t]$، أي أن قيمها تقع بين الصفر والواحد. إن السلوك العشوائي لمفردة معينة يسمى بدالة التكرار أو دالة الكثافة للفشل ويرمز لها بالرمز $f(t)$ وهذه الدالة معرفة على خط الأعداد الحقيقية الموجبة. ويمكن تعريف هذه الدالة أيضا بانها احتمال فشل المفردة خلال المدة $\{t < T < t + \Delta t\}$ بغض النظر عن صغر المدة Δt ويمكن التعبير عنها بالصيغة التالية:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr\{t < T < t + \Delta t\}}{\Delta t} \quad ; \quad t \ge 0 \qquad (3)$$

ISSN (1681- 6870)
وقائع المؤتمر العلمي الخامس عشر والدولي الثاني للتطبيقات الإحصائية - الجمعية العراقية للعلوم الإحصائية

وان دالة التوزيع التراكمي (.C.D.F) هي:

$$F(t) = \Pr(T \leq t) = \int_0^t f(u)\,du \quad ; \; t \geq 0 \qquad (4) \;\; [9]$$

3. معولية النظم: Systems Reliability

يعرف النظام بأنه مجموعة من العناصر المرتبطة بصورة مباشرة أو غير مباشرة. وتكمن أهمية معولية الأنظمة من خلال اهتمامها بالعلاقات الداخلية فيما بين معولية المُعدة (المفردة) الواحدة وأخرى داخل نظام معين وتأثير هذه العلاقات على معولية النظام إذ من الضروري معرفه نمط سلوك المعدات داخل النظام ومن ثم تأثيرها الاحتمالي في سلوك هذا النظام. **[1]**

1.3. النظام المتسلسل (المتوالي): Sequential System

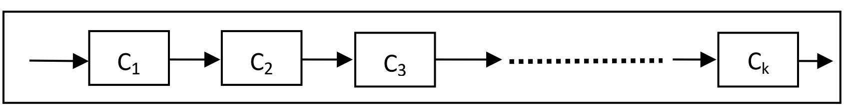
أن ارتباط مجموعة من المركبات لنظام معين بشكل مستقيم ومتوالي الواحدة بعد الأخرى يسمى (النظام المتسلسل) وبذلك فأن عامل مركبات النظام (Component System) بهذا الشكل يجعل من فشل احدى مركبات النظام فشل لجميع وحدات النظام ككل. ويمكن التعبير عن دالة هيكلية النظام بالصيغة التالية:

$$\phi(x) = x_1.x_2 \dots \dots x_n = \begin{cases} 1 & x_1 = 1, x_2 = 1, \dots x_n = 1 \\ 0 & at\ least\ one \quad x_i = 0 \end{cases}$$

أما دالة المعولية لنظام الربط المتسلسل فتكون بالصيغة الأتية:

$$R_{ss}(t) = R_1(t).R_2(t) \dots \dots R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \qquad (5)$$

ويوضح الشكل (1) التالي مخطط النظام المتسلسل: **[5]**



شكل (1): مخطط النظام المتسلسل

ISSN (1681- 6870)

2.3. النظام المتوازي: Parallel system

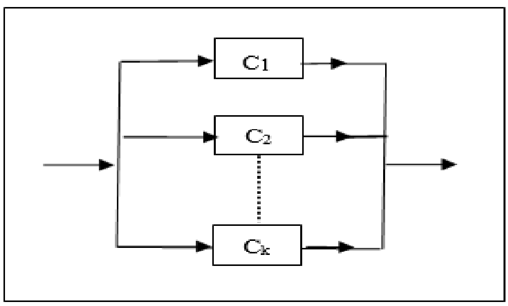
أن ارتباط مجموعة من المركبات لنظام معين بشكل متوازي الواحدة جوار الأخرى بحيث يبقى النظام عاملاً إذا كانت على الأقل مركبة واحدة تعمل. أن دالة هيكلية النظام المتوازي يمكن التعبير عنها بالصيغة التالية:

$$\phi(x_1.x_2\dots\dots x_n)=\begin{cases}1\ , & at\ least\ one\ of\quad x_i=1,\qquad i=1,2,\dots n\\ \\ 0\ , & x_1=0,x_2=0,\dots\dots\qquad x_n=0\end{cases}$$

أما دالة المعولية لنظام الربط المتوازي فتكون بالصيغة الأتية:

$$R_{sp}(t)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-R_i(t)] \qquad (6)$$

