مقارنة بعض طرائق تقدير انموذج GM(1,1) بوجود بيانات مفقودة مع تطبيق عملي

أ. م. د. فراس احمد محمد / كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد
الباحث / نور سليم

تاريخ التقديم:2017/4/10
تاريخ القبول:2017/6/8

المستخلص

يقدم هذا البحث الانموذج الرمادي GM(1,1) من الرتبة الأولى و بمتغير واحد و هو أساس نظرية النظام الرمادي تناول هذا البحث خصائص الانموذج الرمادي ومجموعة من طرائق تقدير معالم الانموذج الرمادي GM(1,1) وهي طريقة المربعات الصغرى (LS) ، طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) ، طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) و طريقة الانحدار التدريجي (DS) حيث تمت المقارنة بين هذه الطرق اعتمادا على نوعين من المقاييس متوسط مربع الخطأ (MSE) ومتوسط مطلق الخطأ النسبي (MAPE) وبعد إجراء المقارنة باستخدام المحاكاة تم تطبيق أفضل طريقة على بيانات حقيقية متمثلة بمعدل الاستهلاك لنوعين من الزيوت الوقود الثقيل (HFO) ووقود الديزل (D.O) وتم تطبيق عدة اختبارات للتأكد من دقة الانموذج الرمادي GM(1,1) . إن أهم النتائج التي توصلنا إليها هو إن طريقة المربعات الصغرى (LS) هي أفضل طريقة لتقدير معالم هذا الانموذج إذ عند تطبيقها أثبتت حصولها على أفضل النتائج و استخدمت هذه الطريقة في عملية معالجة إحدى مشاكل هذه البيانات و هي القيم المفقودة و كذلك تم الاعتماد عليها في عملية التنبؤ للقيم المستقبلية .

المصطلحات الرئيسة للبحث/ الانموذج الرمادي GM(1,1) ; طريقة المربعات الصغرى (LS) ; طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) ; طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) ; طريقة الانحدار التدريجي (DS) ; الوقود الثقيل (HFO) وقود الديزل (D.O) .

*البحث مستل من رسالة ماجستير

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
العدد 103 المجلد 24
الصفحات 420-437

1- المقدمة Introduction

يمكن تعريف اللون الذي يمثل النظام بأنه وصف لدرجة وضوح والمعلومات المتوفرة وكميتها عن ذلك النظام ، فعلى سبيل المثال نظام المعلومات المعروفة و الواضحة تماما يسمى بالنظام الأبيض و نظام المعلومات غير الواضحة والغير معروفة تماما يسمى بالنظام الأسود ، أما إذا كانت المعلومات معروفة جزئيا و مجهولة جزئيا فهو ما يسمى بالنظام الرمادي ، نشأت نظرية النظام الرمادي من قبل البروفيسور الصيني Julong Deng في عام 1982 إذ تعد هذه النظرية أسلوباً جديداً يدرس ويعالج حالة غير مؤكدة من النظام باستخدام كمية صغيرة من البيانات [10] وتقوم هذا النظرية بدراسة المشاكل التي تظهر في العينات الصغيرة و المعلومات الفقيرة والمعروفة جزئيا من خلال عملية التوليد الرمادية التي تقوم بمعالجة البيانات لغرض اكمال المعلومات ولتبييض سلسلة الارقام ومن خلال عملية النمذجة الرمادية التي تقوم بتطوير نموذج ديناميكي مع مجموعة من المعادلات التفاضلية لتبييض النموذج و من خلال التنبؤ الرمادي الذي يستخدم في السلسلة الزمنية للتنبؤ بالقيم [4]. و يعد الانموذج الرمادي GM(1,1) اساس النظرية الرمادية و هو انموذج تنبؤ السلاسل الزمنية و الأكثر استخداما في العديد من المجالات ، حيث يستخدم هذا الانموذج في الحصول على أفضل نهج لتنبؤ السلاسل الزمنية [5]. هناك عدة دراسات استخدم فيها النموذج الرمادي منها في عام 2011 قدم كل من (Shuping Cong , Jinsheng Han & Shuting Liang) طريقة تنبؤ مركبة من الانموذج الرمادي GM(1,1) وطريقة المربعات الصغرى التكرارية التي استخدمت لتعديل معالم الانموذج وفقا لبيانات جديدة حيث تم التوصل الى ان دقة التنبؤ المركبة فعالة و تتناسب مع متطلبات الهندسة بشأن الوضع المستقبلي لهيكل الجسر [1] و في عام 2013 قام كل من (Xuemei Shen & Zhengnan Lu) بتطبيق الانموذج الرمادي GM(1,1) على بيانات الطلب على الكهرباء و اثبت هذا الانموذج تفوقه و امكانيته في تلبية احتياجات التنبؤ في الكهرباء [13] وفي عام 2015 استخدم كل من (Mingyue Zhao , Dongxue Zhao & Xingyi Shi) الانموذج الرمادي GM(1,1) في توقع الناتج المحلي الاجمالي وفي تنبؤ السكان و تم الحصول على نتائج بخطأ صغير جدا مع مصداقية عالية [17] . يتضمن هذا البحث وصف خطوات بناء انموذج التنبؤ الرمادي GM(1,1) و تم استخدام طرائق عدة لتقدير معالم الانموذج الرمادي GM(1,1) و هي طريقة المربعات الصغرى (LS) ، طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) ، طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) و طريقة الانحدار التدريجي (DS) و مقارنة هذه الطرائق باستخدام مقياس متوسط مربع الخطأ (Mean Square Error MSE) و مقياس متوسط الخطأ النسبي المطلق (Mean Absolute Percentage Error MAPE) و ذلك للحصول على أفضل النتائج و بأعلى دقة تنبؤ .

1-1 مشكلة البحث

تعاني بعض البيانات من بعض المشاكل منها حالة غير مؤكدة في وضوحها او هنالك شك في مصداقيتها وبحجوم عينات صغيرة فان هذه البيانات تكون فقيرة أو غير مؤكدة و في بعض الأحيان ترافقها فقدان في بعض المشاهدات لذا تعتبر من أصعب المشاكل التي تواجه الباحث خصوصا عندما تكون الظاهرة تخضع لسلسلة زمنية فضلا عن وجود حالة فقدان في بعض البيانات رغم صغر حجم العينة لذلك تحتاج هذه المشكلة إلى الحل الأمثل للوصول إلى أفضل نموذج لان هذه المشاكل تعتبر من اصعب الظواهر التي يرغب الباحث بنمذجتها والوصول الى تنبؤات جيدة لها .

1-2 هدف البحث

يهدف هذا البحث إلى وصف بناء الانموذج الرمادي والذي يعد العنصر الرئيسي للنظرية الرمادية والتعرف على خصائصه والتوصل إلى أفضل الطرائق المستخدمة لتقدير معالم الانموذج الرمادي GM(1,1) والمقارنة بينهم و استخدام هذا الانموذج في عملية معالجة البيانات المفقودة والبيانات غير المؤكدة والتنبؤ للإمام و تطبيقها على بيانات حقيقية للحصول على أفضل النتائج و بأعلى دقة .

