مقارنة طرائق التقدير التقريبية لمعلمتي التوزيع اللوجستي

م. د.عمر عبد المحسن علي
جامعة بغداد- كلية الادارة والاقتصاد
قسم الأحصاء

المستخلص

تم إستعراض تقدير معلمتي التوزيع اللوجستي بإستعمال طريقة ذات مقدرات مضبوطة وهي طريقة العزوم، ومقارنتها بمقدرات تقريبية مأخوذة بالأساس من أسلوب طريقة (وايت) في التقدير بأعتبار التوزيع اللوجستي من التوزيعات الأحتمالية الأسية، وهي كل من طريقة المربعات الصغرى الأعتيادية، وطريقة أنحدار الحرف، وأقتراح تطبيق طريقة أنحدار الحرف المعدلة على هذا التوزيع. وتم أستحصال النتائج بالأستناد الى تجارب محاكاة لتلك الطرائق جميعها ولنماذج مختلفة ولحجوم عينات متنوعة. وتمت المقارنة بالأستناد الى معياري متوسط مربع الخطأ ومتوسط الخطأ النسبي المطلق.

Abstract

The goal beyond this Research is to review methods that used to estimate Logistic distribution parameters. An exact estimators method which is the Moment method, compared with other approximate estimators obtained essentially from White approach such as: OLS, Ridge, and Adjusted Ridge as a suggested one to be applied with this distribution. The Results of all those methods are based on Simulation experiment, with different models and variety of sample sizes. The comparison had been made with respect to two criteria: Mean Square Error (MSE) and Mean Absolute Percentage Error (MAPE).

1.1 المقدمة

يعد التوزيع اللوجستي من التوزيعات الحيوية في الأحصاء، وهو توزيع بارز من توزيعات العائلة الأسية، وغالباً ما يستعمل في التطبيقات على منحنى النمو. وهو توزيع شبيه بالتوزيع الطبيعي من ناحية الشكل إلاّ أنه ذو ذيل أثقل (أي أكثر تفلطحاً). ولذا يمكن تصنيف هذا التوزيع على أنه من التوزيعات ذات (S – Shaped). وتشتهر تطبيقاته في ميادين علوم الحياة Biology لوصف حالة نمو مجتمعات الكائنات الحية، وفي علم الأوبئة Epidemiology حول إنتشار الأوبئة، وفي البحوث النفسية Psychology لوصف قدرات التعلم، وفي التطبيقات التكنلوجية Technology لتمثيل إحلال تقنية جديدة عوضاً عن أخرى قديمة، وفي التسويق Marketing عن كيفية نشر مبيعات منتج معين، وفي التطبيقات الفيزيائية Physics كالطاقة Energy وعلم السوائل Hydrology وفي تطبيقات طبية وزراعية كثيرة ومجالات أخرى عديدة. وأن أول ظهور لهكذا تطبيقات للتوزيع اللوجستي كانت عام 1845 على يد العالم الفرنسي Verhulst, P.F. أما تطبيقاته في مجال الأقتصاد والدراسات الديموغرافية فقد بدأت بالظهور مع بدايات القرن التاسع عشر.

2.1 هدف البحث

يهدف البحث الى أستعمال طريقة ذات مقدرات مضبوطة Exact - وهي طريقة العزوم- في تقدير معلمتي التوزيع اللوجستي، ومقارنتها بمقدرات تقريبية مأخوذة من فكرة طريقة White مثل: المربعات الصغرى وأنحدار الحرف، وأقتراح أستعمال طريقة أنحدار الحرف المعدلة للتوزيع اللوجستي بسبب ندرة مواضيع التقدير التقريبي المستعمل لتقدير معلمات هذا التوزيع (على حد علم الباحث). وتم أستعمال القيم المقدرة لكل معلمة على حدة ومتوسط مربع الخطأ لذلك المقدر، بالأضافة الى معيار متوسط الخطأ النسبي المطلق للمقدر نفسه. وللوصول الى هذا الهدف تم تقسيم البحث الى أربعة أجزاء: يبدأ الجزء الأول، المقدمة وهدف البحث. أما في الجزء الثاني، فقد تم عرض مايخص الجانب النظري لطرائق التقدير المستعملة. وفي الجزء الثالث، تم تقديم الجانب التجريبي المستند الى المحاكاة بأربعة نماذج كل منها بثلاث حجوم عينات. وفي الجزء الأخيراً، تم تلخيص الأستنتاجات التي أفرزها البحث والتوصيات التي خرج بها والبحوث المستقبلية المقترحة ووضع قائمة بالمصادر.