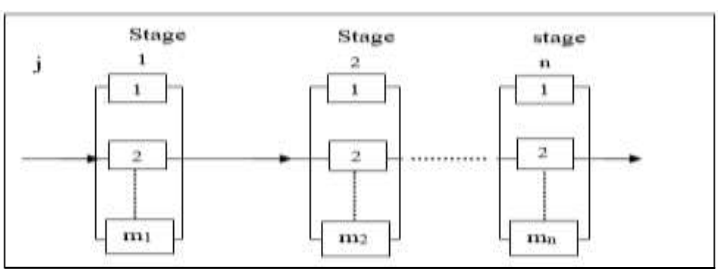
ويوضح الشكل (2) التالي مخطط النظام المتوازي: **[1]**



شكل (2): مخطط النظام المتوازي

3.3. النظام المصاحب (الفائض): Redundant System

النظام الفائض هو ذلك النظام الذي يتكون من مجموعة من العناصر (الوحدات). وأن فشل واحدة منها لا يؤدي الى فشل النظام، لذلك فأن النظام المتوازي نوع خاص من النظام الفائض، وكما موضح في الشكل (3) التالي:



شكل (3): مخطط النظام الفائض

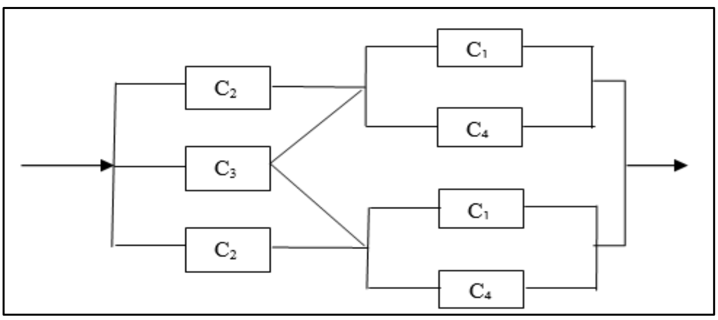
ISSN (1681- 6870)

$$R_s = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \left(1 - R_j\right)^{m_j} \right] \qquad (7)$$

حيث تمثل m_j عدد المركبات المتماثلة والمستقلة المربوطة على التوازي (عدد الوحدات في المرحلة j). **[5]**

4.3. النظام المعقد: Complex System

هو ذلك النظام الذي يشمل عدداً كبيراً من المركبات المرتبطة مع بعضها البعض على نحو معقد ويمتاز هذا النوع من الأنظمة بصعوبة حساب معوليتهِ ولاسيما عندما يتزايد تعقيد المنظومة. يتكون النظام المعقد من مجموعة من الكتل المرتبة (المنظمة) وكل واحدة منها قد تمثل تركيب أساسي من (المتسلسل والمتوازي)، والشكل (4) التالي يوضح ذلك. **[8]**



شكل (4) مخطط النظام المعقد

4. العمليات التصادفية: Stochastic Processes

تعرف العملية التصادفية رياضياً بأنها سلسلة من المتغيرات العشوائية مؤشرة بالدليل t الذي يعود للمجموعة الدليلية T وتكتب بشكل $\{X(w,t);\ t \in T\}$، إذ تمثل X(t) الحالة التي تقع فيها العملية أو متغير الاستجابة (response variable) عند المعلمة t. لذلك، فأن البنية التركيبية للعملية التصادفية ذات طبيعة ليست يسيرة للتعامل معها، من هنا ظهرت أسباب موجبة لافتراضات نظرية لكي يسهل التعامل مع مثل هذه العمليات. ومن أشهر الافتراضات بهذا الخصوص هو فرض الاستقرارية (stationarity) والذي من خلاله نفترض أن خصائص العملية التصادفية لا تتغير بتغير الدليل t. **[2]**
وتكون العملية التصادفية مستقرة تامة (strictly stationarity stochastic process) إذا كان التوزيع الاحتمالي المشترك (the joint probability distribution) للمتغيرات $X(t_1), X(t_2),\dots,X(t_n)$ مكافئاً للتوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات $X(t_1+k), X(t_2+k),\dots,X(t_n+k)$ ، لأي إزاحة k، ولاي نقاط زمنية $t_1,t_2,\dots,t_n$. هذه الصفة تعني أن الهيكل الاحتمالي للعملية المستقرة التامة يكون ثابتاً تحت التغير في الزمن t، أما العمليات التصادفية التي تتغير خصائصها عبر الزمن t، أو الأنظمة التي تنشأ وتتطور مع الزمن والتي لا تمتلك خاصية الاستقرارية، فتسمى بالعمليات التطويرية (evolutionary processes) أو العمليات غير المستقرة (non stationarity processes). وهناك صفتين مميزتين ضروريتين للعملية التصادفية هما فضاء الحالة (state space) وفضاء المعلمة (parameter space)، وتُعرّف الحالة للعملية التصادفية $\{X(w,t)\}$ بأنها اقل مجموعة من المعلومات عن الحاضر والماضي بحيث يمكن وصف السلوك المستقبلي للنظام من خلال معرفة الحالة الحالية والإدخال المستقبلي، فهي تحوي معلومات تاريخية كاملة عنه ولا

