تحديد السياسة المثلى لدالة معولية توزيع باريتو المقدرة باستخدام البرمجة الديناميكية

م. سرمد علوان صالح الدهلكي   م. سميرة خليل
جامعة بغداد- كلية الإدارة والاقتصاد- قسم الإحصاء

الخلاصة

أن الهدف من استخدام تكنولوجيا متقدمة يتطلب أيجاد تقنية رياضية ذات كفاءة عالية في حل المسائل المعقدة تسمى بالبرمجة الديناميكية بطرائقها التكرارية (الأمامية والعكسية) التي يتم من خلالها إيجاد بسلسلة من القرارات المرتبطة بدالة معولية توزيع باريتو المقدرة باستخدام طريقتي (دالة الامكان الأعظم) والعزوم لغرض تحديد السياسة المثلى

Abstract

The goal (purpose) from using development technology that require mathematical procedure related with high Quality & sufficiency of solving complex problem called Dynamic Programming with in recursive method (forward & backward) through finding series of associated decisions for reliability function of Pareto distribution estimator by using two approach Maximum likelihood & moment .to conclude optimal policy

1- الجانب النظري

1-1 البرمجة الديناميكية[4] Dynamic Programming

وتسمى أيضاً بالبرمجة المتعددة المراحل (Multi-Stage) وهي ذات أسلوب رياضي تكراري تقني تحليلي ذو فائدة كبيرة جداً في اتخاذ مجموعة من القرارات المتعلقة بعلاقات متبادلة لتحديد أقصر قدر ممكن من الكفاءة التي تعظم أو تقلل من الفعاليات الإجمالية، وينفرد أسلوب تحليل المشاكل باستخدام البرمجة الديناميكية بكونه يفترض إمكانية تقسيم عمليات القرار إلى عدد من المراحل (Stages) أو الخطوات التكرارية المتتابعة إلى الأمام أو بالعكس.
وتعتمد آلية حساب البرمجة الديناميكية على مبدأ الامثلية الذي ينص على أن الحل الأمثل يتكون من سلسلة من الحلول المثلى المتتابعة، والطريقة المستخدمة لمعالجة هذه الحالة تكمن في تقسيم المشكلة قيد الدراسة إلى مشاكل جزئية (فرعية) بسيطة ثم إيجاد الحل الأمثل لكل من المشاكل الجزئية بعد ذلك يتم ربط جميع الحلول المثلى مع بعضها بأسلوب رياضي لكي تعطي حلاً أمثلاً للمشكلة ككل وهذا ما أشار إليه العالِم (بيلمان) سنة 1950.

2-1 ألطرائق المقترحة لإيجاد الحل الأمثل لأنموذج البرمجة الديناميكية

أ- الطريقة التكرارية الأمامية المقترحة Proposed forward Recursive Method

أن آلية حساب هذه الطريقة وفقاً للأنموذج الرياضي الأتي

$$Z_j^*(X_j) = \underset{\forall X_j}{Max}\left\{\begin{array}{ll} \hat{R}_j(X_j) & ; j=1 \\ \hat{R}_j(X_j) * Z^*_{j-1}(D_j - X_j) & ; j = 2,3,\ldots\ldots,n \\ D_j \le X_j & \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(1)$$

ب- الطريقة التكرارية العكسية المقترحة Proposed Backward Recursive Method

أن آلية حساب هذه الطريقة وفقاً للأنموذج الرياضي الأتي

$$Z_j^*(X_j) = \underset{\forall X_j}{Max}\left\{\begin{array}{ll} \hat{R}_j(X_j) & ; j=1 \\ \hat{R}_j(X_j) * Z^*_{j-1}(D_j - X_j) & ; j = n-1, n-2,\ldots\ldots,3,2,1 \\ D_j \le X_j & \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(2)$$

