

## مقارنة بعض طرائق تقدير معالم توزيع بواسون –

### ويبل المركب

أ.م.د. انتصار عريبي فدعم / كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد  
الباحث / نورايا محمد

تاريخ التقديم: 2017/3/2

تاريخ القبول: 2017/5/14

### المستخلص

في هذا البحث تم التطرق الى عملية تركيب توزيعين باستخدام اسلوب تركيب جديد يتم فيه ربط عدد من توزيعات أوقات الحياة (التوزيعات المستمرة) بحيث ان العدد لهذه التوزيعات يمثل متغير عشوائي يتوزع وفقا لأحد التوزيعات العشوائية المتقطعة، بالاعتماد على هذا الاسلوب تم تركيب توزيع بواسون المقطوع عند الصفر مع توزيع ويبل لينتج توزيع وقت حياة جديد ذو ثلاث معالم يمتاز بان دالة معدل الفشل له تاخذ العديد من الحالات (متزايدة، متناقصة، الشكل الموحد وشكل الحوض) و دراسة الخصائص الاحصائية للتوزيع الناتج كالتوقع، التباين، الدالة التجميعية، دالة البقاء و دالة معدل الفشل فضلا عن تقدير معالم التوزيع الناتج باستعمال ثلاث طرائق تقدير هي طريقة الامكان الاعظم، وطريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية Downhill Simplex، طريقة النسب المنوية، المقارنة بينهم تمت بالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطا (MSE) عن طريق تنفيذ تجربة المحاكاة باستخدام حجوم عينات مختلفة (صغيرة، كبيرة، متوسطة) التي من خلال نتائجها تم التوصل الى ان طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية D.S كانت هي الأفضل في تقدير المعالم و الدالة الاحتمالية للتوزيع المركب .

**المصطلحات الرئيسية للبحث/** توزيعات بواسون المركبة، توزيع بواسون- ويبل المركب، طريقة الامكان الاعظم، خوارزمية EM , طريقة اقل مربع كاي، خوارزمية Downhill Simplex ، طريقة النسب المنوية .



مجلة العلوم

الاقتصادية والإدارية

العدد 101 المجلد 23

الصفحات 452-475

\*البحث مستل من رسالة ماجستير.



## مقارنة بعض طرائق تقدير معالم توزيع بواسون - ويبل المركب

### 1- المقدمة

ان عملية تركيب توزيعين لها عدد من طرق الربط لتكوين توزيع جديد يكون اكثر مرونة وفائدة احصائيا، وموضوع التركيب الذي نحن بصدد الان هو تركيب اي توزيع متقطع مع احد توزيعات اوقات الحياة الشائعة لانتاج توزيع وقت حياة (وقت الفشل) جديد بالاعتماد على مفهوم استخدمته لأول مرة Adamidis<sup>[3]</sup> عام 1998 حيث عمل على دمج توزيع بواسون مع التوزيع الاسي وذلك من خلال استخدام اقل وقت لحدوث الفشل وباستخدام التوقع الشرطي الذي يمثل احد توزيعات اوقات الفشل مضروبا بالدالة الاحتمالية لاحد التوزيعات المتقطعة والتي تمثل العدد للمكانن او المعدات (الاجهزة) لها وبعد اخذ المجموع لحاصل ضرب الدالتين ينتج التوزيع الحدي للمتغير المطلوب حساب وقت الحياة له، في هذا البحث استخدمت نفس الفكرة الموضحة اعلاه ولكن طبقت على توزيع بواسون - ويبل المركب حيث اول من قام بتركيب هذين التوزيعين هو Wanbo<sup>[8]</sup> حيث اوضح بعض الخصائص الاحصائية المهمة للتوزيع فضلا عن تقدير معالمه بطريقة الامكان الاعظم باستخدام خوارزمية تعظيم التوقع (EM). في هذا البحث تم تقدير معالم توزيع بواسون - ويبل المركب بثلاث طرائق تقدير هي طريقة الامكان الاعظم، طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية Downhill Simplex، طريقة النسب المنوية. المقارنة بين الطرائق الثلاثة تمت بالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ بتنفيذ تجربة المحاكاة ولحجوم عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة).