ISSN (1681- 6870)

يُشترط إمكانية قياسها مباشرة أو أن يكون لها معنى فيزيائي. أن العملية التصادفية عند أي نقطة زمنية تكون في حالة معينة تُعرف بقيمة متغير الاستجابة $\{X(w,t)\}$ المشاهد عند تلك النقطة الزمنية (t) والمجموعة التي تضم جميع الحالات الممكنة للعملية التصادفية تسمى بفضاء الحالة (state space). **[3]**

أن العملية التصادفية $\{X(t); t\in T\}$ تتكون من مجموعة مشاهدات ومتغيرات تتغير بتغير دليل معين كالزمن أو أي دليل آخر، وهذا الدليل يسمى عادة بالمعلمة، والتي يرمز لها بالرمز t، والذي تقع قيمة في مجموعة معينة يطلق عليها فضاء المعلمة (parameter space) ويرمز لها عادة بالرمز T.

أن العمليات التصادفية التي تمثل مجموعة مشاهدات من أنظمة تحقق الشرط (أن حالة الظاهرة في المستقبل تعتمد على حالتها في الحاضر فقط ولا تعتمد على حالتها في الماضي، ومستقلة عنها) تسمى بعمليات ماركوف (Markov processes). إذ يقال عن العملية التصادفية ذات المعلمة المستمرة $\{X(t),\ t\geq 0\}$ بأنها عملية ماركوف إذا حققت الخاصية الآتية:

$$P\{X_{(t+1)} = j|X_{(t)} = i, X_{(t-1)} = i_{t-1},\dots, X_{(t_o)} = i_o\} = P\{X_{(t+1)} = j|X_{(t)} = i\} \qquad (8)$$

أي أن التوزيع الشرطي (conditional distribution) للمتغير $X_{(t+1)}$ معطى جميع قيمه الماضية والحاضرة تعتمد فقط على القيمة الحالية منه $X_{(t)}$ ولا تعتمد على أية قيمة أخرى من الماضي. وتعرف هذه الخاصية بخاصية ماركوف (markov property)، وتسمى عمليات ماركوف في الحالة التي يكون فيها فضاء الحالة المتقطع وفضاء المعلمة المتقطع بسلسلة ماركوف (markov chain) وهي عبارة عن عملية عشوائية متقطعة الزمن يتميز كل متغير عشوائي (X_t) فيها بارتباطه بالمتغير السابق له مباشرة (X_{t-1}) وبتأثيره على المتغير اللاحق (X_{t+1}) فقط. **[2]**

1.4. الاحتمالات الانتقالية: Transition Probabilities

تصف الاحتمالات الانتقالية (transition probabilities) الانتقال لسلسلة ماركوف من حالة إلى حالة أخرى خلال مدة زمنية معينة، ويرمز للاحتمالية الانتقالية من الحالة i عند أي لحظة زمنية t بغض النظر عن الحالة السابقة للحالة i (التاريخ المسبق) إلى الحالة j عند الزمن t+1 (أي بعد خطوة واحدة) بالرمز P_{ij} ويمكن التعبير عنه بالصيغة الأتية:

$$P_{ij} = P\{X_{t+1} = j|X_t = i\} \qquad (9)$$

لجميع قيم $i,j\in I$ حيث أن I هي مجموعة الأعداد الصحيحة. وبصورة عامة فان احتمالات الانتقال من حالة إلى حالة أخرى تعتمد على الزمن t، لذا فهي غير مستقرة، أما إذا لم تعتمد الاحتمالات الانتقالية على الزمن t فتسمى عندئذ بالاحتمالات الانتقالية المستقرة، والتي يعتمد تحقيقها على معلمات النظام الاحتمالي، وتوضع الاحتمالات الانتقالية في مصفوفة مربعة ذات الأبعاد $n\times n$ تسمى بمصفوفة الاحتمالات الانتقالية (transition probabilities matrix) والتي يمكن تمثيلها كالاتي:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & & & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

أن كل عنصر من عناصر (P_{ij}) يُعبر عن احتمال انتقال الظاهرة من الحالة i إلى الحالة j خلال وحدة زمنية واحدة (خطوة واحدة). ويمكن تعميم هذه الحالة، فعند إيجاد انتقال الظاهرة من الحالة i إلى الحالة j بعدد من الخطوات أو