إذ أن

$\hat{R}_j(X_j)$: تمثل أعلى معولية مقدرة باستخدام توزيع باريتو

$Z^*_{j-1}(X_{j-1})$: تمثل دالة المعولية المثلى السابقة

$Z_j^*(X_j)$: تمثل دالة المعولية المثلى التجميعية للأنموذج ككل

X_j : تمثل متغيرات القرار لكل مرحلة

D_j : تمثل المتاح من الإمكانيات لكل مرحلة

مع ملاحظة التحوير الأتي $\boxed{X_{j-1} = D_j - X_j}$

إما الأنموذج الرياضي للبرمجة الخطية فهو كالأتي

$$\left[\begin{array}{l} Max\ Z = \prod_{i=1}^{n} \hat{R}_j(X_j) \\ S.T. \\ \qquad \sum_{i=1}^{n} X_j \leq D \\ \qquad X_j \geq 0 \end{array}\right] ....(3)$$

2-1 توزيع باريتو[2] Pareto Distribution

يُنسب هذا التوزيع إلى عالِم الاقتصاد الإيطالي(Vilfredo Pareto) الذي عاش الفترة ما بين (1848-1923) ، إذ وضع أسس هذا التوزيع في مجالات الاقتصاد من خلال دراسة مستفيضة فيما يخص توزيع الدخول (Incomes) عندما تكون متجاورة لحد معلوم مثل(β). ويمكن اشتقاق هذا التوزيع وفقاً لمعدل الفشل(Failure Rate) الذي يسمى أيضاً معدل المخاطرة(Hazard Rate) وكالأتي[5]

$$h(x) = \frac{\alpha}{x} \qquad x > \beta\,;\alpha > 0\,.........(4)$$

وبتطبيق العلاقة التي تربط بين دالة الكثافة الاحتمالية(Probability Mass Function) ومعدل المخاطرة[1]

$$f(x) = h(x).Exp\left\{-\int_{\beta}^{x} h(u)du\right\}.........(5)$$

نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو للمعلمتين(α,β)

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \qquad \beta \leq x\,;\alpha > 0\,,\,\beta > 0\,.........(6)$$

إذ أن

α : تمثل معلمة الشكل Shape Parameter

β : تمثل معلمة القياس Scale Parameter

1-2-1 الدالة التجميعية ودالة المعولية(البقاء) لتوزيع باريتو

إن دالة البقاء لتوزيع باريتو تحسب وفقاً للصيغة

$$R(x) = P(X \geq x) = \int_{x}^{\infty} f(u,\alpha,\beta)du = \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} ....(7)$$

وعليه فان الدالة التجميعية

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u,\alpha,\beta)du = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} ....(8)$$

مع ملاحظة أن $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$; $\lim_{x\to 0} R(x) = 1$ وكذلك $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$; $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$

1-2-2 أن العزوم ذو المرتبة (n) حول نقطة الأصل للمتغير العشوائي تحسب كالأتي

$$E(X^n) = \int_{\beta}^{\infty} X^n \, f(x;\alpha,\beta)\, dx$$

$$E(X^n) = \int_{\beta}^{\infty} X^n \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx$$

$$= \alpha\beta^{\alpha} \int_{\beta}^{\infty} X^{n-\alpha-1} \, dx$$

وعليه فان

$$\boxed{E(X^n) = \frac{\alpha}{\alpha - n}\beta^n \quad ; \; n < \alpha \; ....(9)}$$

استناداً إلى ما تقدم فان

$$\boxed{E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\beta \quad ; \alpha > 1}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{\alpha}{(\alpha-2)}\beta^2 - \left(\frac{\alpha}{(\alpha-1)}\beta\right)^2$$

$$= \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\beta^2 \quad ; \; \alpha > 2$$

1-2-3 طرائق تقدير معلمة الشكل لتوزيع باريتو[1,2]

هناك عدة طرائق لتقدير معلمة الشكل ، وسنتطرق فقط إلى

i. طريقة الامكان الأعظم Maximum Likelihood Method :

