

ملاحظات على توزيع ويبيل

Notes on Weibull Distribution

أ. م. علي عبد الحسين الوكيل
جامعة بغداد- كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

الخلاصة

يعتبر توزيع ويبيل من التوزيعات المهمة المستخدمة في الموثوقية وفي توزيع فترات البقاء. وقد احتوت الدراسة على توزيع ويبيل ذو المعلمتين وذو الثلاث معالم وكذلك توزيع باي ويبيل ذو الخمسة معالم والذي لم تتطرق له العديد من الكتب والمصادر لانه من المواضيع الحديثة جدا حيث انه يعتمد على توزيعي ويبيل ذو المعلمتين وذو ثلاث معالم باستخدام معلمتي القياس (α) والشكل (β) لاحدهما واطافة معلمة الموضع (γ) للآخر ودمج هذين التوزيعين يظهر توزيع يحتوي على خمسة معالم اثنان من توزيع وثلاثة من توزيع اخر. وقد تم التطرق في هذا البحث الى علاقة توزيعات ويبيل مع التوزيعات الاخرى مثل التوزيع الاسي، توزيع كاي، توزيع كاما وتوزيع كاميل (القيمة المتطرفة). هذا وقد كانت هناك جملة من الملاحظات التي اخذت بنظر الاعتبار منها اهمية هذا التوزيع وتطبيقاته في مجال الموثوقية.

لقد اعتمدت الدراسة على اخر البحوث والدراسات الحديثة عن هذا الموضوع ولغاية شهر مايس 2004.

Abstract

Weibull Distribution is one of most important distribution and it is mainly used in reliability and in distribution of life time. The study handled two parameter and three-parameter Weibull Distribution in addition to five –parameter Bi-Weibull distribution. The latter being very new and was not mentioned before in many of the previous references. This distribution depends on both the two parameter and the three – parameter Weibull distributions by using the scale parameter (α) and the shape parameter (β) in the first and adding the location parameter (γ) to the second and then joining them together to produce a distribution with five parameters.

The paper also handled the relationship between Weibull Distribution and the other known distributions such as the exponential distribution, Chi distribution, Gamma distribution and Gumbel (extreme value) distribution.

The paper considered a number of important notes including the importance and the application of Weibull distribution in the field of reliability.

The study depended on the most recent research papers on this subject and until May 2004.



Notes on Weibull Distribution

1- المقدمة

من التوزيعات المستخدمة في المعولية هو توزيع ويبيل حيث انه من الممكن ان يعتمد على عدة معالم. لذلك فان توزيع ويبيل يأخذ الاهمية القصوى في الدراسات العلمية التي تعتمد تحديد فترة البقاء في تطبيقات المعولية وان المعالم الموجودة في التوزيع سواء كانت معلمتين او اكثر تشير الى ان المتغير ويبيل له مجال $0 \leq X < \infty$ وان معلمة القياس α تكون اكبر من الصفر وان معلمة الشكل β يجب ان تكون ايضا اكبر من الصفر وهكذا لبقية المعالم في التوزيع.

2- هدف البحث

يهدف البحث الى دراسة تفصيلية لتوزيع ويبيل في حالاته واكثر التوزيعات المترابطة معه. ولذلك احاول ان اعطي فكرة موسعة عن هذا التوزيع المستخدم في كثير من دراسات فترة البقاء life time وفي مختلف المجالات والتي تسمى في بعض الكتب تحليل ويبيل او تحليل بيانات البقاء life data analysis والذي عن طريقه يتمكن الباحث من ان يصل الى التنبؤ حول فترة البقاء.

3- توزيع ويبيل

استخدم توزيع ويبيل عام 1951 من قبل الباحث والدي ويبيل (Wallodi Weibull) للعرض التجريبي لمشاهدة التغير في تمدد الحديد وايضا استخدام هذا التوزيع في التغير في فترة الخدمة التي يقضيها موظفو الاداعة. وقد شاع استخدام توزيع ويبيل ذو المعلمتين والمتعدد المعالم والذي ستذكر استخداماته لاحقا في مجال المعولية وفي تجارب اختبار البقاء ولذلك نرى تطبيقاته شملت توزيع فترة البقاء ومختلف حالات الفشل بالاضافة الى بناء النماذج في المعولية.

ان هذا التوزيع يمكن اختصاره الى التوزيع الاسي عندما تكون معلمة الشكل تساوي واحد وان توزيع ويبيل له معدل فشل متزايد عندما تكون معلمة الشكل اكبر من واحد ولها معدل فشل متناقص عندما تكون معلمة الشكل اقل من واحد.