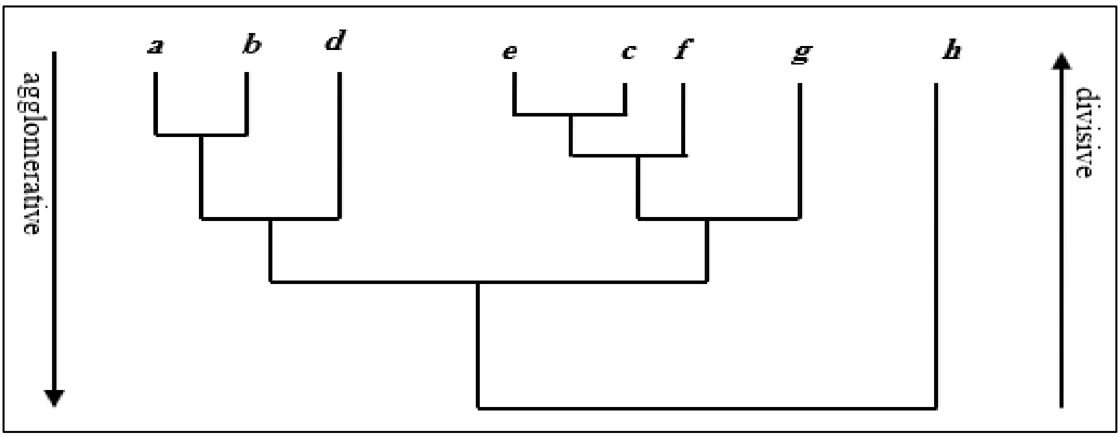
ISSN (1681- 6870)

الوحدات الزمنية، لتكن k، فان رمز مصفوفة الانتقال هو $P^{(k)}$. ويمكن تقدير الاحتمالات الانتقالية (P_{ij}) باستخدام عدة طرق منها طريقة الإمكان الأعظم (ML) وطريقة العزوم (MOM). [4]

5. التحليل العنقودي: Cluster Analyze

طريقة أنموذجية لتجميع نقاط البيانات ضمن مجموعات، إذ يتم تقسيم مجموعة البيانات الى عدد من المجاميع الجزئية أو العناقيد بالاعتماد على تشابه العناصر، حيث تملك العناصر داخل العنقود الواحد درجة عالية من التشابه، ويعرف العنقود بأنه مجموعة من العناصر المتشابهة مع بعضها بينما تكون العناصر في العناقيد الأخرى غير متشابهة. ويتضمن أسلوب التحليل العنقودي عدة خطوات محددة منها تحديد المسافة الملائمة بين العناصر بالاعتماد على خواص ملائمة. [1]

أن الشكل الهرمي للعناقيد الذي يتم الحصول عليه من عملية العنقدة يسمى بالمخطط الشجري (dendrogram) حيث يصف عملية ارتباط العناقيد بعضها مع بعض من خلال سلسلة متداخلة من الجزيئيات بإدماج العناقيد الصغيرة بصورة متكررة الى عناقيد أكبر (العنقدة الهرمية التجميعية)، أو بفصل عناقيد كبيرة الى عناقيد أصغر (العنقدة الهرمية التقسيمية)، وكما مبين في الشكل (5) التالي:



شكل (5) المخطط الشجري الهرمي للعناصر (a,b,c,d,e,f,g,h).

أن الأساليب الهرمية لا تفترض أي عدد محدد من العناقيد وبذلك يمكن الحصول على العدد المقبول من العناقيد بقطع المخطط الشجري عند مستوى معين، ولا يكون المخطط الشجري للعنقدة الهرمية وحيد، حيث أن هناك $2^{(n-1)}$ من المخططات الشجرية المختلفة التي يمكن أجراءها. [7]

ISSN (1681- 6870)

1.5. طريقة عنقدة المتوسطات - K: K – Means Clustering Method

لنفرض أن $X = \{x_{i,p}\}$ تمثل مصفوفة البيانات التي يتم تصنيفها الى k من العناقيد، وهذه العناقيد تمثل الموجهات ذات الأبعاد $(nx1)$ يمكن اختيارها عشوائياً من عناصر البيانات الكلية أو تمثل أول العينات k. ويتم تثبيت معيار التوقف $\in$ (termination tolerance) لطريقة العنقدة مثلاً 0.01 و0.001 وهكذا. ويمكن تلخيص طريقة عنقدة المتوسطات – k بالخطوات التالية:

1. يتم توليد مصفوفة التجزئة $U = \{u_{ij}\}$ لكل $(j = 1, \ldots, n, i = 1,2, \ldots, k)$ توليداً قياسياً منتظماً.
2. يتم اختيار مراكز العناقيد $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ بحيث أن:
   i) كل عنقود يحدد بواسطة المركز المتوسط (centroid).
   ii) عدد المراكز يكون مساوي الى عدد العناقيد النهائية.
3. تعيين عناصر البيانات الى أقرب مركز متوسط (أو أقرب جوار) باستعمال مقياس المسافة الملائم، ثم إعادة حساب المراكز لكل عنقود، ويتم تحديد مراكز العناقيد الجديدة بحساب معدل عناصر البيانات في كل عنقود.
4. إعادة تحديد أعضاء العنقود $U = [u_{ij}]$ لتصغير مربع الخطأ بين عناصر البيانات ومراكز العناقيد الحالية.
5. إعادة تكرار الخطوات السابقة حتى الوصول الى التقارب المتمثل بحالة عدم التغير في مراكز العناقيد بمعنى إذا تحقق:

$$C_i^{(l+1)} = C_i^{(l)}; \forall i = 1, \ldots, k \qquad (10) \quad [6]$$

6. توزيع ويبل: Weibull Distribution

أحد التوزيعات المستمرة، ومن أشهر عوائل توزيعات الفشل، يستعمل لوصف التنوع في حالات الفشل وفي وصف فشل بعض الأجهزة الكهربائية كالصمامات المفرغة. تطبيقاته واسعة في حقل المعولية واختبارات الحياة محور اهتمام العديد من الباحثين في هذا المجال، ويمكن التعبير عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل ذي المعلمتين بالصيغة التالية:

$$f_t(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\, t^{\alpha-1} \quad \exp(-\frac{t^{\alpha}}{\beta}) & t \geq 0,, \beta > 0 \\ 0 & \text{O.W} \end{cases} \qquad (11)$$

حيث أن t متغير عشوائي يمثل الزمن لحدوث الفشل، أما دالة التوزيع التجميعية فتكون بالصيغة التالية:

$$F_t(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(u)du = 1\text{-exp}\left(-\frac{t^{\alpha}}{\beta}\right) \qquad (12)$$

إذ أن: $\beta > 0$: تمثل معلمة القياس (scale parameter).

$\alpha > 0$: تمثل معلمة الشكل (shape parameter).

كما يمكن التعبير عن متوسط وتباين لتوزيع ويبل في الصيغ الأتية:

$$\mu = \beta^{\frac{1}{\alpha}}\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \qquad (13)$$

ISSN (1681- 6870)

$$\sigma^2 = \beta^{\frac{2}{\alpha}}\{\Gamma(1 + 2/\alpha) - [\Gamma(1 + 1/\alpha)]^2\} \qquad (14)$$

وتجدر الإشارة الى انه إذا كانت $\alpha = 1$ فان توزيع ويبل يتحول الى التوزيع الأسي، وعندما $\alpha = 2$ فأن توزيع ويبل يتحول الى توزيع رالي. [10] [5]

7. طرق التقدير المعلمية: Parametric Methods of Estimation

1.7. طريقة الإمكان الأعظم: Maximum Likelihood

تعتبر هذه الطريقة من الطرق المهمة في التقدير لأنها تحتوي على خصائص جيدة كثيرة، ويمكن تعريف التقدير بهذه الطريقة بانه قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى، كما يمكن التعبير عن دالة الإمكان (L) بالصيغة التالية:

$$L = f(t_1,\theta).f(t_2,\theta)\ldots f(t_n,\theta) = = \prod_{i=1}^{n} f(t_i,\theta) \qquad (15)$$

ويمكن التعبير عن دالة الإمكان لدالة توزيع ويبل بالصيغة التالية:

$$L(t_1,t_2,\ldots,t_n,\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha}{\beta}\ t_i^{\alpha-1}\ e^{-\frac{t_i^\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha^n}{\beta^n}\ e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^\alpha}{\beta}}\prod_{i=1}^{n} t_i^{\alpha-1} \qquad (16)$$

أما مقدر دالة المعولية فيمكن التعبير عنه بالصيغة التالية: [7]

$$\hat{R}_{mL}(t) = \exp(-\frac{t^{\hat{\alpha}_{mL}}}{\hat{\beta}_{mL}}) \qquad (17)$$

2.7. طريقة العزوم: Method of Moments

طريقة شائعة الاستخدام في حقل تقدير المعلمات، حيث أنها تتصف بسهولتها، وتعتمد على مساواة عزم المجتمع μ_k المقدر مع عزم العينة m_k وإيجاد صيغة تقديرية للمعلمات (لأنها لا تتصف بخاصية الثبات Invariant). ويمكن التعبير عن العزم (k) لتوزيع ويبل بالصيغة التالية:

$$\mu'_k = (\beta)^{\frac{k}{\alpha}}\Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) \qquad (18)$$