تتميز هذه الطريقة بخاصتين الثبات و الاتساق غالباً ، ويمكن تعريف التقدير لهذه الطريقة بأنه قيم المعلمات التي تجعل دالة الامكان في نهايتها العظمى ،وبما أن β تمثل الحد الأدنى للمتغير العشوائي X لذلك فان لوغاريتم log(L)يمكن تعظيمها تحت الشروط

$$\boxed{\hat{\beta} \le \min_i xi}$$

ومن هذه المتباينة نجد أن قيمة $\hat{\beta}$ التي تجعل لوغاريتم دالة الإمكان في نهايتها العظمى كالأتي

$$\boxed{\hat{\beta} = \min_i xi = x_{(1)} ....(10)}$$

وعلى افتراض $(x_1,x_2,\dots\dots,x_n)$ عينة عشوائية قوامها(n) مسحوبة من مجتمع تتوزع مفرداته بحسب دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو ذو المعلمتين (α,β) ، وعليه فان دالة الامكان(L) للمشاهدات هي حسب الصيغة الآتية

$$L(x_1, x_2,\dots\dots\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}}\right) = \frac{\alpha^{n}\beta^{n\alpha}}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha+1}}$$

ولغرض تقدير دالة الامكان يجب تحويلها إلى الشكل الخطي وذلك عن طريق أخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة

$$\log L(x_1, x_2,\dots\dots\dots,x_n) = n\log(\alpha) + n\alpha\log(\beta) - (\alpha+1)\sum\log(x_i)$$

إذ أن $0 < \beta < x_{(1)}\ ; \alpha > 0$ [1]

ولإيجاد الصيغة التقديرية لمعلمة الشكل (α) التي تجعل دالة الامكان الأعظم في نهايتها العظمى ، نجد المشتقة الجزئية الأولى للدالة(L) بالنسبة لمعلمة الشكل (α) وذلك من خلال مساواة المشتقة الجزئية الأولى بالصفة وحل المعادلة نحصل على نقطة التقدير ، ويمكن التحقق بسهولة بأن المشتقة الجزئية الثانية للدالة (L) بأنها سالبة وذلك تكون النقطة الحرجة نهاية عظمى وكالاتي

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log L = \frac{n}{\alpha} + n\log\beta - \sum\log(x_i)\dots\dots\dots(11)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\log L = \frac{n}{\alpha} + n\log\beta - \sum\log(x_i)\\
&\Rightarrow \frac{n}{\hat\alpha} + n\log\hat\beta - \sum\log(x_i) = 0\\
&\frac{n}{\hat\alpha} = \sum\log(x_i) - n\log\hat\beta\\
&\therefore\ \hat\alpha = \frac{n}{\sum(\log(x_i) - \log\hat\beta)}\\
&\hat\alpha = \frac{n}{\sum\log(x_i/\hat\beta)}
\end{aligned}$$

وبما أن مقدر β حسب الصيغة (10) ، وعليه فان مقدر المعلمة α يصبح كالأتي

$$\hat\alpha_{ML} = \frac{n}{\sum\log(x_i/x_{(1)})}\dots\dots\dots(12)$$

وهو مقدر متحيز

وبما أن مقدرات دالة الامكان تتصف بخاصية الثبات ، وعله فان مقدر دالة المعولية كالأتي

$$\hat{R}_{ML}(x)=\left[\left(\frac{\hat{\beta}_{ML}}{x}\right)^{\hat{\alpha}_{ML}}=\left(\frac{x_{(1)}}{x}\right)^{\frac{n}{\sum \log(x_i/x_{(1)})}}\right] ....(13)$$

ii. طريقة العزوم[10] Moment Method

ولغرض إيجاد مقدر العزوم $\hat{\alpha}$ للمعلمة α نتبع الخطوات الآتية :

بما أن متوسط العينة = متوسط المجتمع

$$\mu_1=\hat{m}_1$$

$$E(x)=\frac{1}{n}\sum x_i=\overline{X}$$

$$E(x)=\int_{\beta}^{\infty} x\,\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha-1}}\,dx$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$$

$$\therefore\ \overline{X}=\frac{\hat{\alpha}_{mo}\hat{\beta}_{mo}}{\hat{\alpha}_{mo}-1}$$

and

$$x_{(1)}=\frac{n\hat{\alpha}_{mo}\hat{\beta}_{mo}}{n\hat{\alpha}_{mo}-1}$$

حيث $\overline{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ، وبحل المعادلتين أعلاه نحصل على

$$\hat{\alpha}_{mo} = \frac{n\overline{X} - x_{(1)}}{n(\overline{X} - x_{(1)})} \quad ....(14)$$

$$\hat{\beta}_{mo} = \frac{x_{(1)}(n\hat{\alpha}_{mo} - 1)}{n\hat{\alpha}_{mo}} \quad ....(15)$$