2-الانموذج الرمادي GM(1,1) Grey Model GM(1,1)

يعرف انموذج GM(1,1) بالانموذج الرمادي من الدرجة (الرتبة) الأولى وبمتغير واحد و هو أساس نظرية النظام الرمادي و يتميز هذا الانموذج بأنه يحتاج بيانات أصلية قليلة وعادة يحتاج من أربعة فما فوق من بيانات العينة . الفكرة الأساسية هي الافادة الكاملة من الحد الأدنى من المعلومات والعمل على تنبؤ النظام مع المعلومات الفقيرة أو الناقصة أو غير المؤكدة، فضلا عن إن لديه عملية حساب بسيطة ودقة تنبؤ عالية.
يتم حل المعادلة التفاضلية لانموذج GM(1,1) للحصول على n من القيم المستقبلية و ذلك لتوقع قيمة النظام ، باستخدام تنبؤ القيمة ، معكوس مشغل التوليد التراكمي (I-AGO) حيث يتم تطبيقها للحصول على القيم المتوقعة من البيانات الأصلية [5]، و يمكن وصف خطوات التنبؤ الرمادي كما يأتي [6]:

1- تتميز ديناميكية انموذج GM(1,1) بمتغير مستقل واحد $X^{(0)}$ ، و ذلك بفرض أنه يتم التعبير عن سلسلة البيانات الأصلية الموجبة $X^{(0)}$ مع (n)و التي تمثل حجم العينة في البيانات كالآتي :

$$X^{(0)} = \left(x^{(0)}(1)\,, x^{(0)}(2)\,, \ldots\ \ , x^{(0)}(n)\right) \quad , n \geq 4 \ldots\ldots (1)$$

2- إنشاء سلسلة جديدة $X^{(1)}$ ، حيث يتم تحويل السلسلة الأصلية $X^{(0)}$ في سلسلة جديدة $X^{(1)}$ باستخدام عملية التوليد التراكمي (AGO) إذ إن تسلسل البيانات بعد الإضافة التراكمية هو التسلسل الذي تم إنشاؤه وكما يأتي [4] :

$$AGO: x^{(0)} \rightarrow x^{(1)}$$

$$x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^{k} x^{(0)}(m) \quad , k = 1,2,\ldots,n$$

$$X^{(1)} = \left[x^{(1)}(1)\,, x^{(1)}(2)\,, \ldots\,, x^{(1)}(n)\right], \quad n \geq 4 \ldots\ldots (2)$$

يعرف التسلسل الجديد لقيمة الوسط المتولد من $X^{(1)}$ كالآتي [6]:

$$Z^{(1)} = \left(z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \ldots\ \ , z^{(1)}(n)\right) \ldots\ldots (3)$$

و هذا يعني أن :

$$z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k) + (1-\alpha) x^{(1)}(k-1)\ ), k = 2,3,\ldots,n$$

يجب تحديد قيمة $0 \leq \alpha \leq 1$ وغالبا ما يتم تحديدها $\alpha = 0.5$:

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}\left(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)\right) \quad , \quad k = 2,3,\ldots,n \ldots\ldots (4)$$

إذ أن $z^{(1)}(k)$ تمثل قيمة المتوسط المجاورة.

3- أنشاء معادلة تفاضلية رمادية ، يمكن نمذجة التسلسل $x^{(1)}$ بواسطة المعادلة التفاضلية الرمادية من الدرجة الأولى وكالآتي[6]:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + a x^{(1)} = b \ldots\ldots (5)$$

حيث إن معالم الانموذج الرمادي هي : a يمثل معامل التطوير و b يمثل الكمية الفعلية الرمادية وعامل الأجراء الرمادي الذي يأتي من البيانات الأساسية .

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = \frac{x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k)}{k+1-k} = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k)$$

ويمكن أن تكتب المعادلة (5) بالشكل الاتي :

$$\lim_{\Delta t=1} \frac{x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k)}{\Delta t} + a.\frac{x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k)}{2} = b \ldots\ldots (6)$$

نفرض إن : $\Delta t = 1$، و إن $x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) = x^{(0)}(k+1)$، وبذلك يمكن كتابة المعادلة (6) بالشكل الاتي :

$$x^{(0)}(k+1) + a.\frac{x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k)}{2} = b \ldots\ldots(7)$$

والصيغة الرياضية للمعادلة التفاضلية الرمادية لانموذج GM(1,1) التي تمثل سلسلة زمنية متقطعة تكون كما يلي [6] :

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \ldots\ldots(8)$$

$x^{(0)}(k)$: هو المشتقة الرمادية التي تزيد من كثافة المعلومات للسلسلة المعطاة لنمذجتها .

4- و هي مرحلة تقدير معالم انموذج النظام الرمادي GM(1,1) عند تكوين المعادلة التفاضلية وهناك طرائق عدة للتقدير والتي سيتم تناولها بالتفصيل في تقدير المعالم للانموذج لاحقا .

5- ينبغي حل المعادلة التفاضلية لحساب قيم التنبؤ$\hat{x}^{(1)}(k)$ و التي تسمى دالة استجابة الزمن (Time Response Function) لانموذج GM(1,1) :

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right]e^{-ak} + \frac{b}{a} \ldots\ldots(9)$$

ثم يتم استخدام معكوس عملية التوليد التراكمية (IAGO) وذلك للحصول على القيم المستعادة من $\hat{x}^{(1)}(k)$ من المعادلة الاتية :

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = (1 - e^{\hat{a}})(x^{(0)}(1) - \frac{\hat{b}}{\hat{a}})e^{-\hat{a}k}, k = 1, 2, \ldots, n \ldots\ldots(10)$$

2-1 طرائق التقدير المستخدمة لتقدير معالم نموذج النظام الرمادي GM(1,1)

1-2-1 طريقة المربعات الصغرى Least Square Method (LS)

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد حل لتقدير معالم الانموذج الرمادي GM(1,1) و تقوم هذه الطريقة على افتراض أن المتجه Y يحتوي على أخطاء ومصفوفة المضافة المتكررة B تكون دقيقة ، فإذا $\hat{\Theta} = (a, b)^{(T)}$ تمثل تسلسل المعالم إذن سيكون تسلسل تقدير المربعات الصغرى للانموذج بالشكل الاتي[16]:

$$\therefore \hat{\Theta} = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \ldots\ldots(11)$$

إذ أن :

$$Y_{N_{(n-1)\times 1}} = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ x^{(0)}(4) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B_{(n-1)\times 2} = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ -z^{(1)}(4) & 1 \\ . & 1 \\ . & 1 \\ . & 1 \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

وهذا يعني إن : $Y = B\widehat{\Theta}$ و باستخدام المعادلة $x^{(0)}(\mathrm{k}) = -\widetilde{a}\mathrm{z}^{(1)}(\mathrm{k}) + \widetilde{\mathrm{b}}$ ، $k = 2,3,\dots,n$ فأن تسلسل الخطأ يعطى بالشكل الاتي $\varepsilon = Y - B\widehat{\Theta}$ ، و نفرض إن [7]:

$$s = \varepsilon^T \varepsilon = [Y - B\widehat{\Theta}]^{\mathrm{T}}\ [Y - B\widehat{\Theta}]$$

ويتم اشتقاق الدالة s بالنسبة للمعالم a و b ومساواتها بالصفر لكي نجعل دالة s اقل ما يمكن و كما الاتي[16]:

$$s = \sum_{k=2}^{n} (\ x^{(0)}(k) + \ az^{(1)}(k) - b)^2 \dots\dots(12)$$

$$\frac{\partial \mathrm{s}}{\partial \mathrm{a}} = 2\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)\big(x^{(0)}(k) + \ az^{(1)}(\mathrm{k}) - \mathrm{b}\big) = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{s}}{\partial \mathrm{b}} = -2\sum_{k=2}^{n} \big(x^{(0)}(k) + \ az^{(1)}(\mathrm{k}) - \mathrm{b}\big) = 0$$

إذن :

$$\textstyle\sum_{k=2}^{n}\{x^{(0)}(k)z^{(1)}(k) + a[z^{(1)}(k)]^2 - b.z^{(1)}(k)\} = 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} \big(x^{(0)}(k) + \ az^{(1)}(\mathrm{k}) - \mathrm{b}\big) = 0$$