ان المتغير ويبيل $\omega: \alpha, \beta$ والذي فيه المجال $0 \leq X < \infty$ له معلمة القياس $\alpha > 0$ وله معلمة الشكل $\beta > 0$ ولذلك فان دالة الكثافة الاحتمالية p.d.f. تكون كما يلي:

$$f(x) = (\beta X^{\beta-1} / \alpha^\beta) e^{-x/\alpha^\beta}$$

وعن طريق هذه الدالة ممكن ان نحصل على الدالة التجميعية c. d. f.

$$F(x) = 1 - e^{-x/\alpha^\beta}$$

اما دالة الخطر Hazard function فتظهر بالشكل التالي

$$h(x) = \beta x^{\beta-1} / \alpha^\beta$$

والمتوسط لها هو

$$\alpha \Gamma[(\beta + 1)/\beta]$$

والتباين هو

$$\alpha^2 [\Gamma\{(\beta + 2)/\beta\}] - [\Gamma\{(\beta + 1)/\beta\}]^2$$

والعزم rth حول المتوسط

$$\alpha^r \Gamma[\beta + r/\beta]$$



Notes on Weibull Distribution

وان ميزة البقاء لـ (α) لها خاصية

$$p((\omega: \alpha, \beta) \leq \alpha) = 1 - e^{-1} = 0.63$$

3-1 علاقات متغير ويبيل

$$\omega: \alpha, \beta \sim \alpha(\omega: 1, \beta)$$

1- ان المتغير ويبيل $\omega: \alpha, \beta$ الذي فيه معلمة الشكل $\beta=1$ تمثل المتغير الاسي α Exp مع المتوسط α

$$\omega: \alpha, 1 \sim \text{Exp}: \alpha$$

2- ان المتغير ويبيل $\omega: \alpha, 2$ هو متغير راليه Rayleigh Variate والذي فيه معلمة الشكل $\beta=2$

3- ان المتغير ويبيل $\omega: \alpha, \beta$ له علاقة بقيمة المتغير القياسي المتطرف

(standard Extreme Value Variate) $v: 0, 1$ وكما يلي:

$$-\beta \log[(\omega: \alpha, \beta)/\alpha] \sim v: 0, 1$$

3-2 تقدير المعلمة Parameter Estimation

من الممكن الحصول على تقدير المعلمة باستخدام طريقة الامكان الاعظم M. L. E. لقيمة $\alpha^{\wedge}, \beta^{\wedge}$ لمعلمة الشكل والقياس عن طريق حلها بواسطة المعادلات فنحصل على قيمة

$$\alpha^{\wedge} = \left[\frac{(1/n) \sum_{i=1}^n X_i^{\beta^{\wedge}}}{n} \right]^{1/\beta^{\wedge}}$$

$$\beta^{\wedge} = \frac{1}{(1/\alpha^{\wedge}) \sum_{i=1}^n X_i \beta^{\wedge} \log X_i - \sum_{i=1}^n \log X_i}$$

ومن الممكن توليد الارقام العشوائية لمتغير ويبيل $\omega: \alpha, \beta$ باستخدام العلاقة التالية

$$\omega: \alpha, \beta \sim \alpha(-\log R)^{1/\beta}$$

3-3 توزيع ويبيل ذو الثلاث معالم

من الممكن الحصول على توزيع ويبيل ذو الثلاث معالم بالاعتماد على توزيع ويبيل ذو المعلمتين مع اضافة معلمة ثالثة وهي معلمة الموقع والتي يشار اليها بالرمز (γ) (كاما) وان الدالة الكثافة الاحتمالية p. d. f. لها تكون صفر عندما $X < \gamma$ ولذلك يكون لدينا توزيع ويبيل مع نقطة الاصل (γ) في التطبيقات المعولية ان هذه المعلمة تشير الى اقل فترة بقاء (Minimum Life) ولكن هذا لا يعني بالضرورة عدم امكانية حدوث حالات فشل تحت هذه القيمة في المستقبل، وان المتغير ويبيل $\omega: \gamma, \alpha, \beta$ سوف يوضح لنا ان $\gamma > 0$ تشير الى معلمة الموقع وان $\alpha > 0$ تشير الى معلمة القياس وان $\beta > 0$ تشير الى معلمة الشكل وان المجال

$\gamma \leq X \leq +\infty$ وان دالة p. d. f. تكون

$$f(x) = [\beta (X - \gamma)^{\beta-1} / \alpha^{\beta}] e^{-[(x-\gamma)/\alpha]^{\beta}} \quad X \geq \gamma$$

وان دالة c. d. f.