1. الجانب النظري

1.2 التوزيع اللوجستي (السوقي) Logistic Distribution

وهو من توزيعات العائلة الأسية، وغالباً مايستعمل في التطبيقات على منحنى النمو وذو علاقة وثيقة بموضوع الأنحدار مع متغير معتمد ثنائي الأستجابة[1]. ومن أهم التوزيعات المأخوذة من هذا التحويل هو التوزيع اللوجستي اللوغاريتمي والذي يمكن تطبيقه في مجال دوال البقاء أو دوال المعولية على حد سواء[7].

1.1.2 خصائص التوزيع Characteristics of the Distribution

I. دالة الكثافة الأحتمالية Probability Density Function (pdf) إذ

يعبر عن دالة الكثافة الأحتمالية لهذا التوزيع بالصيغة الآتية[5]:

$$f(t;\mu,\sigma)=\frac{e^{\frac{-(t-\mu)}{\sigma}}}{\sigma\left(1+e^{\frac{-(t-\mu)}{\sigma}}\right)^{2}} \quad ; \ -\infty < x < \infty \qquad \dots (1)$$

وأن النمط القياسي لهذا التوزيع يكون عندما: Logistic(μ = 0, σ = 1)، وهو مقارب للتوزيع الطبيعي $N(0,\frac{\pi^2}{3})$.

II. دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution function (cdf)

وتمثل بالصيغة الآتية[5]:

$$F(t;\mu,\sigma)=\frac{1}{1+e^{\frac{-(t-\mu)}{\sigma}}} \quad ; \ -\infty < x < \infty \qquad \dots (2)$$

ويمكن ملاحظة أن:

$$f(t)=F(t)[1-F(t)]$$

III. الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function (mgf)

ويتم التعبير عنها بالصيغة الآتية[5]:

$$M(t)=e^{\mu t}\cdot\Gamma(1-\sigma t)\cdot\Gamma(1+\sigma t) \qquad \ldots (3)$$

أو:

$$M(t)=e^{\mu t}\cdot B(1-\sigma t,1+\sigma t)$$

إذ أن:

$\Gamma(\cdot)$: دالة كاما.

$B(\cdot,\cdot)$: دالة بيتا.

وعند أخذ المشتقة الأولى بالنسبة لـ t وتعويض (t = 0) يتم الحصول على العزم الأول: $M'(0)=\mu$ ... (4)

أما العزم الثاني فيتم الحصول عليه من أخذ المشتقة الثانية للصيغة (3) أعلاه بالنسبة لـ t وتعويض (t=0):

$$M''(0)=\mu^2+\frac{\pi^2\sigma^2}{3} \qquad \ldots (5)$$

IV. الوسط والتباين Mean and Variance

من ملاحظة المعادلة (4) أعلاه يتبين أن وسط التوزيع هو:

$$E(t)=\mu$$

أما تباين التوزيع فيمكن الحصول عليه بالأستناد الى المعادلة (4) و (5) أعلاه:

$$Var(t)=E(t^2)-[E(t)]^2$$

$$Var(t)=\frac{\pi^2\sigma^2}{3} \qquad \ldots (6)$$

2.2 طرائق التقدير Estimation Methods

1.2.2 طريقة العزوم[6] Method of Moments (MOM)

وتستند فكرتها الى إيجاد عزوم التوزيع للمجتمع أولاً ومن ثم مساواتها بعزوم العينة المناظرة لها، أي القيام بعمل أستدلال يجعل معلمتي التوزيع دالتين (إحصائتين) من مشاهدات العينة، وكما في أدناه.