وعليه فان مقدر دالة المعولية كالآتي

$$\hat{R}_{mo}(x) = \left(\frac{\hat{\beta}_{mo}}{x}\right)^{\hat{\alpha}_{mo}} = \left[\left(\frac{\frac{x_{(1)}(n\hat{\alpha}_{mo} - 1)}{n\hat{\alpha}_{mo}}}{x}\right)^{\frac{n\overline{X} - x_{(1)}}{n(\overline{X} - x_{(1)})}}\right] \quad ....(16)$$

2- الجانب العملي

1-2 المحاكاة Simulation وتتضمن الخطوات الآتية

i يتم اختيار القيم الافتراضية لمعلمتي توزيع باريتو وكالأتي

Models	α	B
Model(1)	1	1.5
Model(2)	1	2
Model(3)	2	1.5
Model(4)	2	1
Model(5)	1	1
Model(6)	2	2

مع الأخذ بنظر الاعتبار أن العينة قوامها (n=10)

ii استخدام محاكاة مونت- كارلو[7] لتوليد بيانات عشوائية تخضع لتوزيع باريتو ،وذلك عن طريق استخدام معكوس الدالة التجميعية وكالأتي

$$R = F(x) \Rightarrow x = F^{-1}(R)$$

وعليه فان الصيغة العامة لتوليد بيانات تخضع لتوزيع باريتو كالأتي

$$R = 1 - \frac{\beta^{\alpha}}{x^{\alpha}} \rightarrow \frac{\beta^{\alpha}}{x^{\alpha}} = 1 - R \rightarrow x^{\alpha} = \left(\frac{1}{1-R}\right)\beta^{\alpha}$$

$$\boxed{\therefore \quad x = \left(\frac{1}{1-R}\right)^{1/\alpha} \beta \;\ldots\ldots\ldots(16)}$$

إذ أن R : متغير عشوائي يخضع للتوزيع المنتظم المستمر على الفترة (0,1)

iii يتم تقدير دالة المعولية لمعلمتي توزيع باريتو ، وحسب الطرائق المستخدمة في الجانب النظري وكما في الجداول أدناه

t	Real	ML	Mom
1.20	.88	.97	.85
2.07	.70	.73	.60
2.92	.33	.59	.52
3.80	.50	.49	.41
4.75	.43	.42	.31
5.40	.38	.37	.29
6.49	.35	.32	.23
7.38	.31	.29	.21
8.27	.29	.26	.18
9.15	.26	.24	.15

جدول رقم (1) يوضح مقدرات طرائق التقدير لدالة المعولية للأنموذج الأول

t	Real	ML	Mom
1.20	.89	.98	.84
2.07	.75	.80	.73
2.92	.66	.68	.60
3.80	.59	.59	.48
4.75	.53	.52	.45
5.40	.48	.47	.36
6.49	.44	.42	.35
7.38	.40	.39	.26
8.27	.38	.36	.29
9.15	.35	.33	.20

جدول رقم (2) يوضح مقدرات طرائق التقدير لدالة المعولية للأنموذج الثاني

t	Real	ML	Mom
1.20	.87	.96	.83
2.07	.59	.60	.52
2.92	.43	.41	.36
3.80	.32	.30	.26
4.75	.25	.23	.21
5.40	.20	.18	.14
6.49	.16	.15	.11
7.38	.14	.12	.19
8.27	.12	.10	.09
9.15	.10	.09	.08