$$F(x) = 1 - e^{-[(x-\gamma)/\alpha]^{\beta}} \quad X \geq \gamma$$

ودالة الخطر Hazard function

$$h(x) = \beta (X - \gamma)^{\beta-1} / \alpha^{\beta} \quad X \geq \gamma$$



Notes on Weibull Distribution

وان المتوسط هو

$$\gamma + \alpha \Gamma[(\beta + 1)/\beta]$$

والتباين

$$\alpha^2 (\Gamma[(\beta + 2)/\beta] - [\Gamma(\beta + 1)/\beta]^2)$$

ويتم توليد العدد العشوائي لتوزيع ويبيل ذو الثلاث معالم باستخدام العلاقة التالية

$$(\omega: \gamma, \alpha, \beta) \sim \gamma + \alpha(-\log R)^{1/\beta}$$

3-4 توزيع باي ويبيل Bi- Weibull Distribution

من الممكن الحصول على توزيع باي ويبيل من اشتراك توزيعين لـ (ويبيل) وهذا سيوفر لنا نموذج توزيع له شكل مرن. ومن الممكن الحصول على مرونة اكثر باضافة اكثر من توزيعين لـ (ويبيل) وهذا مما يزيد من عدد المعالم المقدره.

لقد تم اقتراح عدد من البحوث الخاصة بتوزيع باي ويبيل من قبل عدد من الباحثين وتختلف هذه البحوث في طريقة ربط هذين التوزيعين لـ (ويبيل) وفي عدد المعالم الخاصة بهما.

3-5 توزيع باي ويبيل ذو خمسة معالم Five parameter Bi- Weibull Distribution

هناك توزيع اخر لـ (ويبيل) يدعى باي ويبيل ذو خمسة معالم، حيث فيه معلمة القياس $\lambda > 0$ ومعلمة الشكل $\theta > 0$. كذلك توجد حالة اخرى عندما تكون معلمة الموضع $\gamma \geq 0$ ومعلمة القياس $\alpha > 0$ ومعلمة الشكل $\beta > 0$. وان هذا التوزيع يمكن الحصول عليه من دالتي الخطر لويبل. وان هذه الدالة الاولى تتكون من معلمتي دالة الخطر لويبل كما في المعادلة التالية:

$$h(x) = \lambda \theta (\lambda x)^{\theta-1}$$

حيث ان X يمثل مركبة العمر، وان $h(x)$ يمثل دالة الخطر في العمر X وان λ يمثل مقلوب معلمة القياس وان θ هي معلمة الشكل. وعندما تكون الحالة $\theta=1$ تعتمد على معدل فشل الثابت λ .

اما دالة الخطر الثانية فهي تتكون من ثلاث معالم لدالة الخطر لويبل والتي تعمل عندما تكون $X > \gamma$ في المعادلة التالية:

$$h(x) = (\beta/\alpha)((x - \gamma)/\alpha)^{\beta-1}$$

حيث ان γ, α, β تمثل معالم الشكل والقياس والموضع كما في توزيع ويبيل ذو الثلاث معالم. فاذا تم اضافة هاتين الدالتين للخطر فسوف نحصل على توزيع باي ويبيل ذو الخمسة معالم وبذلك تكون معادلات الخطر والمعولية كما يلي:
دالة الخطر:

$$h(x) = \lambda \theta (\lambda x)^{\theta-1}, \quad 0 < x < \gamma$$

$$h(x) = \lambda \theta (\lambda x)^{\theta-1} + (\beta/\alpha)((x - \gamma)/\alpha)^{\beta-1} \quad x \geq \gamma$$

وان دالة البقاء

$$S(x) = e^{-(\lambda x)^\theta}, \quad 0 < x < \gamma$$

$$S(x) = e^{-[(\lambda x)^\theta + ((x - \gamma)/\alpha)^\beta]} \quad , \quad x \geq \gamma$$

فلو استخدمنا المعادلتين الخاصتين بدالة البقاء للباي ويبيل $S(x)$ لحساب قيم لـ $S(x)$ ولجميع قيم X من الصفر الى $(\gamma + 2\alpha)$ وبعدها تحفظ النتائج في جدول وتولد العدد العشوائي البسيط uniform random variable.



Notes on Weibull Distribution

وننظر الى قيم (x) المعتمدة على:

$$S(x)=R$$

4- حالات توزيع ويبيل

من خلال الاشكال المدرجة ادناه نرى الاختلاف في منحني الدالة الاحتمالية p. d. f. لتوزيع ويبيل عندما

$\omega: \alpha, \beta, \gamma$ او عندما $\omega: \lambda, \theta, \alpha, \beta, \gamma$ وكذلك في دالة c. d. f. واخيرا

في دالة الخطر للحالات التي ذكرت في توزيع ويبيل. ومن خلال هذه الامثلة نلاحظ التغير الذي يحدث في منحنيات الدالة وخاصة في دالة الخطر للباي ويبيل والذي يشبه شكل الحوض (bath tub) والتي تتعلق بتطبيق المعولية على حالات الفشل الناتجة عن كل من الاستهلاك والاحتراق معا. وان مدى الاشكال التي ياخذها توزيع باي ويبيل يكون كبير وذلك لانه ممكن الجمع بين معدلي حالتين من حالات الفشل، فمثلاً الاحتراق والاستهلاك او حالتي العشوائية مع الاستهلاك والاحتراق مع العشوائية او العشوائية مع عشوائية اخرى. وفي مرحلة اخرى فان β يجب ان لا يشترط كونها اكثر من واحد. وكذلك فان θ لا يتطلب ان تكون اقل من واحد.