فالعزم الأول ماهو إلاذ عبارة عن:

$$M_1=E(t)=\mu$$

$$m_1=\bar{t}$$

$$\hat{\mu}=\bar{t} \qquad \ldots (7)$$

أما العزم الثاني فهو:

$$M_2=Var(t)+M_1^2$$

$$m_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}S_d \qquad \ldots (8)$$

إذ أن:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}\right)^2}$$

2.2.2 طريقة المربعات الصغرى الأعتيادية Ordinary Least Squares (OLS)

وهي طريقة تحول العلاقة بين متغير الظاهرة والدالة التجميعية (cdf) – دالة اللامعولية- (أو يمكن أستعمالها مع دالة المعولية) لها الى علاقة تصاغ كأنحدار خطي بسيط[(2), (3)].
فبأفتراض الدالة التوزيعية لمتغير t يتبع التوزيع اللوجستي:

$$F(t) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-(t-\mu)}{\sigma}}}$$

وليكن: u = F(t)

$$u = \frac{1}{1 + e^{\frac{-(t-\mu)}{\sigma}}}$$

ليتم الحصول على:

$$e^{\frac{-(t-\mu)}{\sigma}} = u^{-1} - 1$$

وبأخذ لوغاريتم الطبيعي (ln) لطرفي المعادلة أعلاه نحصل على:

$$-\frac{t-\mu}{\sigma} = \ln(u^{-1} - 1)$$

$$\ln(u_i^{-1} - 1) = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} t_i \qquad \dots (9)$$

وبالنظر الى الصيغة (9) أعلاه كنموذج أنحدار خطي بسيط،

$$Y_i = b_0 + b_1 X_i + e_i \qquad \dots (10)$$

أذ أن: b_0 و b_1 هما معلمتي نموذج الأنحدار، وأن: e_i هي الأخطاء العشوائية لـ n من المشاهدات.
وعند أخذ التعويض بنظر الأعتبار يتم الحصول على:

$$X_i = t_i$$

$$b_0 = \frac{\mu}{\sigma}$$

$$b_1 = \frac{-1}{\sigma} \qquad \dots (11)$$

$$Y_i = \ln\left(u^{-1} - 1\right)$$

والغرض من هذا كله هو أجراء تقدير معلمات الصيغة (10) أعلاه، وكما يأتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_i \qquad \dots (12)$$

أن أساس طريقة المربعات الصغرى هو السعي الى تصغير مجموع مربعات الخطأ[2], [3]:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2 \qquad \dots (13)$$

وذلك بأخذ المشتقة الجزئية للصيغة (13) بالنسبة للمعلمتين b_0 و b_1 ومساواتها بالصفر للحصول على القيم التقديرية لها $\hat{b}_0$ و $\hat{b}_1$ بصيغة المصفوفات:

$$\underline{\hat{b}}_{(ols)} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'Y \qquad \dots (14)$$

فتكون تقديرات معلمتي النموذج اللوجستي الأحتمالي بدلالة مقدرات طريقة OLS لمعلمتي الأنحدار الخطي كالآتي:

$$\hat{\mu}_{(OLS)} = \frac{-\hat{b}_{0(OLS)}}{\hat{b}_{1(OLS)}} \qquad \dots (15)$$

$$\hat{\sigma}_{(OLS)} = \frac{-1}{\hat{b}_{1(OLS)}} \qquad \dots (16)$$

3.2.2 طريقة إنحدار الحرف Ridge Regression Method

وهي من الطرائق التي تعول على أيجاد مقدرات الأنحدار بالأستناد الى مصفوفة المعلومات X´X وكما يأتي[4]:

$$\underline{\hat{b}}_{(Rig)} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} = (X'X + kI)^{-1} X'Y \qquad \dots (17)$$

إذ أن: $0 < k < 1$ تمثل معامل الحرف Coefficient of Ridge.