ويمكن الحصول على المتوسط والتباين لتوزيع ويبل من العزمين الأول والثاني، إذ أن العزم الأول يمثل المتوسط:

$$\mu = \mu'_1 \qquad (19)$$

أما التباين فيمكن الحصول عليه كما يلي:

$$\sigma^2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = \beta^{\frac{2}{\alpha}}\left\{\Gamma(1 + 2/\alpha) - [\Gamma(1 + 1/\alpha)]^2\right\}$$

أما مقدر دالة المعولية فيمكن التعبير عنه بالصيغة التالية:

ISSN (1681- 6870)

$$\widehat{R}_{mom}(t) = \exp(-\frac{t^{\widehat{\alpha}_{mom}}}{\widehat{\beta}_{mom}}) \qquad (20) \quad [6]$$

8. طرق التقدير اللامعلمية: Non- parametric Methods of Estimation

1.8. الطريقة التجريبية: Empirical Method

في هذه الطريقة يتم تقدير دالة توزيع الفشل ودالة المعولية من خلال أوقات الفشل، فاذا كانت ($t_0, t_1, t_2, ..., t_n$) تمثل أوقات فشل عينة عشوائية، وان عدد الوحدات الباقية في الزمن t_i هو (n-i). فأن تقدير صيغة دالة المعولية بالاعتماد على تقدير الدالة التراكمية لتوزيع الفشل يكون بالصيغة التالية:

$$\hat{R}(t_i) = 1.-.\frac{i}{n+1} = \frac{n+1-i}{n+1}$$

$$\hat{F}(t_i) = 1.-.\hat{R}(t_i) = \frac{i}{n+1} \qquad (21)$$

وبالاعتماد على دالة الكثافة التراكمية المتماثلة تكون الصيغة كما يلي:

$$\hat{R}(t_i) = 1 - \frac{i-0.5}{n} \qquad (22) \quad [8]$$

2.8. التحليل اللامعلمي: Non- parametric Analyze (NPA)

تم توظيف أسلوبي التحليل العنقودي والعمليات التصادفية لتقدير معولية النظام المعقد الذي يحتوي على عدد كبير من المكونات. إذ استخدم التحليل العنقودي لتصنيف مكونات النظام المعقد (مثل معدلات الفشل، درجة الحرارة، عدد مرات الصيانة، وغيرها) في عناقيد تمثل حالات النظام، ثم تعاد عملية جمع البيانات والتصنيف مرة أخرى بعد مدة زمنية. أن انتقال المكونات بين العناقيد هي انتقالات بين حالات النظام، وبذلك يمكن تقدير مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لهذه العملية التصادفية التي تمثل النظام المدروس ومن ثم حساب التوزيع المستقر لها، وبالتالي حساب معولية النظام المعقد من التوزيع المستقر.

لبناء أنموذج سلسلة ماركوف نجد أولا عدد تكرارات الانتقال للمكونات في التصنيف بين حالات النظام من خلال حساب عدد الانتقالات من الحالة (i) الى الحالة (j) في خطوة واحدة، ثم يتم بناء مصفوفة الانتقالات ذات الخطوة الواحدة والتي يمكن التعبير عنها كما يلي: [6]

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1m} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nm} \end{pmatrix} \qquad (23)$$

$$i = 1,2,\dots,n \, , j = 1,2,\dots,m$$

من المصفوفة F يمكن تقدير مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P لكل صف بقسمة كل عنصر في الصف على مجموع الصف، بالتالي فان مصفوفة الاحتمالات الانتقالية تكون كما يلي:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix} \qquad (24)$$

أن التوزيع المستقر (Equilibrium distribution) لسلسلة ماركوف يمكن إيجاده إذا كان تصنيف جميع حالات السلسلة هي (ذات عودة موجبة، وغير دورية)، أي أن السلسلة تمتلك خاصية الثبوتية (ergodic). فاذا كان لدينا متجه التوزيع الأولي لنظام مكون من ثلاث حالات الاتي:

$$X^{(0)} = (1 \quad 0 \quad 0)^T$$
$$X^{(1)} = P_{ij}\, X^{(0)}$$
$$X^{(2)} = P_{ij}\, X^{(1)}$$
$$X^{(3)} = P_{ij}\, X^{(2)}$$
$$\lim X^{(n)} = A$$