وفي المجالات العملية فان من اهم ميزات توزيع باي ويبيل ذو الخمس معالم هو استخدامه لتشخيص بداية الاستهلاك.

وتوضح المنحنيات الاربعة الاولى توزيع ويبيل ذو المعلمتين وعندما تكون معلمة القياس $\alpha=1$ في حين تاخذ معلمة الشكل قيم مختلفة كما في الشكل (1). كذلك يطلق على توزيع ويبيل ذو المعلمة الواحدة عندما $\alpha=1$.

ويشير الشكل (2) الى توزيع ويبيل ذو الثلاث معالم عندما $\gamma=1$ و $\alpha=2$ و $\beta=2$ والشكل (3) يشير الى توزيع ويبيل ذو الخمسة معالم عندما $\beta=3$ و $\alpha=4$ و $\gamma=4$ و $\theta=0.7$ و $\lambda=0.1$.

ولذلك نلاحظ التغير الذي يحدث في المنحنيات ففي الاول نرى الحالة التي تمثل التوزيع الاسي، وهكذا لبقية الحالات التي تمثل توزيع راليه والتوزيع المتطرف.

فلو تم اجراء اختبار باخذ عينة مقدارها (10) وحدات متماثلة لنفس الوظيفة وبنفس مستويات الجهد ولفترة (120) ساعة وذلك لغرض حساب عدم المعولية لفترة تشغيل قدرها (226) ساعة وحساب فترة الضمان بمعولية 85% ومن خلال الاختبار فشلت (6) وحدات للفتترات الزمنية التالية:

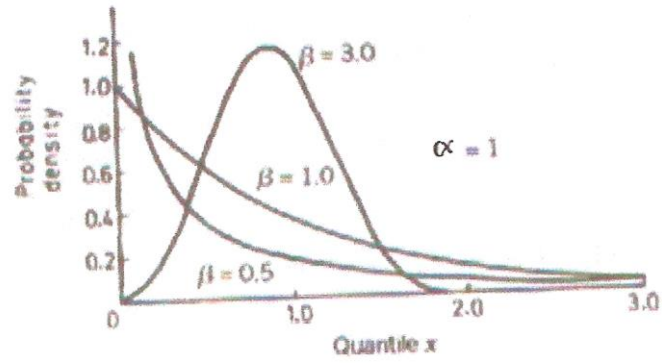
16 ، 34 ، 53 ، 75 ، 93 ، 120

في حين استمرت الوحدات الاربعة الباقية بالعمل الى ما بعد (120) ساعة. وبعد تحليل هذه البيانات باستخدام توزيع ويبيل ذو المعلمتين كانت النتائج التالية:

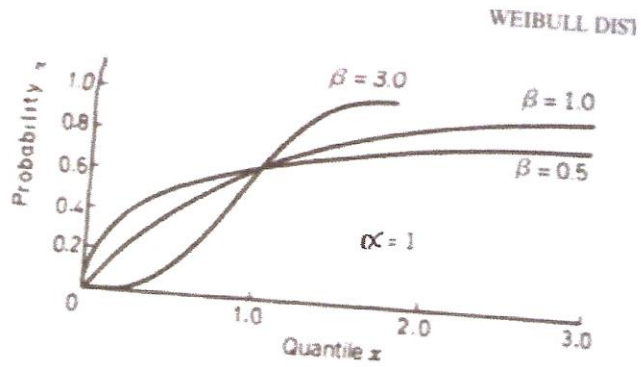
ان معلمة القياس $\alpha = 144.3631$ وان معلمة الشكل $\beta = 1.2097$ وان $\rho = 0.99$ ولاستخراج عدم المعولية نستخلص المعلومات من مخطط الاحتمال لتعيين نقاط التقاطع مع الفترة المتوقعة ومن ثم قراءة نقطة عدم المعولية على محور الصادات ويتم احتساب عدم المعولية للوحدات بقيمة 82%



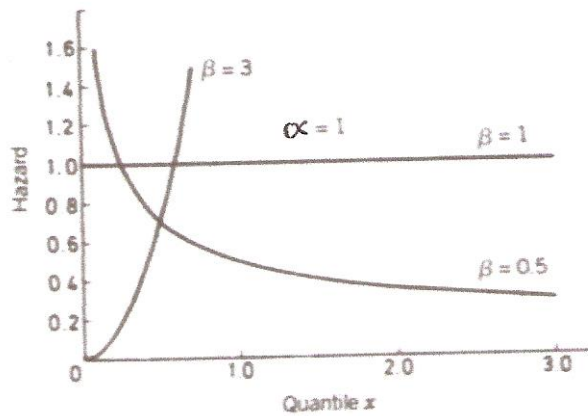
Notes on Weibull Distribution



P.d.f. for the weibull variate $W:1,\beta$
 شكل رقم (1)