وأن: I هي مصفوفة وحيدة Identity بأبعاد p×p

وأن: p هو عدد المعلمات في نموذج الأنحدار وهي هنا (p = 2).

وتم الأستناد الى الأسلوب الشخصي (Subjective Technique) في هذا البحث لأختيار قيمة k وهي بأن يتم تحديدها بشكل مسبق في الحل ولقد أختار الباحث قيمة (k=0.5). وهو أسلوب يختلف عن الأسلوب الآلي (Automatic Technique) بأن نجعل تحديد k المثلى يكون بشكل آلي من ضمن العديد من قيم k's المرشحة بأستعمال معيار معين. وستكون تقديرات معلمتي النموذج اللوجستي الأحتمالي $\left(\hat{\mu}_{(Ridg.)}, \hat{\sigma}_{(Ridg.)}\right)$ بدلالة مقدرات طريقة Ridge لمعلمتي الأنحدار الخطي بمثل ماجاء في المعادلتين (15) و (16) مع استبدال مقدرات طريقة OLS لمعلمتي الأنحدار (b_0, b_1) بمقدرات طريقة Ridge.

4.2.2 طريقة أنحدار الحرف المعدلة Adjusted Ridge Regression method

تم أستعمال هذه الطريقة مع توزيعات أخرى غير التوزيع اللوجستي سابقاً في مواضيع كدالة المعولية (أو دالة البقاء)، ألاّ أن الباحث أقترح هنا أستعمالها مع التوزيع اللوجستي. وهي طريقة شبيهة بطريقة أنحدار الحرف إلاّ أن أختيار قيمة k ستستبدل بأخرى يعتقد أنها تؤثر في كفاءة تقدير معلمتي نموذج الأنحدار b_0 و b_1 والتي يتم الحصول على تقديراتها من خلال الآتي:

$$\underline{\hat{b}}_{(ARig.)} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} = \left(X'X + k_{adj} I \right)^{-1} X'Y \qquad \dots (18)$$

أذ أن: k_{adj} يتم أيجادها بالصيغة الآتية:

$$k_{adj} = \frac{pS_{OLS}}{\underline{\hat{b}}_{OLS}{}' \underline{\hat{b}}_{OLS}} \qquad \dots (19)$$

وأن:

$$S_{ols} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i \right)^2}{n-p} \qquad \dots (20)$$

وستكون تقديرات معلمتي النموذج اللوجستي الأحتمالي $\left(\hat{\mu}_{(ARidg.)}, \hat{\sigma}_{(ARidg.)} \right)$ بدلالة مقدرات طريقة ARidge لمعلمتي الأنحدار الخطي بمثل ماجاء في المعادلتين (15) و (16) مع استبدال مقدرات طريقة OLS لمعلمتي الأنحدار (b_0, b_1) بمقدرات طريقة ARidge.

3. الجانب التجريبي

1.3 المحاكاة

تم أعداد برنامجاً خاصاً بإستعمال لغة MATLAB version 8.0 (Release 14) البرمجية في أجراء تجارب المحاكاة بمراحلها من توليد البيانات الى أستخراج المقدرات وأخيراً أستخراج قيم معايير المفاضلة بين الطرائق. أذ تم أعادة التجريب لـ (rep = 1000) تكرار، وبحجوم عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة (n = 15, 30, 100) وللنماذج الآتية:

النموذج الأول: Logistic (μ=1.0, σ=0.5).

النموذج الثاني: Logistic (μ=1.0, σ=1.0).

النموذج الثالث: Logistic (μ=1.0, σ=1.5).

النموذج الرابع: Logistic (μ=1.0, σ=2.0).