### 2- مشكلة البحث

تتمثل مشكلة البحث في ان هنالك العديد من الظواهر التي لا يمكن نمذجتها باستخدام التوزيعات المفردة (وانما مع دمج اكثر من توزيع) كالطلبات التي ترد الى شركة التأمين خلال فترة زمنية محددة، ظاهرة سقوط الامطار، قوة الزلازل او العطلات التي تحدث في اجهزة معينة، ففي هذه الحالات يكون التوزيع الملائم هو احد التوزيعات المركبة والتي منها توزيع بواسون المركب والذي يعتمد في عمله على دمج توزيع بواسون مع توزيع (او توزيعات) اخرى.

### 3- هدف البحث

يهدف البحث الى المقارنة ما بين بعض طرائق تقدير معالم توزيع بواسون - ويبل المركب وتحديد الطريقة الافضل في تقدير المعالم والدالة الاحتمالية فضلا عن تقدير دالة المعولية للتوزيع المركب.

### 4- توزيع بواسون - ويبل المركب

لنفترض وجود  $z$  من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة التوزيع التي تتوزع وفقا لتوزيع ويبل بدالة كثافة احتمالية تعطى بالاتي [8]

$$f(T, \alpha, \beta) = \alpha \beta T^{\alpha-1} e^{-\beta T^{\alpha}} \quad T > 0$$

(1)  $(\alpha > 0)$  : تمثل معلمة الشكل،  $(\beta > 0)$  : تمثل معلمة القياس

وعلى افتراض ان  $Z$  تمثل متغير عشوائي ايضا يتوزع وفقا لتوزيع بواسون المنقطع عند الصفر بدالة كثافة احتمالية تعطى بالاتي [8]

$$f(z, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^z}{z!} (1 - e^{-\lambda})^{-1} \quad z = 1, 2, \dots \quad (2)$$

وسنفرض الان ان  $x$  يمثل اقل وقت فشل من بين اوقات الفشل التي تتوزع وفقا لتوزيع ويبل اعلاه وكالاتي  $X = \min(T_1, T_2, T_3, \dots, T_z)$



## مقارنة بعض طرائق تقدير معلمات توزيع بواسون - وبيل المركب

والذي يتم الحصول عليه بتطبيق صيغة الرتبة الاحصائية ( order statistics ) ومن ثم فان التوزيع الشرطي الى  $x$  باعطاء  $z$  ( عدد اوقات الفشل ) سيكون وفق الدالة الاتية [8]

$$f(x|z) = \alpha \beta z x^{\alpha-1} e^{-\beta z x^\alpha} \quad (3)$$

وعليه فان الدالة الحدية الى المتغير العشوائي  $x$  الذي يتوزع وفقا لتوزيع بواسون- وبيل المركب يمكن ايجاده بالشكل الاتي [8]

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \sum_{z=1}^{\infty} \alpha \beta z x^{\alpha-1} e^{-\beta z x^\alpha} \frac{e^{-\lambda} \lambda^z}{z!} (1 - e^{-\lambda})^{-1}$$

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\lambda^{z-1} e^{-\beta z x^\alpha}}{(z-1)!}$$

بفرض ان  $a = z - 1$  فان  $z = a + 1$  فان  $a = \infty$  و عندما  $a = 0$  فان  $z = 1$  وعليه فعندما  $z = 1$

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda^a e^{-\beta(a+1)x^\alpha}}{a!}$$

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda^a e^{-a\beta x^\alpha} e^{-\beta x^\alpha}}{a!}$$