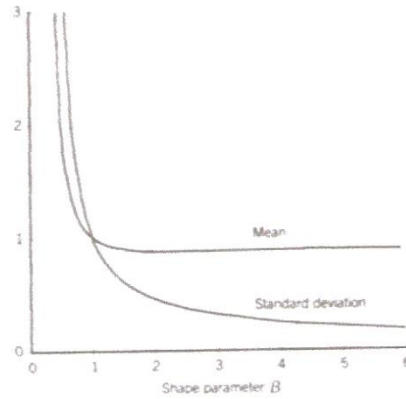
D.F. for the weibull variate $W:1,\beta$
 شكل رقم (1 أ)



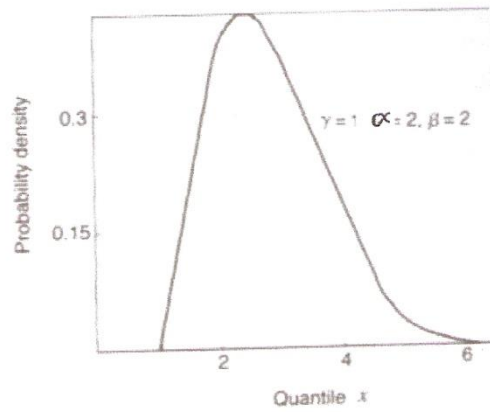
$h(X)$ for the weibull variate $W:1,\beta$
 شكل رقم (1 ب)



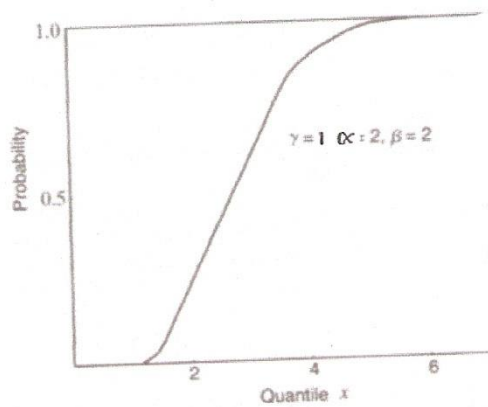
Notes on Weibull Distribution



Mean and standard deviation as a function of the shape parameter β
شکل رقم (1 ج)



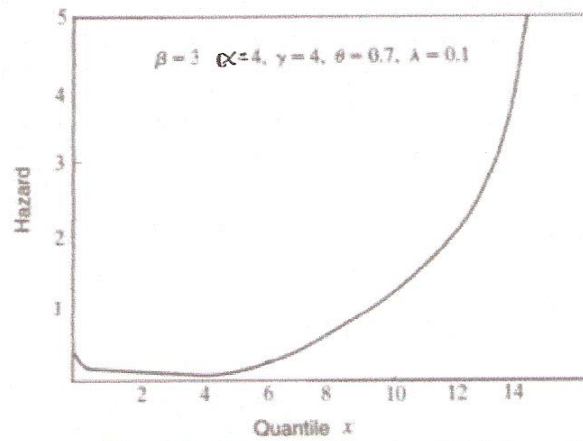
p.d.f. for the weibull variate $W: \gamma, \alpha, \beta$
شکل رقم (2)



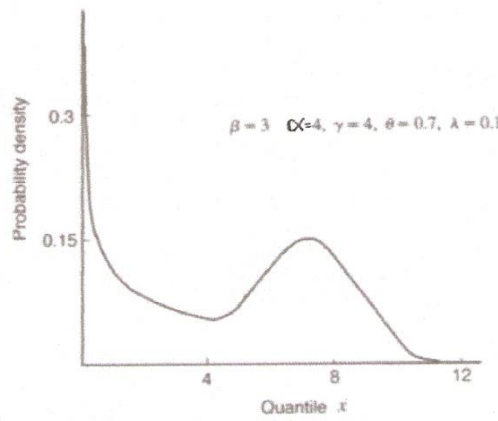
D.F. for the weibull variate $W: \gamma, \alpha, \beta$
شکل رقم (1 2)



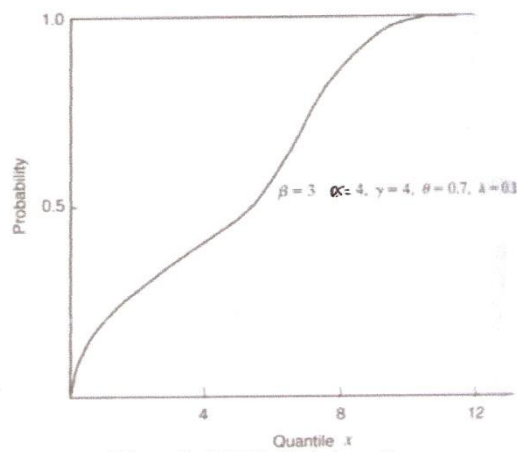
Notes on Weibull Distribution



Bi-weibull hazard function $W: \lambda, \theta, \gamma, \alpha, \beta$
 شكل رقم (3)



Bi- weibull p.d.f. $W: \lambda, \theta, \gamma, \alpha, \beta$
 شكل رقم (3 أ).