استنادا إلى طريقة المربعات الصغرى سوف نحصل على تقدير معالم الانموذج a و b كالأتي:

$$a = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k)\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) - \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 - \frac{1}{n-1}\ (\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k))^2} \dots\dots(13)$$

$$b = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) + \ a\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)\right] \dots\dots(14)$$

2-2-1 طريقة المربعات الصغرى الموزونة Weighted Least Square Method (WLS)

تهدف هذه الطريقة إلى تحسين دقة التنبؤ وذلك بإعطاء مجموع المربعات المتبقي للمعلومات وزن أكبر وتعمل على تحسين دقة المحاكاة للمعلومات الجديدة .يمثل الوزن في مجموع المربعات المتبقي للبيانات بالرمز ω_k ، ($\omega_i \geq \omega_j$ ، i $\geq$j)، نفرض أن $\omega_k = k$ و باستخدام المعادلة $x^{(0)}(\mathrm{k}) = -\widetilde{a}\mathrm{z}^{(1)}(\mathrm{k}) + \widetilde{\mathrm{b}}$، $k = 2,3,\dots,n$ ، و فأن تسلسل الخطأ يعطى بالشكل الآتي $\varepsilon = Y - B\widetilde{a}$ [16]:

$$s = \sum_{k=2}^{n} \omega_k\ (\ x^{(0)}(k) + \ \widetilde{a}z^{(1)}(k) - \widetilde{b})^2 \dots\dots(15)$$

إن قيم $\tilde{a}$ ، $\tilde{b}$ التي تجعل الدالة s اقل ما يمكن يتم من خلال اشتقاق الدالة s ومساواتها بالصفر بالنسبة للمعلمتين a و b وكما يلي:

$$\frac{\partial s}{\partial \tilde{a}} = 2\sum_{k=2}^{n} \omega_k\, z^{(1)}(k)\left(x^{(0)}(k) + az^{(1)}(\mathrm{k}) - \tilde{\mathrm{b}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial \tilde{\mathrm{b}}} = -2\sum_{k=2}^{n} \omega_k \left(x^{(0)}(k) + az^{(1)}(\mathrm{k}) - \tilde{\mathrm{b}}\right) = 0$$

إذن :

$$\sum_{k=2}^{n} \omega_k\, z^{(1)}(k)\left(x^{(0)}(k) + az^{(1)}(\mathrm{k}) - \tilde{\mathrm{b}}\right) = 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} \omega_k \left(x^{(0)}(k) + az^{(1)}(\mathrm{k}) - \tilde{\mathrm{b}}\right) = 0$$

وبهذا نحصل على معالم انموذج التنبؤ الرمادي استنادا على طريقة المربعات الصغرى الموزونة كالآتي:

$$\tilde{b} = \frac{1}{\sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}} \omega_k}\left[\sum_{k=2}^{n} \omega_k\, x^{(0)}(k) + a\sum_{k=2}^{n} \omega_k z^{(1)}(k)\right] \ldots\ldots(16)$$

$$\tilde{a} = \frac{\frac{1}{\sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}} \omega_k}\sum_{k=2}^{n} \omega_k\, x^{(0)}(k)\sum_{k=2}^{n} \omega_k\, z^{(1)}(k) - \sum_{\mathrm{k}=2}^{n} \omega_k\, x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}} \omega_k\left(z^{(1)}(k)\right)^2 - \frac{1}{\sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}} \omega_k}\left(\sum_{k=2}^{n} \omega_k\, z^{(1)}(k)\right)^2} \ldots\ldots(17)$$

3-2-1 طريقة المربعات الصغرى الكلية Total Least Square Method (TLS)

قدمت هذه الطريقة من قبل العالم غولوب (Golub) و (Van Loan) عام 1980، و هي طريقة بديلة لطريقة المربعات الصغرى الكلاسيكية عند وجود أخطاء في متجه المشاهدات و مصفوفة البيانات أي في حال تأثر جميع البيانات بالأخطاء . نفرض إن n من القياسات في A فأن y ترتبط بـ x من خلال m من المعالم غير المعروفة ، و نسعى لإيجاد x الذي يعد الحل لطريقة (TLS) و الذي يقلل من مصفوفات الخطأ E_A و E_Y إلى A و Y على التوالي و يكون ذلك بواسطة[14]:

$$Y + E_Y = (A + E_A)x \ldots\ldots(18)$$

إذ أن E_Y تمثل أخطاء القياس ، وتمثل E_A مصفوفة الخطأ والتي تقوم بالتقليل من :

$$\min_{E_A, E_Y, x} \| [E_A E_Y] \|_F^2 \ldots\ldots(19)$$

إذ أن $\|\circ\|_{\mathrm{F}}$ تمثل مصفوفة قاعدة Frobenius ، والتي يمكن التعبير عنها كالآتي [14] :

$$\mathrm{E}_\mathrm{Y}^\mathrm{T} \cdot \mathrm{E}_\mathrm{Y} + \left(vec(E_A)\right)^T \cdot \left(vec(E_A)\right) = min$$

و ثم نقوم بإعادة ترتيب الانموذج لأجل حل مشكلة TLS بالشكل التالي :

$$[A + E_A, Y + E_Y]\begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \ldots\ldots(20)$$

إذ أن مصفوفة الخطأ $E = [E_A E_Y]$ غير معروفة ، لذا يجب تحديد هذه المصفوفة وذلك باستخدام مصفوفة الخطأ الأصغر E بواسطة قاعدة Frobenius [14]:

$$\| E \|_F = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m+1} e_{ij}^2\right]^{1/2} = \left[tr(E^T \cdot E)\right]^{1/2} = min$$

يرمز إلى عملية الأثر بالرمز tr. نفرض أن (singular value decomposition)(SVD) لمصفوفة $n \times (m+1)$:

$$[AY] = U\sum V^{T} = [U_1 U_2]\begin{bmatrix} \sum \\ 0 \end{bmatrix} V^{T} \qquad (21)\ ,\ {}_{m+1}^{U}1 = [{}_{m}^{U}11\ {}_{m}^{U}12\ ]$$

$$\sum \cdot V^{T} = \begin{bmatrix} \sum_1 & 0 \\ 0 & \sum_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21_m} & V_{22_1} \end{bmatrix}^{T} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}$$

فعندئذ يصبح الحد الادنى لطريقة المربعات الصغرى الكلية المصححة كما يأتي :

$$\sigma_{n+1} = \min_{\text{rank}([A;Y])=n} \| \tilde{E} \cdot \tilde{E}^{T} \|_F \dots\dots (22)$$

إذ أن : $\tilde{E} = \left([AY] - [\tilde{A}\tilde{Y}]\right)$

أثبت العلماء أن حل TLSx_{TLS} ينطوي على المتجه المفرد الأصح $[AY]$ و كما يأتي:

$$x_{TLS} = -V_{12}V_{22}^{-1} = -\frac{1}{v_{n+1,n+1}}\begin{pmatrix} v_{n+1,1} \\ \vdots \\ v_{n+1,n} \end{pmatrix} \dots\dots (23) \qquad , \qquad v_{n+1} = \begin{pmatrix} v_{n+1,1} \\ \vdots \\ v_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

يمكن وصف خوارزمية طريقة المربعات الصغرى الكلية بالخطوات الاتية :

1- يمكن التعبير عن المعادلة $Y_n + \varepsilon_y = B \cdot \hat{a}$ كالآتي :

$$[B \quad Y_n]\begin{bmatrix} \hat{a} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \dots\dots (24)$$

2- يتم حساب SVD:

$$[B \quad Y_n] = U\sum V^{T} \dots\dots (25)$$

إذ أن $\sum = diag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\ , \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

3- إذا كانت v_{33} مصفوفة غير مفردة ، إذن $\hat{a}(TLS) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -\frac{1}{v_{33}}\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix} \dots\dots (26)$

4- النهاية .