فأن مصفوفة التوزيع المستقر التي نحصل عليها يمكن تمثيلها بمتجه التوزيع المستقر (A) كما يلي:

$$A = (A_1 \quad A_2 \quad A_3)$$

حيث تمثل A_1 احتمال أن النظام في الحالة الأولى (يعمل) وA_2 احتمال أن النظام في الحالة الثانية (عطل بسيط) و A_3 احتمال أن النظام في الحالة الثالثة (عطل تام)، وان معولية النظام المعقد R تكون بالصيغة التالية: [9]

$$R = A_1 + A_2 \qquad (25)$$

أن المقارنة بين نتائج الطرق اللامعلمية المستخدمة في هذه الدراسة، تتم باستخدام المقياس متوسط مربعات الخطأ التكاملي (integral mean square error) ويشار اليه اختصاراً بالرمز (IMSE)، وصيغة هذا المقياس كالاتي:

$$\mathrm{IMSE}\left(\hat{R}(t)\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\{\frac{1}{n_t}\sum_{J=1}^{n_t}\left(\hat{R}i(t_J) - R(t_J)\right)^2\right\} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\mathrm{MSE}(\hat{R}(t_i)) \qquad (26)$$

$J = 1, 2, \ldots, n$

حيث يمثل الرمز $\hat{R}(t)$ المقدر حسب الأسلوب المستخدم في التقدير، وتمثل L عدد مرات تكرار التجربة، وتمثل n_t حدود المتغير (t_i). ويمكن استخدام مقياس متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين الطرق المعلمية والطرق اللامعلمية المستخدمة في هذه الدراسة. [7]

9. وصف تجربة المحاكاة وتحليل النتائج: Simulation & Analyze Results

تعرف المحاكاة بانها عملية تقليد ووصف الواقع الحقيقي للعمليات المعقدة الفهم باستعمال نماذج معينة، إذ يحقق فهم الأنموذج قدراً من الأدراك للواقع الحقيقي من خلال محاكاة الأنموذج، وتعتمد درجة المشابهة بين أي تجربة محاكاة والواقع الحقيقي على مدى مطابقة أنموذج المحاكاة للنظام الحقيقي. أن أول مراحل استعمال أسلوب المحاكاة هو توليد مجموعة من المتغيرات العشوائية، كما يتم سحب عينات بأحجام مختلفة من المجتمع الافتراضي الممثل للظاهرة المدروسة، وتكرر هذه العملية مرات كثيرة بدلا من أن تسحب من المجتمع الحقيقي.

في هذه التجربة تم توليد عينات بحجم (25، 50، 75، 100)، أما بالنسبة لمعلمات توزيع ويبل فكانت $(\alpha = 1, 1.5, 2)$ و $(\beta = 1.5, 2, 2.5)$. أما تكرار هذه العملية فكان مساوياً الى (L=1000) وذلك للحصول على درجة عالية من التجانس. تم استخدام لغة البرمجة الإحصائية R لأجراء تجربة المحاكاة وتقدير دوال معولية النظام المعقد وذلك للحصول على أفضل طريقة من بين الطرائق المعلمية واللامعلمية وللنماذج حسب المعلمات التي تم اختيارها سابقا وكما موضح في الجدول الاتي:

ISSN (1681- 6870)

جدول (1) : النماذج حسب المعلمات (α, β)

MODELS	n	α	β	Methods			
				MLE	MOM	EMP	NPA
A	25	1	1.5	0.0062	730.00	20.002	60.002
	50	1	1.5	0.0063	300.00	0.0038	0.0034
	75	1	1.5	70.001	0.0025	0.0018	0.0022
	100	1	1.5	150.00	230.00	170.00	200.00
B	25	1	2	0.0072	0.0061	0.0034	0.0031
	50	1	2	0.0042	0.0045	20.003	60.003
	75	1	2	0.0020	0.0038	0.0025	0.0028
	100	1	2	0.0013	0.0024	0.0021	0.0020
C	25	1	2.5	0.0031	0.0044	0.0022	0.0017
	50	1	2.5	0.0050	0.0063	380.00	400.00
	75	1	2.5	0.0021	70.002	0.0034	0.0042
	100	1	2.5	0.0013	50.002	00.002	160.00
D	25	1.5	1.5	1080.0	0200.0	360.00	0.0023
	50	1.5	1.5	0.0033	0.0042	0.0033	0.0029
	75	1.5	1.5	0.0019	0.0038	0.0027	0.0023
	100	1.5	1.5	310.00	0150.0	910.00	210.00
E	25	1.5	2	0.0061	00480.	0.0051	00650.
	50	1.5	2	650.00	0.0061	760.00	470.00
	75	1.5	2	30.005	440.00	500.00	450.00
	100	1.5	2	300.00	350.00	350.00	340.00
F	25	1.5	2.5	0.0067	0.0063	0.0053	0.0050
	50	1.5	2.5	0.0045	0.0059	370.00	410.00
	75	1.5	2.5	0.0034	0.0041	70.003	0.0039
	100	1.5	2.5	290.00	380.00	330.00	380.00
G	25	2	1.5	0.0079	0.0085	0.0077	0.0074
	50	2	1.5	0.0068	450.00	0.0061	880.00
	75	2	1.5	440.00	0470.0	0600.0	620.00
	100	2	1.5	370.00	410.00	550.00	750.00