ويتم توليد بيانات التوزيع اللوجستي كما يأتي:

$$t_i = \mu - \sigma \ln(u_i^{-1} - 1) \qquad \dots (21)$$

أذ أن: u_i متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم القياسي،

أي أن: $u_i \sim$ Standard Uniform(0, 1)

2.3 معايير المقارنة

1.2.3 متوسط مربعات الخطأ Mean Squared Error (MSE)

ويمثل معيار مقارنة تكون فيه األفضلية للقيمة الأصغر الأقرب الى الصفر، وكما في الصيغة:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{rep} \left\{\theta_i - \hat{\theta}_i\right\}^2}{rep} \quad \ldots (22)$$

2.2.3 متوسط الخطأ النسبي المطلق Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

ويمثل معيار مقارنة تكون فيه الأفضلية للقيمة الأصغر الأقرب الى الصفر، وكما في الصيغة:

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^{rep} \left|\theta_i - \hat{\theta}_i\right|}{rep} \quad \ldots (23)$$

وللمعيارين أعلاه، فأن θ : هي أحدى معلمتي التوزيع (μ, σ).
وأن rep: هو عدد التكرارات في تجربة المحاكاة.

3.3 النتائج

تم الحصول على نتائج تقدير معلمتي التوزيع اللجستي وللنماذج وحجوم العينات المستعملة مع معياري المقارنة MSE و MAPE وكما في الجداول أدناه.

جدول (1) تقديرات معلمة الموقع μ

Model	Sample size	Method			
		MOM	OLS	Ridg.	ARidg.
I	15	1.0059	1.0031	0.9684	0.9836
	30	1.0056	1.0004	0.9834	0.9912
	100	1.0010	0.9992	0.9967	1.0017
II	15	1.0118	0.9383	0.9717	1.0063
	30	1.0113	0.9663	0.9839	1.0008
	100	1.0012	0.9933	0.9985	1.0035
III	15	1.0177	0.8815	0.9749	1.0094
	30	1.016	0.9300	0.9843	1.0012
	100	1.0031	0.9829	1.0002	1.0053
IV	15	1.0236	0.8264	0.9781	1.0126
	30	1.0226	0.8882	0.9848	1.0017
	100	1.0041	0.9684	1.0020	1.0070

جدول (2) متوسط مربعات الخطأ MSE لتقديرات معلمة الموقع μ

Model	Sample size	Method				Best
		MOM	OLS	Ridg.	ARidg.	
I	15	0.05901	0.02014	0.025017	0.02413	OLS
	30	0.02784	0.00977	0.01070	0.0104	OLS
	100	0.0085	0.0026	0.0027	0.0026	OLS
II	15	0.2360	0.09312	0.08056	0.08019	ARidg.
	30	0.1113	0.04235	0.03908	0.03894	ARidg.
	100	0.0342	0.01083	0.01065	0.01061	ARidg.
III	15	0.5311	0.1939	0.1812	0.1733	ARidg.
	30	0.2506	0.0950	0.0879	0.0861	ARidg.
	100	0.0771	0.0245	0.0237	0.0239	ARidg.
IV	15	0.9443	0.3222	0.3114	0.3040	ARidg.
	30	0.4455	0.1563	0.1648	0.1521	ARidg.
	100	0.1371	0.0426	0.0422	0.0438	Ridg.

جدول (3) متوسط الخطأ النسبي المطلق MAPE لتقديرات معلمة الموقع μ

Model	Sample size	Method				Best
		MOM	OLS	Ridg.	ARidg.	
I	15	0.1380	0.1197	0.1232	0.1116	ARidg.
	30	0.1099	0.0773	0.0812	0.0800	OLS
	100	0.0501	0.0415	0.0416	0.0412	ARidg.
II	15	0.2444	0.2379	0.2219	0.2232	Ridg.
	30	0.1852	0.1546	0.1546	0.1615	OLS
	100	0.0811	0.0832	0.0823	0.0824	MOM
III	15	0.3611	0.3494	0.3270	0.3349	Ridg.
	30	0.2700	0.2437	0.2298	0.2320	Ridg.
	100	0.1389	0.1253	0.1232	0.1237	Ridg.
IV	15	0.4923	0.4500	0.4465	0.4334	ARidg.
	30	0.3333	0.3054	0.3241	0.3093	OLS
	100	0.1742	0.1679	0.1649	0.1642	ARidg.