جدول رقم (3) يوضح مقدرات طرائق التقدير لدالة المعولية للأنموذج الثالث

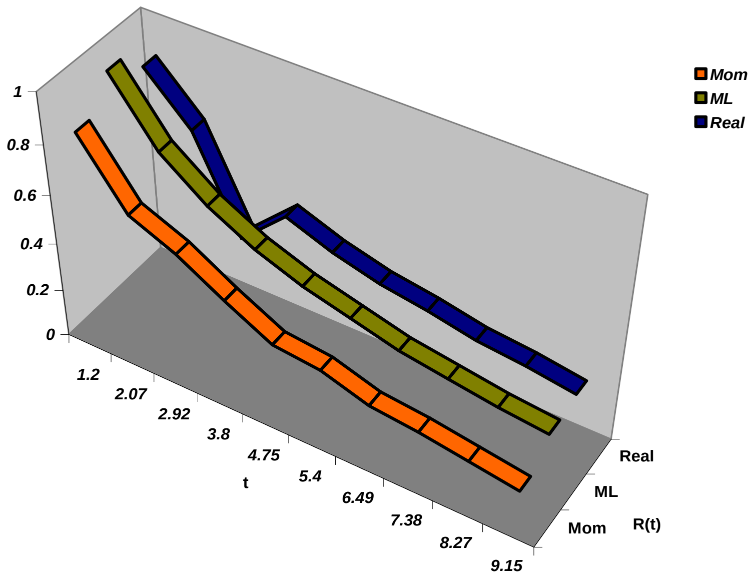
t	Real	ML	Mom
1.20	.82	.89	.82
2.07	.39	.37	.32
2.92	.23	.21	.18
3.80	.15	.13	.12
4.75	.10	.09	.08
5.40	.07	.07	.05
6.49	.06	.05	.05
7.38	.04	.04	.03
8.27	.03	.03	.02
9.15	.03	.03	.01

جدول رقم (4) يوضح مقدرات طرائق التقدير لدالة المعولية للأنموذج الرابع

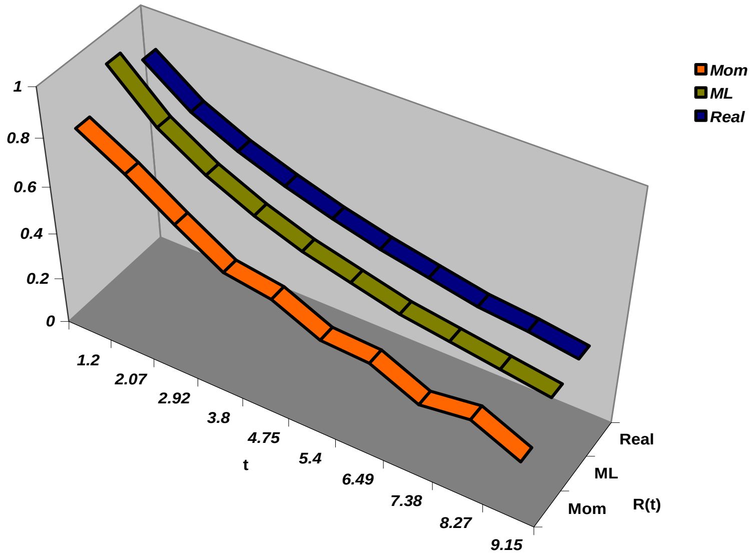
t	Real	ML	Mom
1.20	.83	.93	.82
2.07	.48	.47	.37
2.92	.33	.31	.23
3.80	.26	.23	.16
4.75	.21	.19	.12
5.40	.17	.16	.09
6.49	.15	.13	.08
7.38	.13	.12	.07
8.27	.12	.10	.06
9.15	.10	.09	.05