4-2-1 طريقة الانحدار التدريجي Gradient Descent Method

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد الحد الأدنى للدالة. و إن نظرية التنبؤ الرمادية تستخدم فيها لتحسين الخوارزمية لهذه الطريقة وذلك للحصول على الحل الأفضل ولتسريع فعالية سرعة البحث إذ يمكن للمعادلة التفاضلية بناء انموذج التنبؤ لزيادة تنبؤ اتجاه البحث عن طريقة الانحدار التدريجي . تسجل هذه الخوارزمية بيانات والتي تم أنشاؤها من الطريقة الأصلية ثم يطبق مشغل التوليد التراكمي لتنظيم البيانات وبعدها يتم استخدام انموذج GM(1,1) لإنشاء معادلة تفاضلية رمادية وفقا للنتيجة التي نحصل عليها من مشغل التوليد التراكمي. وعند تطبيق هذه الخطوة يتم استخدام معكوس مشغل التوليد التراكمي للحصول على نقطة تنبؤ جديدة و استخدام هذه النقطة يكون بمثابة نقطة بحث جديدة .تعرف $x^{(0)}$ نقطة البحث الأصلية، α هي معدل التحسين للطريقة و ان k هي خطوة التنبؤ الرمادية و ε هو معيار التوقف . تكشف الخوارزمية مقياس التوقف من خلال الحل للبحث لكي تقرر الاستمرار عن البحث أو التوقف و كما يأتي[3]:

1- تنفيذ بحث عن طريقة الانحدار التدريجي : $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \alpha\Delta f$ (الانحدار التدريجي)

خزن جميع نقاط البحث لهذه الطريقة ، وهل تتراكم نقاط البحث ؟

نعم : اذهب إلى الخطوة 2 (بناء نموذج التنبؤ الرمادي) ، كلا : ارجع إلى الخطوة 1

2- استخدام نقاط البحث التي تم خزنها في الخطوة 2 و ذلك لتكوين عملية التوليد التراكمية (AGO)، و استخدام نموذج GM(1,1) و ذلك لبناء نموذج التنبؤ الرمادي .

يتم التنبؤ لنقطة البحث المقبلة وفقا لخطوة التنبؤ الرمادي أي حل المعادلة التفاضلية الرمادية ثم إيجاد معكوس عملية التوليد التراكمية لنقطة التنبؤ الجديدة و النتيجة ستكون بمثابة نقطة البحث الجديدة .

3- كشف مقياس التوقف أي هل $\| \Delta x \| < \varepsilon$?

نعم : اذهب إلى الخطوة 4 ، كلا : اذهب إلى الخطوة 1

4- أطبع النتائج و توقف .

2-2 **خصائص الانموذج الرمادي** GM(1,1) Properties Of Grey Model GM(1,1)

نفرض إن النظام ألأسي الآتي $x(t) = Ae^{at}$ و الذي يمكن أن يكتب بالشكل الاتي [12]:

$$x^{(0)}(k) = Ae^{a(k-1)}, k = 1,2,\dots,N, \dots\dots\dots (27)$$

تؤخذ أول عناصر N والتي ستمثل تسلسل البيانات الأصلية ، فيصبح تسلسل التوليد التراكمي من الدرجة الأولى بالشكل الاتي :

$$x^{(1)}(k) = A\frac{1-e^{ak}}{1-e^{a}}, k = 1,2,\dots,N \dots\dots (28)$$

ثم GM(1,1) و يتم أعداد انموذج التنبؤ الرمادي

$$BY_{N} = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ x^{(0)}(4) \\ . \\ . \\ . \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}A\frac{2-e^{a}-e^{2a}}{1-e^{a}} & 1 \\ -\frac{1}{2}A\frac{2-e^{2a}-e^{3a}}{1-e^{a}} & 1 \\ \dots & \dots \\ -\frac{1}{2}A\frac{2-e^{(N-1)a}-e^{Na}}{1-e^{a}} & 1 \end{bmatrix}$$

ولذا فأن :

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (B^{T}B)^{-1}B^{T}Y_{N} = \begin{bmatrix} \frac{2(1-e^{a})}{1+e^{a}} \\ \frac{2A}{1+e^{a}} \end{bmatrix} \dots\dots (29)$$

ومما ذكر انفا نحصل على الآتي :

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \frac{-Ae^{a}}{1-e^{a}}e^{-\hat{a}k} + \frac{A}{1-e^{a}} \quad , k = 1,2,\dots,N-1 \dots\dots (30)$$

وعليه فأن:

$$\hat{x}^{(0)}(1) = A \dots\dots (31)$$

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \frac{-Ae^{a}(1-e^{\hat{a}})}{1-e^{a}}e^{-\hat{a}(k-1)}, k = 2,3,\dots,N \dots\dots (32)$$

نفرض إن $K = \frac{-e^{a}(1-e^{a})}{1-e^{a}}$, $\acute{a} = -\hat{a}$ ومن هذه المعادلة (40) يمكننا كتابة المعادلة الاتية :

$$\hat{x}^{(0)}(k) = KAe^{\acute{a}(k-1)}, k = 2,3,\dots,N \dots\dots (33)$$

3- **مقاييس المقارنة** Comparative standards

- متوسط مربع الخطأ (Mean Square Error MSE) : تم استخدام هذا المقياس وذلك من اجل تقييم دقة تنبؤ الانموذج الرمادي GM (1,1) وهذا المقياس عبارة عن متوسط مربعات الفرق بين المشاهدات الفعلية والمتوقعة وهو مقياس جودة المقدر [11] :

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(obs_{i} - pre_{i})^{2} \dots\dots (34)$$

إذ إن : obs_i تمثل قيم المشاهدات الحقيقية، pre_i تمثل القيم التقديرية .

- متوسط مطلق الخطأ النسبي (Mean Absolute Percentage Error MAPE) و هو مقياس لدقة التنبؤ إذ يقيس حجم الخطأ من حيث النسبة المئوية ويتم احتسابها كمعدل لخطأ نسبي غير متوقع [11]:

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{obs_i - pre_i}{obs_i}\right| \times 100\% \ldots\ldots(35)$$

2-4 اختبار دقة الانموذج

توجد ثلاثة اختبارات تتعلق بأنموذج GM(1,1) و هي اختبار البواقي ، اختبار الارتباط و اختبار التباين اللاحق ، غالبا إذا تحقق اختبار واحد منها فانه يكفي لإثبات إن انموذج GM(1,1) يمكن استخدامه وكما يأتي [9] :

2-4-1 اختبار البواقي Residual Test

يتم حساب هذا الاختبار وفقا للخطوات الآتية :

1- حساب $\hat{x}^{(1)}(k)$ بواسطة معادلة (9) ، حساب $\hat{x}^{(0)}(k)$ بواسطة معادلة (11) .

2- حساب المتبقي المطلق (Absolute Residual) :

$$\Delta^{(0)}(k) = \left|x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)\right| , k = 1,2,3,\ldots,n$$

3- حساب المتبقي النسبي (Relative Residual) :

$$\Phi(k) = \frac{\Delta^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \times 100\% \ , k = 1,2,3,\ldots,n \ldots\ldots(36)$$

2-4-2 اختبار درجة الارتباط Correlation Degree Test

يجب حساب معامل الارتباط و درجة الارتباط لكل من $x^{(0)}(k)$ و $\hat{x}^{(0)}(k)$ كالآتي [9]:

حيث إن معامل الارتباط (Correlation Coefficient) :

$$\eta(k) = \frac{min\{\Delta^{(0)}(k)\} + \rho max\{\Delta^{(0)}(k)\}}{\Delta^{(0)}(k) + \rho max\{\Delta^{(0)}(k)\}} \ , (k = 1,2,\ldots, \rho = 0.5)$$

ولحساب درجة الارتباط حسب القانون الآتي :

$$r = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\eta(k) \ , k = 1,2.3,\ldots,n \ \ , r > 0.6 \ldots\ldots(37)$$

فاذا كانت قيمة درجة الارتباط (r) اكبر من 0.6 فان هذا الاختبار سيتحقق من خلال هذا الشرط .