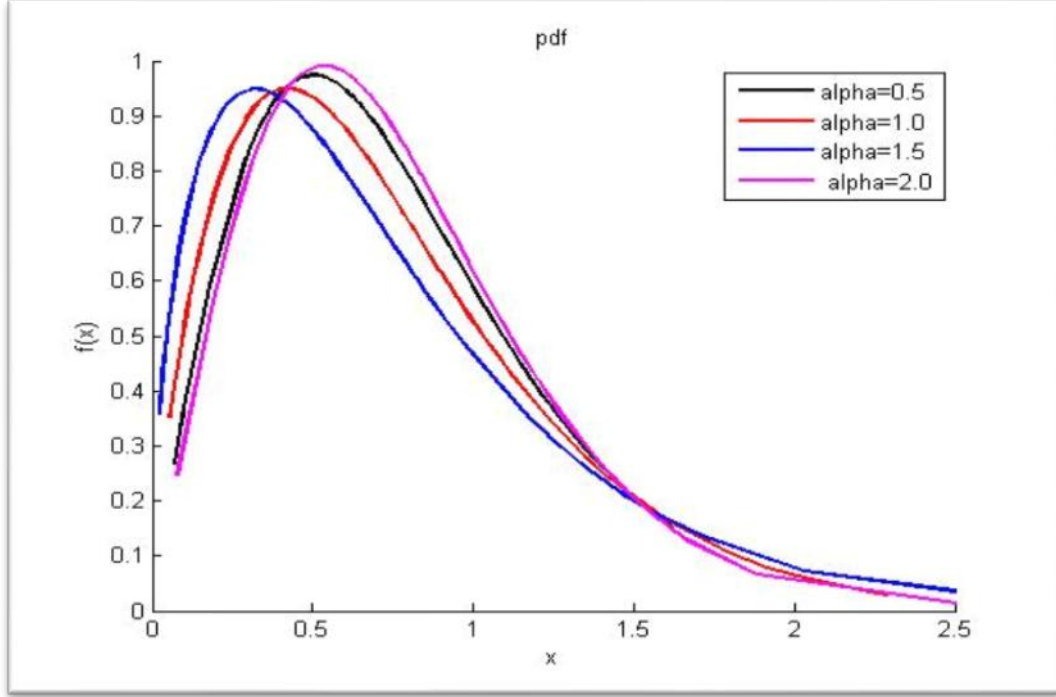
$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda} e^{-\beta x^\alpha}}{(1 - e^{-\lambda})} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda^a (e^{-\beta x^\alpha})^a}{a!}$$

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda} e^{-\beta x^\alpha}}{(1 - e^{-\lambda})} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-\beta x^\alpha})^a}{a!}$$



## مقارنة بعض طرائق تقدير معلمات توزيع بواسون - وييل المركب

ومن ثم فإن الدالة الاحتمالية لتوزيع بواسون - وييل المركب ستكون بالصيغة الآتية [8]

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})} e^{-\lambda - \beta x^{\alpha} + \lambda e^{-\beta x^{\alpha}}} \quad (\alpha, \beta, \lambda) > 0, x \geq 0 \quad (4)$$


الشكل (1)

يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون - وييل المركب عندما ( $\lambda = 1$  و  $\beta = 2$ ) [8]

### 5- خصائص توزيع بواسون - وييل المركب

1- الوسط الحسابي ( $\mu$ ) [8]

$$\mu(x) = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)} \int_0^{\infty} \alpha \beta \lambda x^{\alpha} e^{-\beta x^{\alpha} + \lambda e^{-\beta x^{\alpha}}} dx \quad (5)$$

$$dx = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy, \quad x = (y)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad y = x^{\alpha} \text{ بفرض ان}$$

$$\mu(x) = \frac{\alpha \beta \lambda}{(e^{\lambda}-1)} \int_0^{\infty} y e^{-\beta y + \lambda e^{-\beta y}} \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dy$$
$$\mu(x) = \frac{\beta \lambda}{(e^{\lambda}-1)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-\beta y + \lambda e^{-\beta y}} dy \quad (6)$$

2- التباين ( $\sigma^2$ ) [8]



## مقارنة بعض طرائق تقدير معلمات توزيع بواسون - ويبل المركب

$$\text{Var}(x) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$EX^2 = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)} \int_0^{\infty} \alpha \beta \lambda x^{\alpha+1} e^{-\beta x^{\alpha} + \lambda} e^{-\beta x^{\alpha}} dx \quad (7)$$