H	25	2	2	0.0059	0.0077	530.00	520.00
	50	2	2	740.00	0.0071	410.00	450.00
	75	2	2	20.003	0.0044	00.004	90.003
	100	2	2	030.00	140.00	630.00	330.00
I	25	2	2.5	0.0041	780.00	0.0038	70.003
	50	2	2.5	0.0039	0.0073	320.00	360.00
	75	2	2.5	00.003	0.0042	320.00	00340.
	100	2	2.5	280.00	240.00	290.00	320.00

وكانت النتائج كما في الجدول (2) التالي:

جدول (2): قيم متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لمقدرات دالة المعولية R(t)

models	A	B	C	D	E	F	G	H	I
α	1	1	1	1.5	1.5	1.5	2	2	2
β	1.5	2	2.5	1.5	2	2.5	1.5	2	2.5

من الجدول أعلاه نلاحظ أن جميع النماذج ولأحجام العينات كافة أظهرت أن تقدير دالة معولية النظام المعقد باستخدام التحليل اللامعلمي (NPA) تعطي متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) اقل من متوسطات مربعات الخطأ التكاملي لبقية الطرائق في تقدير دالة معولية النظام المعقد في حالة العينات الصغيرة بنسبة (44%). وبالنسبة الى جميع طرق التقدير فأن متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لطريقة الإمكان الأعظم لمقدر دالة المعولية R(t) هو الأقل في حالة العينات الكبيرة بنسبة (89 %). كما نلاحظ أن متوسطات مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لتقدير دالة المعولية R(t) ولكافة طرق التقدير المستعملة وللنماذج كافة تبدأ بالتناقص كلما ازداد حجم العينة، هذا يعني انه كلما ازداد حجم العينة ازدادت الكفاءة النسبية للطريقة المستخدمة في تقدير دالة المعولية.

ISSN (1681- 6870)

10. الاستنتاجات Conclusions

- من خلال ما تقدم نستنتج أن متوسط مربعات الخطأ تكاملي (IMSE) لمقدرات دالة المعولية النظام المعقد باستخدام التحليل اللامعلمي (NPA)، أقل من متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لتقدير هذه الدالة باستخدام الطرق الأخرى في حالة العينات الصغيرة.

- أن متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لمقدرات دالة المعولية النظام المعقد باستخدام طريقة الإمكان الأعظم (MLE) كانت أقل من (IMSE) لتقديرات هذه الدالة باستخدام الطرائق الأخرى ولجميع أحجام العينات.

- بالتالي نستطيع القول انه يمكن اعتماد التحليل اللامعلمي (NPA)، في حالة العينات الصغيرة. كما يمكن اعتماد طريقة الإمكان الأعظم (MLE) لتقدير دالة المعولية في حالة العينات الكبيرة.

المصادر References

[1] Achebo, J.I.& Oghoore, O., 2010, A Nonparametric Analysis of Asymptomatic Hazard Rates in a Brewing Plant Using the Probability Failure Functions Proceedings of the World Congress on Engineering Vol III, London, Uk.

[2] Bhat, U. N., 1976, Elements of Applied Stochastic Processes, John Wiley &Sons, New York, USA.

[3] Ching W.-K., Michael K. N., 2006, Markov Chains: Models, Algorithms and Applications, Springer Science Business Media, Inc., USA.

[4] Cinler, E., 1975, introduction to Stochastic Processes, Prentice-Hall, Inc. New York, USA.

[5] Ebeling, C. E., 1997, An introduction to reliability and maintainability engineering, University of Dayton, McGraw-Hill Companies.

[6] Everitt, B.S., and Dunn, G., 2001, Applied multivariate data analysis, Oxford university press Inc., New York, USA.

[7] Härdle, W., and Simar, L., 2007, Applied Multivariate Statistical Analysis, Springer, Verlag Heidelberg, Berlin-Germany.

[8] Henry, P., 2009, Reliability engineering-part 14-fellow member & officer, American society quantity library.

[9] Machado, L. M., & Pardinas, J.R., 2011, Analyzing survival data from the illness-death model, Journal of statistical software, Vol.38-Issue.3.

[10] Weibull Distribution, Wikipedia, The Free Encyclopedia, en.wikipedia.org/wiki/Weibull_distribution.