جدول رقم (5) يوضح مقدرات طرائق التقدير لدالة المعولية للأنموذج الخامس

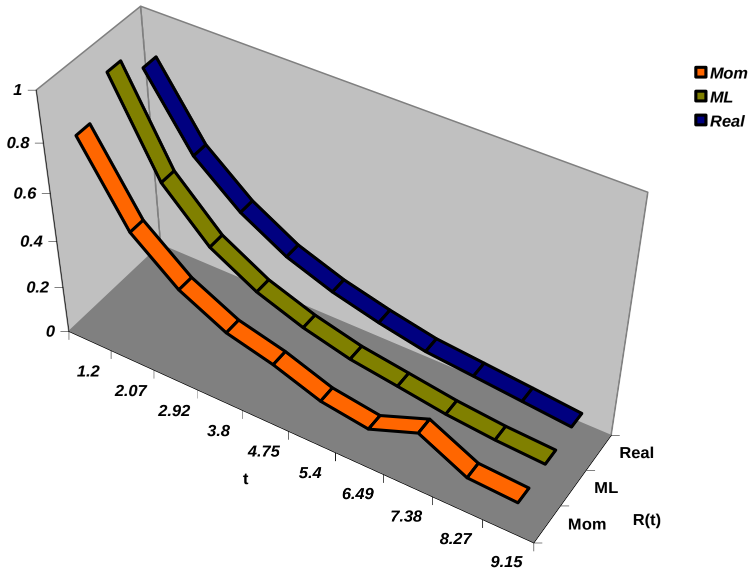
t	Real	ML	Mom
1.20	.87	.97	.86
2.07	.54	.53	.49
2.92	.36	.34	.31
3.80	.26	.24	.22
4.75	.19	.18	.16
5.40	.15	.14	.12
6.49	.12	.11	.10
7.38	.10	.09	.08
8.27	.08	.07	.07
9.15	.07	.06	.05



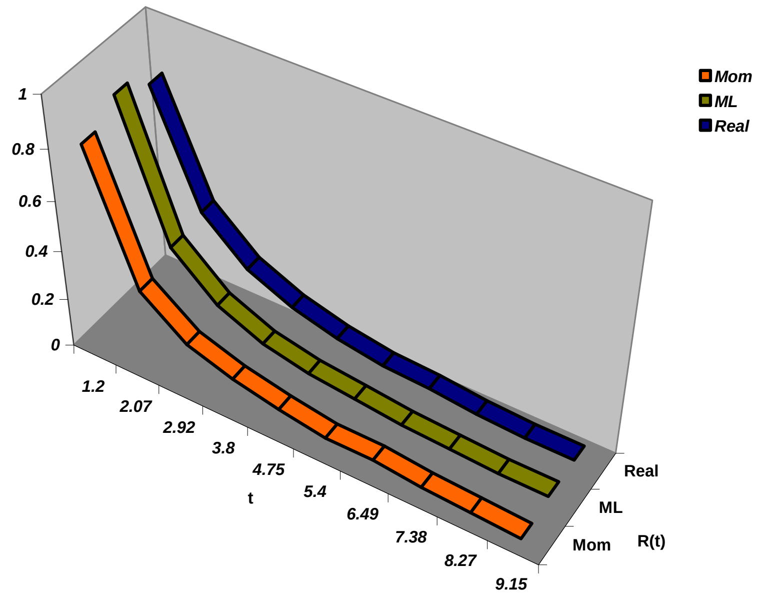
شكل (1) يبين التغير في دالة المعولية مع الزمن للأنموذج الأول



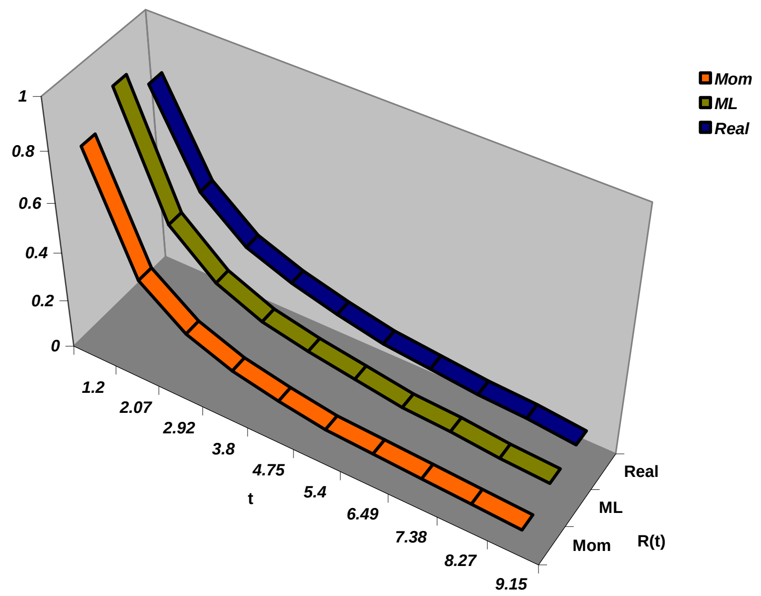
شكل (2) يبين التغير في دالة المعولية مع الزمن للأنموذج الثاني