وباستخدام نفس الفرضية في حالة ايجاد التوقع

$$EX^2 = \frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \int_0^{\infty} \alpha \beta \lambda y^{\frac{\alpha+1-\alpha-1}{\alpha}} e^{-\beta y + \lambda} e^{-\beta y} \frac{1}{\alpha} dy$$

$$EX^2 = \frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \int_0^{\infty} \beta \lambda e^{-\beta y + \lambda} e^{-\beta y} dy \quad (8)$$

ان حساب المقدار النهائي الى الوسط الحسابي و التباين يتم من خلال استخدام احد طرق التكامل العددي للصيغ (6) و (8)

3- دالة التوزيع التجميعية (Cumulative Distribution Function : cdf) [8]

كذلك فان دالة التوزيع التجميعية يمكن ايجادها كالآتي

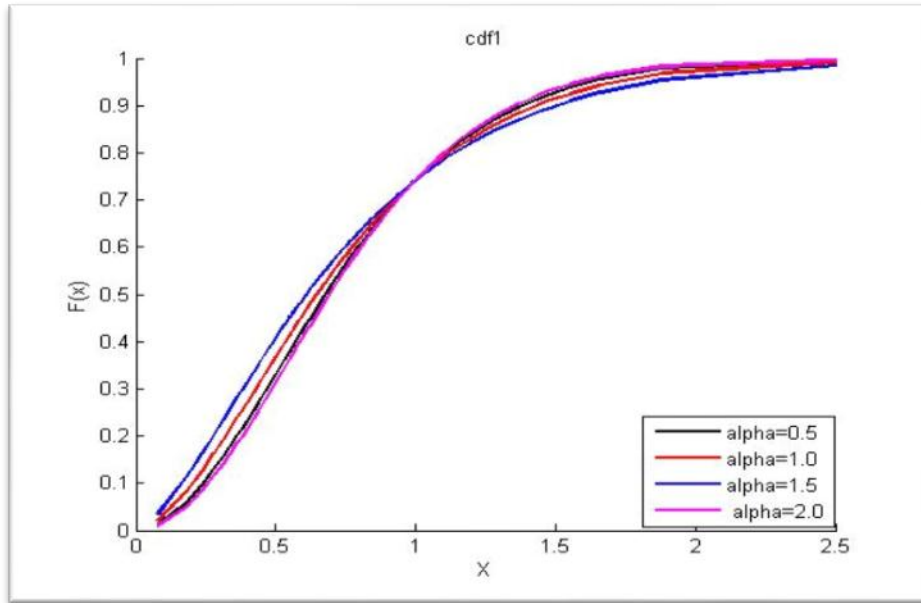
$$F(x, \alpha, \beta, \lambda) = \int_0^x \frac{\alpha \beta \lambda u^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})} e^{-\lambda - \beta u^{\alpha} + \lambda} e^{-\beta u^{\alpha}} du$$

$$F(x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{-e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \int_0^x -e^{\lambda e^{-\beta u^{\alpha}}} e^{-\beta u^{\alpha}} \alpha \beta \lambda u^{\alpha-1} du$$

$$F(x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{-e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)} [e^{\lambda e^{-\beta u^{\alpha}}}]_0^x$$

ومن ثم فان الدالة التجميعية تأخذ الصيغة الآتية

$$F(x, \alpha, \beta, \lambda) = [e^{\lambda e^{-\beta x^{\alpha}}} - e^{\lambda}] [1 - e^{\lambda}]^{-1} \quad x > 0 \quad (9)$$



الشكل (2)

يوضح دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية لتوزيع بواسون - ويبل عندما ( $\lambda = 1$  و  $\beta = 2$ ) [8]