2-4-3 اختبار التباين اللاحق Posterior-variance-test

حساب المتوسط للتسلسل الأصلي $x^{(0)}$:

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^{(0)}(k) \ldots\ldots(38)$$

حساب التباين للتسلسل الأصلي $x^{(0)}$

$$S_1 = \sqrt{\frac{\sum[x^{(0)}(k) - \bar{x}^{(0)}]^2}{n-1}}$$

حساب متوسط المتبقي :

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n}[\Delta^{(0)}(k)] \ldots\ldots(39)$$

حساب متوسط مربع الخطأ المتبقي

$$S_2 = \sqrt{\frac{\sum[\Delta^{(0)}(k) - \bar{\Delta}^{(0)}]^2}{n-1}}$$

حساب نسبة التباين :

$$C = \frac{S_2}{S_1} \ldots\ldots(40)$$

حساب احتمال الخطأ المتبقي الصغير :

$$P = P\{\left|\Delta^{(0)}(k) - \bar{\Delta}^{(0)}\right| < 0.6745 S_1\} \ldots\ldots(41)$$

وإن الجدول الآتي يوضح مراحل دقة النموذج [2]:

جدول (1) يمثل دقة و جودة النموذج

الدقة	C (نسبة التباين)	P (احتمال الخطأ المتبقي)
جيد	$C \leq 0.35$	$P \geq 0.95$
مؤهل	$0.35 < C \leq 0.5$	$0.80 \leq P < 0.95$
يجتاز	$0.5 < C \leq 0.65$	$0.70 \leq P < 0.80$
غير مؤهل	$C > 0.65$	$P < 0.70$

2-5 المحاكاة Simulation

تعد المحاكاة واحدة من أهم الوسائل لغرض الإثبات التجريبي لأفضلية طريقة على طرائق أخرى في حالة عجزنا عن إثباتها نظريا حيث تقوم هذه المحاكاة ببناء انموذج (باستخدام الأرقام العشوائية له صفات تقارب من الانموذج المستهدف ، ففي هذا البحث عمدنا الى توليد انموذج خاص وهو الانموذج الرمادي GM(1,1) و استخدمنا أربع طرائق للتقدير في كل عملية توليد لهذا الانموذج وتم المقارنة بين الطرق باستخدام المقياس MSE والمقياس MAPE وتم تكرار هذه التجارب 500 مرة ، ويتم توليد هذه البيانات من خلال الخطأ العشوائي حيث ان توزيع الخطأ هو توزيع طبيعي N(0,1) حيث تم استخدام مجموعة قيم افتراضية وحجوم عينات مختلفة موضحة في الجدول:

جدول (2) يمثل حجم العينة و المعالم الافتراضية

B	A	n
196.7	-0.012	8
580.27976	0.01189	15

يوضح الجدول رقم (2) حجوم العينات والمعالم الافتراضية التي تم اعتمادها على أساس بحوث منشورة[15] و على أساس (اعتماد معدل القيم التقديرية للطرائق المستخدمة عند تطبيقها على بيانات حقيقية) وتم الحصول على النتائج الآتية :

اولا: عند حجم عينة n=8 و للمعالم الافتراضية (a=-0.012,b=196.7)

جدول (3) يمثل المعدل و أفضل تكرار لمقياس MSE للطرائق الأربعة

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average Of MSE	0.638559250947	0.660270958208	0.638638568499	0.638559062679
No. Of Best MSE	142	42	132	184

من الجدول رقم (3) تم حساب المعدل لمقياس MSE للطرائق الأربعة المستخدمة وذلك لغرض المفاضلة بين الطرائق و تبين من خلال هذا الجدول أن أفضل طريقة حصلت عليها طريقة الانحدار التدريجي (DS) حيث حصلت على أقل معدل بمقدار0.63855 لمقياس MSE وهذه الطريقة حصلت على أعلى تكرار من بين الطرق بمقدار 184 مرة بحسب هذا المقياس .

جدول (4) يمثل المعدل وأفضل تكرار لمقياس MAPE للطرائق الأربعة

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average Of MSE	0.00303008077489	0.00306165906846	0.00303047357271	0.00303009418407
No. Of Best MAPE	93	194	153	60

من الجدول رقم (4) تم حساب المعدل لمقياس MAPE للطرائق المستخدمة لغرض المفاضلة بين الطرائق وتبين من خلال هذا الجدول أن أفضل طريقة بحسب هذا المقياس هي طريقة المربعات الصغرى (LS) إذ حصلت على أقل معدل بمقدار 0.00303 لمقياس MAPE في حين أعلى تكرار حصلت عليه طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) بمقدار 194 بحسب هذا المقياس .

جدول (5) يمثل المعدل و تقدير المقاييس MSE و MAPE للمعالم a و b

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average OF a	-1.72211963129e-05	-3.88897354311e-05	3.00976707653e-06	-1.72713806730e-05
Average Of b	196.701731644	196.679204387	196.723178385	196.701687135
MSE Of a	0.000144462284316	0.000144055414898	0.000144948315774	0.000144461071967
MSE Of b	0.855761689875	0.997090542399	0.857405567014	0.855748728620
MAPE Of a	0.998564900307	0.996759188714	1.00025081392	0.998560718277
MAPE Of b	0.00379204323051	0.00407879466820	0.00378838571735	0.00379193972198

من جدول رقم (5) تم الحصول على التقدير لكل من المعلمتينa و bوعلى MSE وMAPE لكليهما، وإن أقل تقدير للمعلمة a بحسب مقياس MSE والمقياس MAPE كانت لطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) بمقدار 0.00014 و 0.99675 على التوالي، وأقل تقدير للمعلمة b بحسب مقياس MSE كان لطريقة الانحدار التدريجي (DS) بمقدار 0.85574 في حين إن أقل تقدير للمعلمة b بحسب مقياس MAPE كان لطريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) بمقدار 0.00378.

ثانيا: عند حجم عينة n=15 وللمعالم الافتراضية (a=-0.012,b=196.7)

جدول (6) يمثل المعدل وأفضل تكرار لمقياس MSE للطرائق الأربعة

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average Of MSE	0.807769058187	0.829850053161	0.807845593066	0.807769581934
No. Of Best Of MSE	145	20	204	131

من الجدول رقم (6) تم حساب المعدل لمقياس MSE للطرائق المستخدمة وتبين من خلال الجدول أن أفضل طريقة كانت طريقة المربعات الصغرى (LS) إذ حصلت على أقل معدل بمقدار 0.80776 لمقياس MSE، أما طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) حصلت على أعلى تكرار من بين الطرق بمقدار 204 مرة بحسب هذا المقياس .

جدول (7) يمثل المعدل وأفضل تكرار لمقياس MAPE للطرائق الأربعة

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average Of MAPE	0.00351932783583	0.00355976167116	0.00352015219101	0.00351933116459
No. Of Best Of MAPE	95	179	145	81

من الجدول رقم (7) تم حساب المعدل لمقياس MAPE للطرائق الأربعة حيث تبين من خلال هذا الجدول أن أفضل طريقة حسب هذا المقياس هي طريقة المربعات الصغرى (LS) إذ حصلت على أقل معدل بمقدار0.00351 لمقياس MAPE في حين أعلى تكرار حصلت عليه طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) بمقدار 179 مرة .