يلاحظ من نتائج الجدول (2) أعلاه تفوق طريقة OLS على باقي الطرائق لنتائج النموذج الأول ولجميع حجوم العينات. فيما كانت طريقة ARidg. هي الأفضل في النماذج الثلاث الأخرى فيما عدا حالة حجم العينة الكبير (n=100) أذ كانت الأفضل في النموذج الرابع هي طريقة Ridg.. أما نتائج الجدول (3) أعلاه فتشير الى تفوق طريقة OLS على باقي الطرائق لنتائج جميع النماذج ولحجم عينة (n=30) فقط. فيما كانت طريقة Ridg. هي الأفضل للنموذج الثالث ولجميع حجوم العينات.

جدول (4) تقديرات معلمة القياس σ

Model	Sample size	Method			
		MOM	OLS	Ridg.	ARidg.
I	15	0.4737	0.5427	0.5653	0.5111
	30	0.4887	0.5177	0.5282	0.5052
	100	0.4964	0.5050	0.5081	0.5018
II	15	0.9475	1.0818	1.0494	1.0223
	30	1.0104	0.9775	1.0219	1.0351
	100	0.9928	1.0100	1.0067	1.0036
III	15	1.4212	1.6155	1.5514	1.5334
	30	1.4662	1.5516	1.5233	1.5156
	100	1.4893	1.5150	1.5075	1.5054
IV	15	1.8950	2.1443	2.0580	2.0446
	30	1.9550	2.0668	2.0266	2.0208
	100	1.9857	2.0072	2.0199	2.0080

جدول (5) متوسط مربعات الخطأ MSE لتقديرات معلمة القياس σ

Model	Sample size	Method				Best
		MOM	OLS	Ridg.	ARidg.	
I	15	0.0133	0.0160	0.0159	0.0086	ARidg.
	30	0.0062	0.0045	0.0047	0.0034	ARidg.
	100	0.0020	0.0008	0.0008	0.0007	ARidg.
II	15	0.0535	0.0601	0.0385	0.0344	ARidg.
	30	0.0248	0.0141	0.0146	0.0138	ARidg.
	100	0.0030	0.0033	0.0032	0.0031	MOM
III	15	0.1204	0.1257	0.07743	0.0806	Ridg.
	30	0.0558	0.0400	0.0310	0.0318	Ridg.
	100	0.0180	0.0075	0.0070	0.0071	Ridg.
IV	15	0.21409	0.2097	0.1401	0.1376	ARidg.
	30	0.09923	0.0698	0.0559	0.0552	ARidg.
	100	0.03212	0.0126	0.0134	0.0130	OLS

جدول (6) متوسط الخطأ النسبي المطلق MAPE لتقديرات معلمة القياس σ

Model	Sample size	Method				Best
		MOM	OLS	Ridg.	ARidg.	
I	15	0.1898	0.1673	0.1747	0.1354	ARidg.
	30	0.1023	0.0958	0.0986	0.0871	ARidg.
	100	0.4800	0.0464	0.0470	0.0451	ARidg.
II	15	0.1505	0.1644	0.1403	0.1354	ARidg.
	30	0.0997	0.0956	0.0885	0.0871	ARidg.
	100	0.4498	0.0464	0.0454	0.0451	MOM
III	15	0.1411	0.1606	0.1354	0.1368	Ridg.
	30	0.1064	0.0953	0.0871	0.0876	Ridg.
	100	0.4676	0.0463	0.0451	0.0452	Ridg.
IV	15	0.1613	0.1570	0.1359	0.1354	ARidg.
	30	0.0987	0.0948	0.0874	0.0871	ARidg.
	100	0.0513	0.0450	0.0451	0.0463	OLS