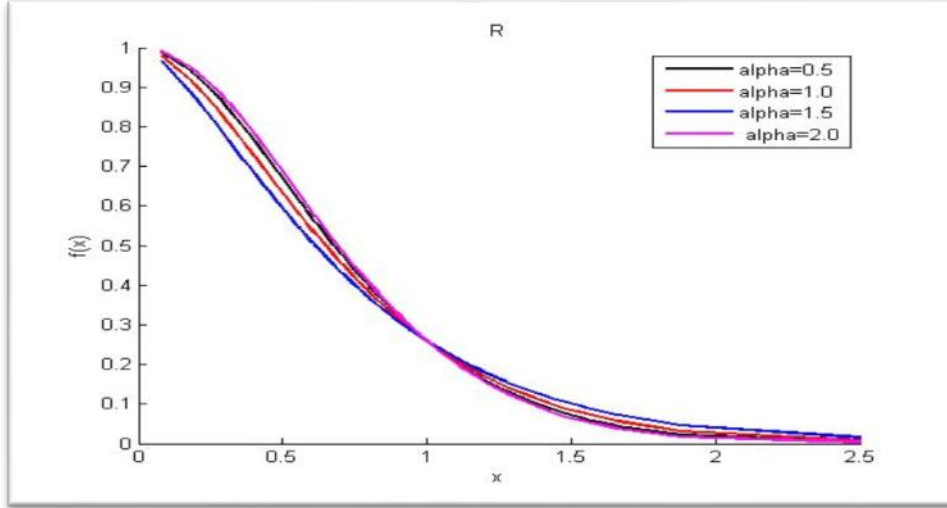
4- دالة الموقلية (Reliability Function : S) [8]

$$R(X, \alpha, \beta, \lambda) = 1 - F(X, \alpha, \beta, \lambda)$$



مقارنة بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون -  
ويبل المركب

$$R(X, \alpha, \beta, \lambda) = [1 - e^{\lambda e^{-\beta x^\alpha}}] [1 - e^{-\lambda}]^{-1} \quad x > 0 \quad (10)$$



الشكل (3)

يوضح دالة المعولية لتوزيع بواسون - ويبل عندما  $(\lambda = 1$  و  $\beta = 2)$  [8]

5- دالة معدل الفشل (Failure Rate Function :  $h(x)$ ) [8]

$$h(x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{f(x, \alpha, \beta, \lambda)}{S(x, \alpha, \beta, \lambda)}$$

$$h(x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})} e^{-\lambda - \beta x^\alpha + \lambda e^{-\beta x^\alpha}} \left[ \frac{1 - e^{\lambda e^{-\beta x^\alpha}}}{1 - e^{-\lambda}} \right]^{-1}$$

$$h(x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})} e^{-\lambda - \beta x^\alpha + \lambda e^{-\beta x^\alpha}} \frac{-e^{-\lambda} (1-e^{-\lambda})}{-[e^{\lambda e^{-\beta x^\alpha}} - 1]}$$

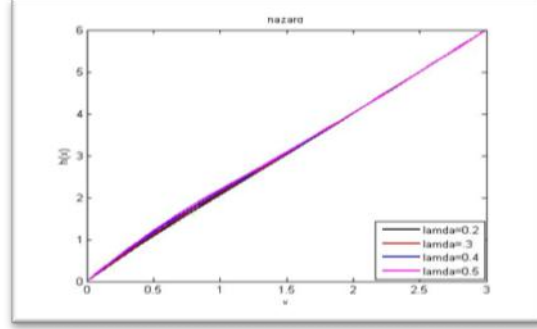
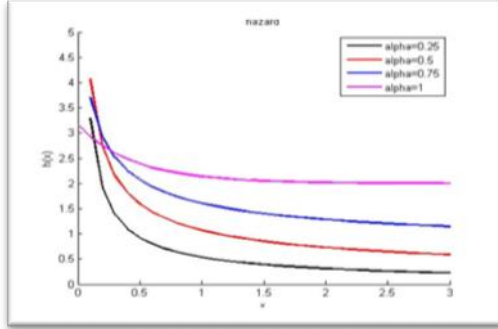
$$h(x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha + \lambda e^{-\beta x^\alpha}}}{[e^{\lambda e^{-\beta x^\alpha}} - 1]} \quad (11)$$

(a)