Bi- weibull D.F. $W: \lambda, \theta, \gamma, \alpha, \beta$
 شكل رقم (3 ب)



Notes on Weibull Distribution

5- تطبيق في توزيع ويبيل

في التجربة العلمية التالية تمت المقارنة بين توزيع ويبيل والتوزيع الطبيعي حيث كانت الفكرة هي مطابقة بيانات قوة التحمل للمواد الصلدة (القابلة للتكسر او التشقق) التالية: نتريد السليكون Si_3N_4 ، كارييد السليكون SiC واوكسيد الخارصين ZnO لتوزيع ويبيل والطبيعي.

لقد شاع استخدام المواد القابلة للتكسر او التشقق مثل السيراميك والصخور والكونكريت وغيرها في الاعمال الهندسية لشدة مقاومتها للحرارة والتاكل والاستهلاك. الا ان هذه المواد قابلة للتشقق او التكسر وان قوة تحملها تختلف من مادة الى اخرى.

ان تقييم المعولية للمواد الصلدة يتطلب معالجة احتمالية. فقد وجد بان توزيع ويبيل ذو المعلمتين قد نجح بوصف حالات كثيرة لبيانات التكسر او التشقق وخاصة بالنسبة للمواد الصلدة. وان التوزيع الطبيعي وتوزيع كاوس (Gaussian) يعتبر ان من التوزيعات الاساسية المستخدمة في هذا المجال اضافة الى التوزيعات الاخرى لحالات الفشل والتمثلة بالتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي وتوزيع القيمة المتطرفة من النوع الاول وغيرها. وبصورة عامة فانه يمكن تشخيص النموذج المناسب باستخدام اختبار حسن المطابقة. وسوف تتم المقارنة بين توزيع ويبيل ذو المعلمتين وذو الثلاث معالم والتوزيع الطبيعي على بيانات لهذه المواد السيراميكية.

ان الاحتمال التراكمي للفشل للمادة الصلدة يعتمد على قوة التحمل σ وان توزيع ويبيل لقوة التحمل يمكن تمثيله بـ $F(\sigma)$ حيث ان

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left(- \left[\frac{(\sigma - \sigma_{th})}{\sigma_o} \right]^m \right)$$

حيث ان

σ_o هي قوة التحمل الطبيعية للمادة.

σ_{th} هي الحد الاعلى لقوة التحمل (الذي لا يظهر دونه أي التكسر)

m هو معامل ويبيل

ان معامل ويبيل هو قياس لتشتت قوة التحمل ويعتبر معامل الشكل في التوزيع لذا فان $p. d. f.$ لتوزيع ويبيل ذو الثلاث معالم هو

$$f(\sigma) = d F(\sigma) / d\sigma$$

$$f(\sigma) = \frac{m}{\sigma_o} \left(\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_o} \right)^{m-1} \exp \left[- \left(\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_o} \right)^m \right] \dots \dots (1)$$

وان قيمة σ_{th} تكون مساوية للصفر في معظم التطبيقات العملية.

اما اذا تم تصنيع المادة الصلدة بدون عناية كافية فان قوة التحمل ستتمثل بتوزيعات اقل او اكثر تناظراً. ولذلك فقد يكون التوزيع الطبيعي هو الاكثر ملائمة.

وفي هذه الحالة تكون دالة $p. d. f.$ كما يلي:

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp \left[- \frac{(\sigma - \bar{\sigma})^2}{2\alpha^2} \right] \dots \dots \dots (2)$$



Notes on Weibull Distribution

حيث ان $\bar{\sigma}$ و α هما المتوسط والانحراف المعياري.

وان افضل طريقة لتقدير المعالم المجهولة هي طريقة الامكان الاعظم (maximum likelihood) والتي تنتج اصغر قيمة لمعالم التغير.