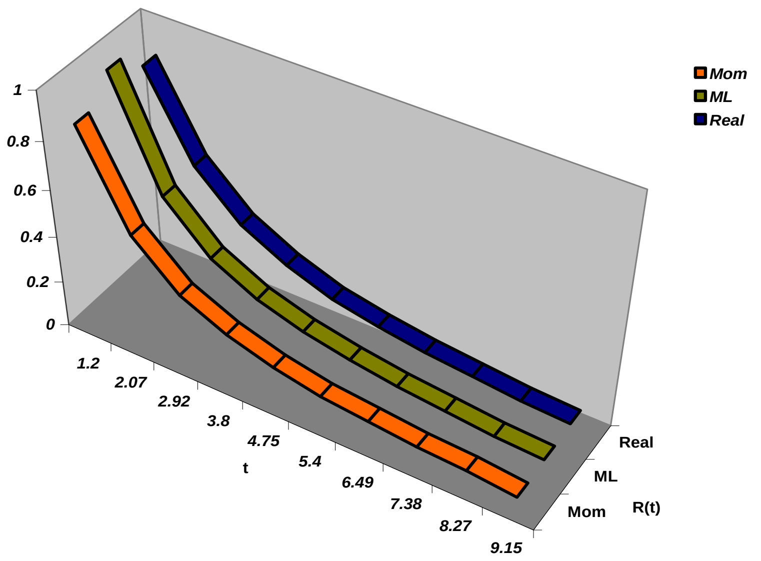
شكل (3) يبين التغير في دالة المعولية مع الزمن للأنموذج الثالث



شكل (4) يبين التغير في دالة المعولية مع الزمن للأنموذج الرابع



شكل (5) يبين التغير في دالة المعولية مع الزمن للأنموذج الخامس


Mom
ML
Real
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1.2
2.07
2.92
3.8
4.75
5.4
6.49
7.38
8.27
9.15
t
Real
ML
Mom
R(t)

iv تحليل النتائج :

من خلال النتائج المعروضة في الجداول والأشكال (1),(2),(3),(4),(5) المذكورة سابقاً ، نلاحظ بأن القيم التقديرية لدالة المعولية التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة الإمكان الأعظم (ML) هي الأكثر تقارباً من القيم الافتراضية لهذه الدالة مما يدل على إمكانية هذه الطريقة من حيث المرونة والاتساق في أعطاء النتائج مقارنةً بطريقة العزوم .

2-2 استخدام البرمجة الديناميكية لتحديد المعولية المثلى : وتتضمن الخطوات الآتية

i نختار أعلى معولية مقدرة من جميع النماذج لتوزيع باريتو ولجميع طرائق التقدير وكالأتي

Models	Maximum Reliability Estimator		
	Real	ML	Mom.
Model(1)	0.88	0.97	0.87
Model(2)	0.89	0.98	0.88
Model(3)	0.87	0.96	0.86
Model(4)	0.82	0.89	0.81
Model(5)	0.83	0.93	0.82
Model(6)	0.87	0.97	0.86

ii تطبيق الطريقة التكرارية الأمامية وكذلك العكسية لإيجاد السياسة المثلى لدالة المعولية المقدرة لتوزيع باريتو كما في المعادلة (1),(2) المذكورة سابقاً في الجانب النظري وكالأتي

❖ الطريقة التكرارية الأمامية

Stage one:

D_1	X_1^*	$Z_1^*(X_1^*)$
0	0	0.88
1	1	0.89
2	2	0.87
3	3	0.82
4	4	0.83
5	5	0.87

Stage two:

D_2	X_2^*	$D_2 - X_2^*$	$R_2(X_2^*)*Z_1^*(D2 - X2*)$	$Z_2^*(X_2^*)$	X_2^*
0	0	0	0.8536	0.8536	0
1	0	1	0.8633	0.8633	0
	1	0	0.8624		
2	0	2	0.8439	0.8722	1
	1	1	0.8722		
	2	0	0.8448		
3	0	3	0.7954	0.8544	2
	1	2	0.8526		
	2	1	0.8544		
	3	0	0.7832		
4	0	4	0.8051	0.8352	2
	1	3	0.8036		
	2	2	0.8352		
	3	1	0.7921		
	4	0	0.8184		