جدول (8) يمثل المعدل وتقدير المقاييس MSE و MAPE للمعالم a و b

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average Of a	1.22266112098e-05	1.25632331885e-05	2.31770009357e-05	1.22274792321e-05
Average Of b	196.718825617	196.719501612	196.740434437	196.718826887
MSE Of a	0.000144415706743	0.000144460142729	0.000144679023161	0.000144415741285
MSE Of b	0.367764786060	0.498330420947	0.369796485343	0.367799463864
MAPE Of a	1.00101888426	1.00104693609	1.00193141674	1.00101895660
MAPE Of b	0.00247789833675	0.00287195555229	0.00248981054849	0.00247801538701

من جدول رقم (8) تم الحصول على التقدير لكل من المعالم a و b و على MSE و MAPE لكليهما، أقل تقدير للمعلمة a بحسب مقياس MSE والمقياس MAPE كانت لطريقة المربعات الصغرى (LS) بمقدار 0.00014 و 1.00101 على التوالي ، وأقل تقدير للمعلمة b بحسب مقياس MSE والمقياس MAPE كانت لطريقة المربعات الصغرى (LS) بمقدار 0.36776 و 0.00247 على التوالي .

ثالثا: عند حجم عينة n=8 و للمعالم الافتراضية (a=0.01189 , b=580.27976)

جدول (9) يمثل المعدل وأفضل تكرار لمقياس MSE للطرائق الأربعة

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average Of MSE	0.638575825965	0.660301367899	0.638585010610	0.638575749407
No. Of Best MSE	121	42	197	140

من الجدول رقم (9) تم حساب المعدل لمقياس MSE وتبين من خلال الجدول أن أفضل طريقة كانت طريقة الانحدار التدريجي (DS) إذ حصلت على أقل معدل بمقدار 0.63857 بحسب هذا المقياس، أما طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) حصلت على أعلى تكرار بمقدار 197 مرة من بين الطرق الأربعة .

جدول (10) يمثل المعدل و أفضل تكرار لمقياس MAPE للطرائق الأربعة

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average MAPE	0.00102703498110	0.00103779460415	0.00102706819592	0.00102703658179
No. Of Best MAPE	92	195	156	57

من الجدول رقم (10) تم حساب المعدل لمقياس MAPE حيث تبين من خلال هذا الجدول أن أفضل طريقة بحسب هذا المقياس هي طريقة المربعات الصغرى (LS) إذ حصلت على أقل معدل لمقياس MAPEبمقدار0.00102 في حين أعلى تكرار حصلت عليه طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) بمقدار 195 مرة .

جدول (11) يمثل المعدل و تقدير المقاييس MSE و MAPE للمعالم a و b

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average Of a	-5.98639691996e-06	-1.32859407054e-05	-3.66123753483e-06	-5.99217261794e-06
Average Of b	580.268683794	580.246255712	580.275954815	580.268668702
MSE Of a	0.000141614962321	0.000141801563978	0.000141559678488	0.000141615099376
MSE Of b	0.854656993677	0.996610691907	0.854935069869	0.854653258557
MAPE Of a	1.00050348165	1.00111740460	1.00030792578	1.00050396741
MAPE Of b	0.00128591964787	0.00138266112957	0.00128546247698	0.00128590798844

من جدول رقم (11) تم الحصول على التقدير لكل من المعالم a و b وعلى مقياس MSE و MAPE لكليهما و إن أقل تقدير للمعلمة a بحسب مقياس MSE والمقياس MAPE كانت لطريقة المربعات الصغرى الكلية(TLS) بمقدار0.00014 و 1.00030 على التوالي ، وأقل تقدير للمعلمة b بحسب مقياس MSEهي طريقة الانحدار التدريجي (DS) بمقدار 0.85465 وأقل تقدير للمعلمة b بحسب المقياس MAPE كانت لطريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) بمقدار 0.00128.

رابعا: عند حجم عينة n=15 وللمعالم الافتراضية (a=0.01189 , b=580.27976)

جدول (12) يمثل المعدل وأفضل تكرار لمقياس MSE للطرائق الأربعة

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average MSE	0.807817059936	0.829902840166	0.807822668374	0.807817230034
No. Of Best MSE	127	30	231	112

من الجدول رقم (12) تم حساب المعدل لمقياس MSE وتبين من خلال الجدول أن أفضل طريقة كانت طريقة المربعات الصغرى (LS) إذ حصلت على أقل معدل بمقدار 0.80781 بحسب هذا المقياس ، أما طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) حصلت على أعلى تكرار بمقدار 231 مرة من بين الطرائق الأربعة .

جدول (13) يمثل المعدل و أفضل تكرار لمقياس MAPE للطرائق الأربعة

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average MAPE	0.00119291394094	0.00120667304323	0.00119299283849	0.00119291449978
No. Of Best MAPE	94	177	146	83

من الجدول رقم (13) تم حساب المعدل لمقياس MAPE حيث تبين من خلال هذا الجدول أن أفضل طريقة بحسب هذا المقياس هي طريقة المربعات الصغرى (LS) حيث حصلت على أقل معدل لمقياس MAPE بمقدار 0.00119 وإن أعلى تكرار حصلت عليه هي طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) بمقدار 177 مرة.

جدول (14) يمثل المعدل و تقدير المقاييس MSE و MAPE للمعالم a و b

Method	LS	WLS	TLS	DS
Average Of a	4.16165884690e-06	4.29633186065e-06	5.42015684523e-06	4.16176008060e-06
Average Of b	580.286342199	580.287123441	580.293667926	580.286342363
MSE Of a	0.000141287194075	0.000141288170773	0.000141257283537	0.000141287192198
MSE Of b	0.367518523132	0.498049240468	0.367917766816	0.367529994865
MAPE Of a	0.999649986640	0.999638660062	0.999544141560	0.999649978126
MAPE Of b	0.000838645520906	0.000973500986444	0.000839752770619	0.000838658374930

من جدول رقم (14) تم الحصول على التقدير لكل من المعالم a و b وعلى مقياس MSE و MAPE لكليهما وإن أقل تقدير للمعلمة a بحسب مقياس MSE والمقياس MAPEكانت لطريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) بمقدار0.00014 و 0.99954 على التوالي، وأقل تقدير للمعلمة b بحسب مقياس MSE والمقياس MAPE كان لطريقة المربعات الصغرى (LS) بمقدار 0.36751 و 0.00083 على التوالي.

2-6 التطبيق Application

تعتمد الطاقة المحصلة من محرك الديزل على الوقود، فعندما نقيس معدلات الاستهلاك للزيوت يجب أن تراعى فيها كثير من العوامل منها درجة الحرارة والضغط الجوي ونوع الوقود المستخدم واختلاف النسب المعدنية وأيضا معدل وقت الخدمة ويجب مراعاة التغيرات غير المعروفة وغير المؤكدة في الاستهلاك أو قطع الغيار التي تؤثر في خصائص الزيوت لذا من المستحيل استخدام طرق تقليدية للتنبؤ في استهلاك الوقود لمولدات الديزل [15]. البيانات التي نحن بصدد دراستها وتحليلها تمتد من المدة 2014/9 إلى 2015/11 أي (15) شهر وهي بيانات معدل الاستهلاك لنوعين من الوقود (الوقود الثقيل HFO والوقود الخفيف D.O) للمحرك الخامس من محطة كهرباء ديزلات الجادرية (شركة هيونداي الكورية) والتي تقع على ضفاف نهر دجلة وفي داخل الحرم الجامعي لجامعة بغداد وتتكون من 24محرك بسعة (2.5MW) أي بواقع إنتاج كلي قدره (60MW) وهذه المحطة تستخدم لتوليد الكهرباء ، الوقود المستخدم في محطة الجادرية لغرض التشغيل المستمر هو الوقود الثقيل (HFO) ففي بداية التشغيل يستخدم وقود الديزل (D.O) وإثناء التشغيل يستخدم الوقود الثقيل . وتحتوي على بيانات مفقودة لشهرين فقط و هي شهر 7 و 8 .