أفرزت نتائج الجدولين (5) و (6) أفضلية واضحة لطريقة .ARidg على ماسواها من الطرائق، فيما عدا حالة النموذج الثاني وبحجم عينة (n=100) أذ كانت MOM هي الأفضل، وحالة النموذج الرابع وبحجم عينة (n=100) كذلك فقد تفوقت طريقة OLS. أما نتائج النموذج الثالث فقد كانت الأفضلية لطريقة .Ridg.

4. الأستنتاجات والتوصيات

1.4 الأستنتاجات

أ. أن طريقة .ARidg كانت لها الأفضلية على طرائق التقدير الأخرى ولجميع حجوم العينات ولجميع النماذج. وذلك لأضافتها معلومات الى مصفوفة $X'X$ عن طريق المعامل $k_{adj.}$.

ب. تقارب طريقتي OLS و .Ridg في حالة حجوم العينات الصغيرة والمتوسطة في حين يظهر تفاوت بينهما في حالة العينات الكبيرة بتفوق طريقة OLS.

ج. تناقص قيم معياري المقارنة MSE و MAPE مع زيادة حجم العينة ولجميع النماذج ولجميع الطرائق.

د. أظهرت نتائج النموذج الرابع عموماً أفضلية على النماذج الأخرى.

2.4 التوصيات

يوصي الباحث بأستعمال طريقة .ARidg لما لها من كفاءة عالية متأتية من المعلومات الأضافية التي تزودنا به هذا الطريقة عن التوزيع تحت الدرس مقارنة بالطرائق الأخرى.

3.4 الدراسات المستقبلية

ينصح الباحث بمحاولة العمل المستقبلي في أحد المواضيع المتعلقة بهذا البحث، وهي كما يأتي:

أ. أستعمال معيار آلي Automatic لأيجاد قيمة k يتم فيه أختيار القيمة المثلى وفق معيار معين من بين قيم عديدة مرشحة من الـ k's، أو عن طريق دالة لامعلمية معينة كأن تكون الدالة اللبية لكونها تقع بين الصفر والواحد.

ب. أجراء تقدير معولية التوزيع اللوجستي أي تقدير دالة R(t).

ج. أستعمال الأسلوب البيزي، أو طريقة المربعات الصغرى التكرارية الموزونة في التقدير.

د. أستعمال المقاييس التجزيئية Quantiles في عملية التقدير.

References المصادر

1. Augustin, Thomas; (2005); "An Approach to Combine the Logistic Threshold Model of Psychophysics with Bradley – Terry – Luce Models of Choice Theory"; Journal of Mathematical Psychology Vol. 49, pp. 70–79.
2. Bickel, P.J. and Doksum, K.A.; (1977); "Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics"; Holden-Day, Inc., San Francisco.
3. Feras, S.M. and Sharad, D.G.; (2009); "Ridge Regression Estimator: Combining Unbiased Ridge Regression Methods of Estimation"; Surveys in Mathematics an its Applications; Vol.
4. Ebeling, C.E.; (1997); "An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering"; McGraw – Hill companies, New-York.
5. Johnson, Norman L. and Samuel Kotz; (1970); "Continuous Univariate Distributions - 2"; New York: Houghton Mifflin.
6. Mahdi, Smail and Cenac, Myrtene; (2006); "Estimating and Assessing the Parameters of the Logistic and Rayleigh Distributions from Three Methods of Estimation"; Caribb J. Math. Comput. Sci.; Vol. 13, pp. 25 – 34.
7. Rao, G. S.; Kantam, R.; (2010); " Estimation of Reliability in Multicomponent Stressstrength Model: Log-Logistic Distribution"; Journal of Applied Statistical Analysis, Vol. 3, No.2, pp. (75 – 84).