حيث ان الامكان الاعظم M. L. لدالة $p.d.f.$ هو

$$L = \prod_{i=1}^N f(\sigma_i)$$

وكذلك فان الدالة اللوغاريتمية لـ M. L. تكون

$$\ln L = \sum_{i=1}^N \ln f(\sigma_i)$$

ولذلك فان تقدير المعالم يتم بايجاد الدالة اللوغاريتمية لـ M. L. وان المعادلة التالية هي لاجاد m من N من قوة التحمل المقاسة σ_i

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^N \sigma_i^m \ln \sigma_i}{\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^N \sigma_i^m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \sigma_i \quad \dots \dots \dots (3)$$

فيتم استخراج قيمة m بالتجربة والخطأ وبعدها يتم حساب σ_0 من المعادلة التالية:

$$\sigma_0^m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^m \quad \dots \dots \dots (4)$$

اما بالنسبة للتوزيع الطبيعية فانه معروف لدينا كيفية استخراج $\bar{\sigma}$ و α^2

ان طريقة M. L. تعتبر من افضل الطرق للاستخدام في هذا المجال ويمكن توسيعها لتشمل مقارنة بين النماذج باستخدام اسلوب اكاكي (Akaike information Criterion, AIC) والتي تبدأ بربط M. L. مع التغير بين التوزيع الحقيقي والتقديري وبالامكان عرضها كما يلي:

$$A = -2 \ln \hat{L} + 2K \quad \dots \dots \dots (5)$$

حيث $\ln \hat{L}$ هو لوغاريتم M. L. لنموذج وهو عدد المعالم المراد مطابقتها للنموذج وان الرقم 2 هو عامل اضافي. فاذا كان توزيع ويبيل ذو الثلاث معالم فان $K=3$ هو الساند على باقي التوزيعات مثل الطبيعي وويبل ذو المعلمتين $K=2$ ، وينبغي ان يبين مطابقة جيدة لقوة التحمل، أي ان:

$$\Delta A = A_n - A_{w3p} \geq 2$$



Notes on Weibull Distribution

حيث ان ΔA هو الفرق في قيم AIC لـ A_n و A_{w3p}

فقد وجد ان اختبار قوة التحمل لثلاث مواد سيراميكية وهي نتريد السليكون Si_3N_4 وكاربيد السليكون SiC واوكسيد الخارصين ZnO لها قوة تحمل ترتبط باحتمال فشل تقديري هو:

$$F(\sigma_i) = (i - 0.5)/N$$

حيث ان i يشير الى النموذج و N العدد الكلي وان p. d. f. المتعلقة بـ σ_k و σ_{k+1} تكون

$$F(\sigma_i) = 1/[N(\sigma_{k+1} - \sigma_k)]$$

والذي يستخدم لمقارنة المطابقة مع الدالة التوزيعية

والجدول التالي يوضح القيم لـ N : عدد التجارب للسيراميك Si_3N_4 و SiC و ZnO و A_{w2p} الذي يمثل رقم اكاكي لتوزيع ويبيل ذو المعلمتين و A_{w3p} الذي يمثل رقم اكاكي في توزيع ويبيل ذو الثلاث معالم و A_n الذي يمثل رقم اكاكي في التوزيع الطبيعي و ΔA الذي يمثل مقدار الفرق بين التغيرين:

النموذج	$N^{\Delta A}$	A_{w2p}	A_{w3p}	A_n	ΔA
Si_3N_4	55	635.78	637.77	642.78	7.00
SiC	75	778.31	779.83	779.68	1.37
ZnO	109	681.29	682.90	671.53	-9.76

وفي الجدول اعلاه نلاحظ نتائج المواد الصلدة مبينة وان توزيع ويبيل ذو الثلاث معالم غير مطابق بصورة كبيرة بالرغم من ادخال معلمة جديدة هي معلمة الموضع. حيث لا يمكننا ان نقول انه افضل من توزيع ويبيل ذو المعلمتين ولكن على الاقل فان قيم AIC المحتسبة هنا وللحالات الثلاث هي اكبر من الصفر

$$\Delta A = A_{w3p} - A_{w2p} > 0$$

ولذلك فان توزيع ويبيل ذو المعلمتين هو افضل من التوزيع الطبيعي فمن الجدول اعلاه نرى ان حالة السيراميك Si_3N_4 تمثل توزيع ويبيل افضل لتمثيل اما فيما يخص سيراميك ZnO فان سلوكه معاكس تماما وفي حالة سيراميك SiC فيظهر انه يميل الى توزيع ويبيل ولكن الفرق ليس كبير بين التوزيعين.

واخيرا تجدر الاشارة الى ان الطريقة المقترحة هنا يمكن تطبيقها لاختيار افضل توزيع بين ثلاثة او اكثر من التوزيعات حيث نأخذ قيم AIC وكما معرفة في (5) لمعرفة تأثير التحمل ومن ثم تطبيقها قوى التحمل لعدد من المواد المختارة. وقد بينت النتائج لهذه التجربة بانه لا توجد دلالة كافية على ان توزيع ويبيل هو دائما افضل من التوزيع الطبيعي او التوزيعات الاخرى الا ان الاستخدام المطلق لتوزيع ويبيل على قوة التحمل للمواد الصلدة قد لا يكون دقيقا ما لم تؤخذ العوامل الفيزيائية الاخرى والمرتبطة بالتكسر بنظر الاعتبار.