جدول (15) يمثل بيانات معدل الاستهلاك لنوعين من الزيوت

Months	D.O	HFO
September	110.165	572.221
October	128.778	426.607
November	217.526	565.865
December	174.029	437.323
January	55.582	491.802
February	20.301	557.618
March	105.829	494.300
April	20.845	540.534
May	93.425	509.069
June	115.017	574.091
July	Missing Data	Missing Data
August	Missing Data	Missing Data
September	246.5	782.8
October	22.521	552.586
November	6.874	201.246

باستخدام المعادلة (9) و (10) نقوم بعملية تقدير القيم المفقودة أي لكل من الشهر السابع والشهر الثامن وأدراجها ضمن العينة الكلية بعد إتمام العينة المتبقية ليصبح لدينا 15 قيمة ، يجب أولا تحقيق اختبار بيانات الانموذج الرمادي GM(1,1) و ذلك لمعرفة هل يمكن استخدامها في تقدير معالم الانموذج و التنبؤ أم لا و يتم ذلك عن طريق الاختبارات الآتية [8]:

- يتم اختبار البيانات باستخدام مقياس (Quasi-Smoothness) و هو مقياس مهم جدا يستخدم للتحقق من البيانات لبناء الانموذج الرمادي GM(1,1) و القانون الخاص بهذا الاختبار هو:

$$\rho(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k)} < 0.5 \ , k \geq 3 \qquad \ldots\ldots(42)$$

- استخدام مقياس (Quasi- Exponentiality) لبيانات السلسلة و القانون الخاص بهذا الاختبار هو :

$$\sigma^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k-1)} \ , \sigma^{(1)}(k) \in [1, 1.5] \quad \ldots\ldots(43)$$

من خلال استخدام هذه المقاييس لأول عشر قيم من بيانات معدل الاستهلاك لنوعين من الزيوت (HFO,D.O) تتبين إن أول قيمة لكلا النوعين من الزيوت لا تصلح لإدخالها في بناء الانموذج أما باقية القيم حققت هذا الشرط لذا سيتم إدخال 14 قيمة و التي سيتم استخدامها في تقدير معالم النموذج و التنبؤ للحصول على أفضل النتائج .يتم تطبيق انموذج النظام الرمادي GM(1,1) على البيانات الحقيقية وذلك باستخدام برنامج (Matlab) إذ تمت كتابة برنامج للطرائق الأربعة (LS ,WLS ,TLS , DS) و المقارنة بينها من خلال استخدام معيار MSE و معيار MAPE و تم الحصول على النتائج الآتية من خلال تطبيق أفضل طريقة تم الحصول عليها من نتائج المحاكاة و هي طريقة المربعات الصغرى (LS):

- النتائج الخاصة لبيانات معدل الاستهلاك للوقود الثقيل(HFO) :

جدول (16) يمثل القيم التنبؤية للمشاهدات (HFO) لطريقة (LS)

Observations	Method (LS)
1	426.607
2	532.084
3	530.659
4	529.238
5	527.821
6	526.408
7	524.998
8	523.592
9	522.190
10	520.792
11	519.397
12	518.007
13	516.620
14	515.236

في جدول رقم (16) تم الحصول على القيم التنبؤية للانموذج الرمادي GM(1,1) لطريقة المربعات الصغرى (LS) و (14) مشاهدة لمعدل الاستهلاك للوقود الثقيل (HFO) إذ يمثل العمود طريقة المربعات الصغرى (LS) و الصفوف تمثل عدد المشاهدات وتم الحصول على القيم التنبؤية المفقودة للشهر السابع و الثامن و التي تمثل المشاهدة (10) و (11) بمقدار 520.792 و 519.397 على التوالي .

جدول (17) يمثل القيم التقديرية للمعالم و قيم المقاييس المستخدمة

Method	MSE	MAPE	a hat	b hat
LS	0.9780455 98155	0.30200914 0829	0.00268133 059200	535.372 615976

في جدول رقم (17) تم الحصول على القيم التقديرية لمعالم الانموذج الرمادي GM(1,1) وعلى قيم كل من المقاييس باستخدام طريقة المربعات الصغرى (LS) و التي تمثل في هذا الجدول الصف، وبذلك يصبح الانموذج بعد تقدير المعالم حسب الطريقة الأفضل LS كالآتي :

$$x^{(0)}(\mathrm{k}) + 0.00268z^{(1)}(k) = 535.37261$$

جدول (18) اختبار دقة الانموذج

Test	LS
Cord r	1.18083438104
C	0.322024430636
P	0.111111111111

من جدول رقم (18) تم الحصول على نتائج الاختبارات التي تستخدم في دقة الانموذج الرمادي GM(1,1) و بمقارنة هذه النتائج مع جدول رقم (1) تبين إن اختبار درجة الارتباط (r) تحقق و بذلك يثبت استخدام الانموذج GM(1,1) ، و عند اختبار نسبة التباين (C) تبين إن الانموذج يجتاز أي من الممكن استخدامه أما عند اختبار احتمال الخطأ المتبقي الصغير (P) تبين إن الانموذج فشل عند هذا الاختبار . إن تحقق اختبار واحد كاف لاستخدام الانموذج .

- النتائج الخاصة لبيانات معدل الاستهلاك لوقود الديزل (D.O) :

جدول (19) يمثل القيم التنبؤية للمشاهدات (D.O) لطريقة (LS)

Observations	Method (LS)
1	128.778
2	132.049
3	119.527
4	108.192
5	97.932
6	88.645
7	80.239
8	72.630
9	65.742
10	59.508
11	53.865
12	48.757
13	44.133
14	39.948

في جدول رقم (19) تم الحصول على القيم التنبؤية للانموذج الرمادي GM(1,1) لطريقة المربعات الصغرى (LS) و (14)مشاهدة لمعدل الاستهلاك لوقود الديزل(D.O) وتم الحصول على القيم التنبؤية المفقودة للشهر السابع و الثامن و التي تمثل المشاهدة (10) و (11) بمقدار 59.508 و 53.865 على التوالي.

جدول (20) يمثل القيم التقديرية للمعالم و قيم المقاييس المستخدمة

Method	MSE	MAPE	a hat	b hat
LS	0.980322 155139	2.013418 39059	0.09963255 97217	166.10253 0177

في جدول رقم (20) تم الحصول على القيم التقديرية لمعالم الانموذج الرمادي GM(1,1) باستخدام طريقة المربعات الصغرى (LS) و على القيم لكل من المقاييس المستخدمة ، و بذلك يصبح الانموذج بعد تقدير المعالم بحسب الطريقة الأفضل LS كالآتي :

$$x^{(0)}(\mathrm{k}) + 0.09963z^{(1)}(k) = 166.10253$$

جدول (21) اختبار دقة الانموذج

Test	LS
Cord r	1.08799972488
C	0.598249609260
P	0.222222222222

من جدول رقم (21) تم الحصول على نتائج الاختبارات التي تستخدم في دقة الانموذج الرمادي GM(1,1) و بمقارنة هذه النتائج مع جدول رقم (1) تبين إن اختبار درجة الارتباط (r) هنا تحقق و هو كاف لإثبات إن انموذج GM(1,1) يمكن استخدامه ، أما عند اختبار نسبة التباين (C) تبين إن الانموذج يجتاز أي من الممكن استخدامه أما عند اختبار احتمال الخطأ المتبقي الصغير (P) تبين إن الانموذج فشل عند هذا الاختبار.إن تحقيق اختبار واحد شرط كاف لاستخدام الانموذج .