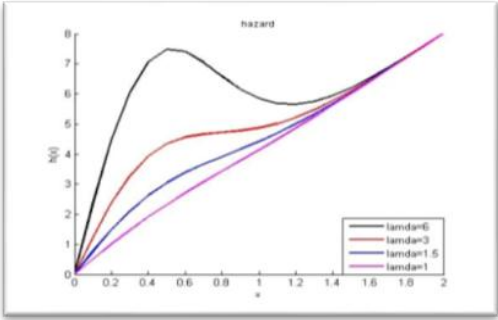
(b)



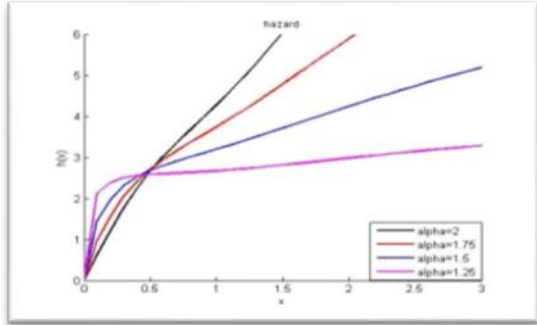
## مقارنة بعض طرائق تقدير معالم توزيع بواسون - ويبل المركب



(d)



(c)



الشكل ( 4 )

يوضح دالة معدل الفشل لتوزيع بواسون - ويبل المركب عندما  $\lambda = 1$  و  $\beta = 2$  (a) ،  $\lambda = 1$  و  $\alpha = 2$  (b) ،  $\alpha = 2$  و  $\beta = 1$  (c) ،

$\beta(d) = 2$  ،  $\beta\lambda = 1$  و  $\beta = 2$  [8]

### 6- الوسيط (Median : Me)

يمكن تعريف الوسيط بأنه تلك القيمة التي تقسم الاحتمال الكلي المعروف بفضاء العينة الى قسمين متساويين احدهما يكون يمين الوسيط والاخر الى يساره في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة. اما تعريف الوسيط بالنسبة للمتغيرات المستمرة فانه يمثل القيمة التي تقسم المساحة تحت المنحني الى جزئين متساويين ويمكن الحصول على هذه القيمة بتطبيق الصيغة الآتية في حال كون التوزيع من النوع المستمر .

$$\int_0^m f(x) dx = \int_m^\infty f(x) dx = 0.5$$

$$\int_m^\infty \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})} e^{-\lambda - \beta x^\alpha + \lambda e^{-\beta x^\alpha}} dx = 0.5$$

$$\frac{-e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}(e^\lambda - 1)} \int_m^\infty e^{\lambda e^{-\beta x^\alpha}} e^{-\beta x^\alpha} x^{\alpha-1} \alpha(-\beta) \lambda dx = 0.5$$



$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-e^{-\lambda})} [e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha}}]_m &= 0.5 \\ (1-e^{-\lambda})^{-1} [e^{-\lambda(0)} - e^{-\lambda e^{-\beta m^\alpha}}] &= 0.5 \\ 0.5(1-e^{-\lambda}) &= [1 - e^{-\lambda e^{-\beta m^\alpha}}] \\ e^{-\lambda e^{-\beta m^\alpha}} &= 1 - 0.5 + 0.5 e^{-\lambda} \\ e^{-\lambda e^{-\beta m^\alpha}} &= 0.5 + 0.5 e^{-\lambda}\end{aligned}$$

بأخذ اللوغارتم الى طرفي المعادلة اعلاه نحصل على

$$\begin{aligned}\lambda e^{-\beta m^\alpha} &= \log(0.5 + 0.5 e^{-\lambda}) \\ e^{-\beta m^\alpha} &= \frac{\log(0.5 + 0.5 e^{-\lambda})}{\lambda}\end{aligned}$$

بأخذ اللوغارتم مرة ثانية الى المعادلة اعلاه ينتج

$$-\beta m^\alpha = \log \left[ \frac{\log(0.5 + 0.5 e^{-\lambda})}{\lambda} \right]$$

ومن ثم فان قيمة الوسيط تمثل المقدار الاتي

$$m = \left\{ -\beta^{-1} \log \left[ \frac{\log(0.5 + 0.5 e^{-\lambda})}{\lambda} \right] \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (12)$$