Notes on Weibull Distribution

6- الاستنتاجات والملاحظات

- 1- ان عائلة توزيع ويبيل تتدرج في مستوى تعقيدها بداية من السالب الاسي والويبل الثنائي المعالم والويبل ذو الثلاث معالم ونهاية بالباي ويبيل والويبل ذو الخمسة معالم.
- 2- ان السالب الاسي يمثل ابسط انواع توزيع ويبيل وتكون دالة الخطر فيه ثابتة.
- 3- ان الويبل الثنائي المعالم يضم في نماذجه دوال خطر متناقصة، ثابتة او متزايدة وكما يلاحظ في الشكل (1).
- 4- ان نموذج ويبيل ذو الثلاث معالم يضيف معلمة الموقع الى نموذج ويبيل الثنائي المعالم وتظهر الدالة كما موضح في الشكل (2).
- 5- ان توزيع باي ويبيل يسمح بضم اثنان من دوال الخطر المتناقصة، الثابتة او المتزايدة
- 6- مما ذكر اعلاه نستنتج ان:

$$\lim_{m \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \beta < 1$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} f(x) = 1/\alpha \quad \beta = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \beta > 1$$

- 7- عندما تكون $\beta \rightarrow +\infty$ فان توزيع ويبيل ينحرف (*degenerates*) عند α ولذلك فان دوال ويبيل عندما تكون β كبيرة تصبح لها قمة حادة (*sharp peak*)
- 8- ان دالة ويبيل تاخذ شكلا مشابها الى توزيعات كما
- 9- ان ميزة البقاء لها خاصية

$$P[\omega: (\alpha, \beta) \leq \alpha = 1 - e^{-1}] = 0.632121$$

بغض النظر عن قيمة β

- 10- ان متغير ويبيل الذي له معلمة الشكل $\beta=1$ يمثل المتغير الاسي وشار له $Exp(1/\alpha)$ وهذا معناه ان

$$w(\alpha, 1) \sim Exp(1/\alpha)$$

- 11- ان متغير ويبيل الذي له معلمة قياس α ومعلمة الشكل $\beta=2$ هو متغير كاي $chi(n, \sigma)$ عندما $n=2$ و $\alpha =$ وهذا معناه

$$w(\alpha, 1) \sim chi(2, \alpha)$$

وهذا ما يسمى بتوزيع راليه (*Rayleigh Distribution*) او $Ray(\alpha)$

- 12- ان متغير ويبيل الذي له معلمة القياس $\alpha\sqrt{2}$ ومعلمة الشكل $\beta=2$ تمثل متغير كاي

$$\sigma = \alpha\sqrt{2} \text{ و } n=2 \text{ عندما } chi(n, \sigma)$$

$$w(\alpha\sqrt{2}, 2) \sim chi(2, \alpha\sqrt{2})$$

وهذا ايضا يسمى بتوزيع راليه ($Ray(\alpha\sqrt{2})$)



Notes on Weibull Distribution

13- إذا كان X يمثل متغير ويبيل $X \sim w(\alpha, \beta)$ فان p. d. f. له تكون

$$Y = -\beta * \ln(x/\alpha)$$

$$F(y) = e^y e^{-e^{-y}}$$

وهذه تمثل القيمة المتطرفة (*extreme value*) في توزيع كامبل (*Gumbel Distribution*)

7- المصادر

- 1- Burgher E, Reymen D, Raymen O, Wessa P, "Facilities Development and Design" Resa Corporation, (2004)
- 2- Chunsheng Lu, Robert Danzer, Franz Dieter Fischer, "Fracture Statistics of Brittle Materials: Weibull or Normal Distribution, Physical Review, Vol. 65, 067/02, (2002)
- 3- Devroye L, "Non- Uniform Random Variate Generation", springer-Verlag, New York, (1986).
- 4- Hanagel D, "A Multi- Variate Weibull Distribution", Dept. of Statistics, University of Pune, India, (2004)
- 5- Kapur J. N., Saxena H. C., "Mathematical Statistics" S. Chand & Company Ltd., Ram-Nager, New Delhi 110055, (1978).
- 6- Merran Evans, Nicolas Hasings, Brian Peacock, "Statistical Distributions", John Wiley & Sons, Inc. USA, (2000)
- 7- Patel J. K., Kapadia C. H., Owen D. B. "Hand Book Of Statistical Distributions", Marcel-Dekker, (1976)
- 8- Vijay K., Rohatge, Ehsane Saleh A. K. Md. "An Introduction to probability and Statistics", 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc., Canada, (2000).