2-7 الاستنتاجات

رغم كون حجم العينات المستخدمة هي حجوم صغيرة إلا إن معظم التقديرات ذات كفاءة عالية اعتمادا على نتائج المحاكاة و النتائج التطبيقية تم استنتاج ما يأتي :

- عند حجم عينة n=8 كانت طريقة الانحدار التدريجي (DS) أفضل من بقية الطرائق حيث حصلت على أقل معدل بحسب مقياس MSE ، وعند مقياس MAPE لنفس حجم العينة سجلت طريقة المربعات الصغرى (LS) على أقل معدل من بقية الطرق .
- عند حجم عينة n=15 كانت طريقة المربعات الصغرى (LS) هي الأفضل من بقية الطرق حيث حصلت على أقل معدل بحسب مقياس MSE ومقياس MAPE .

أما أفضل طريقة من حيث التكرار فقد سجلت طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) أعلى تكرار من بقية الطرق حسب مقياس MAPE ، وسجلت طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) على أعلى تكرار بحسب مقياس MSE عند اختلاف حجوم العينات .

عند استخدام المعالم الافتراضية (a=-0.012,b=196.7):

- عندما حجم العينة n=8 فان أقل تقدير للمعلمة a حسب مقياس MSE و MAPE حصلت عليها طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) ، و أقل تقدير للمعلمة b بحسب مقياس MSE حصلت عليها طريقة الانحدار التدريجي (DS) أما بحسب مقياس MAPE فأن طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) حصلت على أقل تقدير للمعلمة b .
- عندما حجم العينة n=15 فأن أقل تقدير للمعلمة a و المعلمة b بحسب مقياس MSE ومقياس MAPE حصلت عليها طريقة المربعات الصغرى (LS) .

وعند استخدام المعالم الافتراضية (a=0.01189,b=580.27976) :

- عندما حجم العينة n=8 فأن أقل تقدير للمعلمة a بحسب مقياس MSE ومقياس MAPE حصلت عليها طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) ، و أقل تقدير للمعلمة b بحسب مقياس MSE حصلت عليها طريقة الانحدار التدريجي و حصلت طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) بحسب مقياس MAPE .
- عندما حجم العينة n=15 فأن أقل تقدير للمعلمة a بحسب مقياس MSE و مقياس MAPE حصلت عليها طريقة المربعات الصغرى الكلية (TLS) ، وإن أقل تقدير للمعلمة b بحسب مقياس MSE ومقياس MAPE حصلت عليها طريقة المربعات الصغرى (LS) .

وبهذا نستنتج بأن نتائج طريقة المربعات الصغرى(LS) تعد الأفضل من بقية الطرائق إذ عند تطبيقها على البيانات الحقيقية أثبتت حصولها على أفضل النتائج و بكفاءة عالية .

2-8 التوصيات

- نوصي بأخذ رتبة فروق وعدد متغيرات أكبر من واحد للانموذج GM(1,1) .
- الاستعانة بهذا الانموذج عند وجود بيانات مفقودة حيث اثبت دقته وكفاءته في الحصول على النتائج .
- تطوير دراسة هذا الانموذج من خلال ربطه بنماذج أخرى للحصول على كفاءة أعلى .

2-9 المصادر

1. Cong , S .; Han, J.; Liang, S.; (2011) ; "Application of Grey System Theory on Construction Control of Bridge"; International Conference on Electric Technology and Civil Engineering ; IEEE .

2. Guihong, P. ; Xianguo,D. ; (2011) ; " Application of Time Series Equal-Space GM(1,1) On Slope Displacement Prediction " ; Physical and Numerical Simulation of Geotechnical Engineering .

3. Imam, I. ; Kodratoff, Y. ; El-Dessouki, A. ; Ali , M. ; (1999) ; " Multiple Approaches to Intelligent Systems " Book ; Springer .

4. Julong, D. ; (1989); "Introduction to Grey System Theory "; The Journal of Grey System ; pp.(1-24).

5. Kayacan ,E. ; Ulutas ,B. ; Kaynak ,O.; (2010); "Grey system theory-based models in time series prediction" ; Expert Systems with Applications ; Vol.73 ; pp.(1784-1789).

6. Liu , S. ; Lin , Y. ; (2010); "Grey Systems: Theory and Applications"; Book ,Springer.

7. Liu, S.; Lin, Y.; (2006) ; "Grey Information Theory and Practical Applications " ; Book ; Springer .

8. Liu, S. ; Yang, Y. ; Forrest, J.; (2016) ; " Grey Data Analysis Method , Models and Application " ; Book ; Springer .

9. Liu, X.; Jiang, W. ; Xie, J. ; (2009) ; "An Improved Single Variable First-order Grey Model "; International Conference on Industrial Mechatronics and Automation ; IEEE.

10. Liu,S. ; Forrest, J.; Yang,Y.; (2012) ; "A Brief Introduction to Grey Systems Theory" ; Grey Systems : Theory and Application , Vol.2 ; pp.(89-104).

11. Pedrycz , W. ; Chen , S. ; (2013) ; "Time Series Analysis , Modeling and Application" ; Book ; Springer .

12. Peirong, J. ; Juan, C. ; Wenchen, Z. ; (2008) ; " Theory of Grey Systems and its Application in in Electric Load Forecasting " ; Cybernetics and Intelligent Systems ;IEEE.

13. Shen, X. ; Lu, Z. ; (2014) ; " The Application of Grey Theory Model in the Predication of Jiangsu Province's Electric Power Demand " ; Conference on Power and Energy Systems ; Vol.7 ;pp.(81-87) .

14. Tieding , L. ; Shijian , Z. ; Wei , L. ; Liting , Z. ; (2009); "An improved Algorithm of Grey Model-GM(1,1) based on Total Least Squares and its application in Deformation Forecast" ; IEEE.

15. Weiqiang , Y. ; Honggui , L. ; (2013) ; "Application of Grey Theory to the Prediction of Diesel Consumption of Diesel Generator Set" ; IEEE.

16. Xue-mei ,L. ; Yao-guo ,D. ; Jie-jue ,Z.; (2009); "An optimization method of estimating parameters in GM(1,1) model"; IEEE.GSIS.

17. Zhao , M. ; Zhao , D. ; Jiang , Z. ; Cui , D. ; Li , J. ; Shi , X. ; (2015) ; " The Gray Prediction GM(1,1) Model in Traffic Forecast Application " ; Mathematical Modeling of Engineering Problems ; Vol.2 ; No. 1 ; pp.(17-22) .

Comparison Some Estimation Methods Of GM(1,1) Model With Missing Data and Practical Application

Abstract

This paper presents a grey model GM(1,1) of the first rank and a variable one and is the basis of the grey system theory , This research dealt properties of grey model and a set of methods to estimate parameters of the grey model GM(1,1) is the least square Method (LS) , weighted least square method (WLS), total least square method (TLS) and gradient descent method (DS). These methods were compared based on two types of standards: Mean square error (MSE), mean absolute percentage error (MAPE), and after comparison using simulation the best method was applied to real data represented by the rate of consumption of the two types of oils a Heavy fuel (HFO) and diesel fuel (D.O) and has been applied several tests to make sure the accuracy of grey model GM(1,1). The most important results we have reached (LS) is the best method to estimate the parameters of this model, as when applied proved to obtaining the best results and used this method in the process of addressing one of the problems of this data and missing values, and also used in the forecasting process for future values.

Keywords-**GM(1,1) ; LS ; WLS ; TLS ; DS ; HFO ; D.O .**