5	0	5	0.8536	0.8624	5
	1	4	0.8134		
	2	3	0.7872		
	3	2	0.7743		
	4	1	0.8277		
	5	0	0.8624		

Stage three:

D_3	X_3^*	$D_3 - X_3^*$	$R_3(X_3^*)*Z_2^*(D_3 - X_3^*)$	$Z_3^*(X_3^*)$	X^*_3
5	0	5	0.750288	0.759704	5
	1	4	0.734976		
	2	3	0.734786		
	3	2	0.706482		
	4	1	0.707906		
	5	0	0.759704		

❖ الطريقة التكرارية العكسية

Stage three:

D_3	X_3^*	$Z_3^*(X_3^*)$
0	0	0.87
1	1	0.88
2	2	0.86
3	3	0.81
4	4	0.82
5	5	0.86

Stage two:

D_2	X_2^*	$D_2 - X_2^*$	$R_2(X_2^*)*Z_1^*(D2 - X2*)$	$Z_2^*(X_2^*)$	X_2^*
0	0	0	0.8439	0.8439	0
1	0	1	0.8536	0.8536	0
	1	0	0.8526		
2	0	2	0.8342	0.8624	1
	1	1	0.8624		
	2	0	0.8352		
3	0	3	0.7857	0.8448	2
	1	2	0.8428		
	2	1	0.8448		
	3	0	0.7743		
4	0	4	0.7954	0.8256	2
	1	3	0.7938		
	2	2	0.8256		
	3	1	0.7832		
	4	0	0.8091		

5	0	5	0.8633	0.8633	0
	1	4	0.8036		
	2	3	0.7776		
	3	2	0.7654		
	4	1	0.8184		
	5	0	0.8526		

Stage one:

D_1	X_1^*	$D_1 - X_1^*$	$R_1(X_1^*)*Z_2(D_1 - X_1^*)$	$Z_1^*(X_1^*)$	X^*_1
5	0	4	0.759704	0.759704	0
	1	3	0.7344784		
	2	2	0.734976		
	3	1	0.707168		
	4	0	0.715792		
	5		0.742632		

3- الاستنتاجات

أ- مقدر دالة الإمكان الأعظم لكل من معلمتي الشكل والقياس لتوزيع باريتو هو الأفضل من مقدر العزوم وذلك بسبب تقارب القيم التقديرية من القيم الافتراضية لدالة المعولية

ب- عملية صنع القرار تمت باستخدام مقدرات دالة الإمكان الأعظم مما يدل على جودة هذه الطريقة وذلك بالاعتماد على النتائج المتحققة ، إما عملية اتخاذ القرار لتقييم أداء الأنموذج فيتطلب الأمر أسلوب رياضي تقني (البرمجة الديناميكية) للوصول إلى امثل معولية مقدرة مثلى لأنها تعطي نفس النتائج عند تطبيق طرائقها.

4- المصادر

1- الجاسم ، صباح هادي و لقاء العلوي (2003)"ملاحظات حول توزيع باريتو العام " المؤتمر العلمي التاسع لكلية الرافدين الجامعة

2- الجاسم ، صباح هادي وزكي الصراف (2003) " نظرية القرارات الإحصائية "دار الحكمة للنشر والطباعة

3- صالح ، ستار (2006) "مقارنة أسلوب بيز مع طرائق أخرى لتقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول" رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد-جامعة بغداد

4-Abert W.Marshall & Dlkin (2007)" Life Distributions " Springer Science Business Media , LLC.

5-Dived & Zheng (2003)" Dynamic Control of Quality in Production –inventory Systems " Springer Verlag New York , INC.

6-Lee & Wenyu (2003)" statistical Method For Survival Data Analysis " Wiley & Sons , INC.

7-Kurt Binder (2001) " Monte – Carlo Molecular Dynamic Simulation " Oxford University Press , INC.

8- Josef (2001) Estimation the parameters of Pareto distribution. The <u>web site is</u> www.math.umt.edu./giden/pareto.pdf.