#### 7- دالة التوزيع العكسية (Quantiles : $x_u$ ) [8]

تعرف دالة التوزيع العكسية او دالة quantile بانها الدالة العكسية للدالة التجميعية للتوزيع ويمكن الحصول عليها كالآتي لنفرض ان

$$U = F(X)$$

$$X = F^{-1}(U)$$

$$\begin{aligned}U &= [e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha}} - e^{-\lambda}] [1 - e^{-\lambda}]^{-1} \\ [e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha}}] &= U[1 - e^{-\lambda}] + e^{-\lambda}\end{aligned}$$

بأخذ اللوغارتم الى طرفي الصيغة اعلاه نحصل على

$$\begin{aligned}\lambda e^{-\beta x^\alpha} &= \log \{ U[1 - e^{-\lambda}] + e^{-\lambda} \} \\ e^{-\beta x^\alpha} &= \frac{\log \{ U[1 - e^{-\lambda}] + e^{-\lambda} \}}{\lambda}\end{aligned}$$

بأخذ اللوغارتم مرة اخرى الى طرفي الصيغة اعلاه نحصل على

$$-\beta x^\alpha = \log \left[ \frac{\log \{ U[1 - e^{-\lambda}] + e^{-\lambda} \}}{\lambda} \right]$$

ومن ثم فان الصيغة النهائية لدالة التوزيع العكسية ستكون بالصيغة الاتية





$$x = \left\{ \frac{-\log \left[ \frac{\log \{ [1 - e^{-\lambda}] + e^{-\lambda} \}}{\lambda} \right]}{\beta} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (13)$$

### 6- بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون - ويبل المركب

(1) طريقة الامكان الاعظم<sup>[8]</sup> Maximum Likelihood Method

بعد استخراج  $e^{-\lambda}$  عامل مشترك من بسط و مقام صيغة توزيع بواسون - ويبل المركب نحصل على

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1}}{(e^{\lambda} - 1)} e^{-\beta x^{\alpha} + \lambda e^{-\beta x^{\alpha}}} \quad (14)$$

ان دالة الامكان الى توزيع بواسون - ويبل المركب تعطى كالاتي

$$L(x; \alpha, \beta, \lambda) = \left[ \frac{\alpha \beta \lambda}{e^{\lambda} - 1} \right]^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} e^{-\beta \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha} + \lambda \sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i^{\alpha}}} \quad (15)$$

وبأخذ اللوغارتم الى طرفي دالة الامكان اعلاه و كما يلي

$$\log L(x; \alpha, \beta, \lambda) = n \log(\alpha \beta \lambda) - n \log(e^{\lambda} - 1)$$

$$+ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - \beta \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha} + \lambda \sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i^{\alpha}}$$

وباشتقاق الدالة اللوغارتمية اعلاه بالنسبة الى معلمات توزيع بواسون - ويبل المركب الثلاثة  $(\alpha, \beta, \lambda)$  نحصل على الاتي

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log x_i - \beta \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha} \log(x_i) + \lambda$$

$$\sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i^{\alpha}} (-\beta) x_i^{\alpha} \log(x_i)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log x_i [1 - \beta x_i^{\alpha} - \beta \lambda x_i^{\alpha} e^{-\beta x_i^{\alpha}}]$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log x_i [1 - \beta x_i^{\alpha} (1 + \lambda e^{-\beta x_i^{\alpha}})] \quad (16)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha} + \lambda \sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i^{\alpha}} (-x_i^{\alpha})$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha} [1 + \lambda e^{-\beta x_i^{\alpha}}] \quad (17)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \frac{n e^{-\lambda}}{(e^{\lambda} - 1)} + \sum_{i=1}^n e^{-\beta x_i^{\alpha}} \quad (18)$$

بما ان المعادلات (16), (17) و (18) اعلاه تمثل معادلات غير خطية وعليه لا يمكن ايجاد المقدرات الى معلمات توزيع بواسون - ويبل بصورة اعتيادية ومن ثم يلزم استخدام اسلوب تكراري للحصول على المقدرات وعليه سيتم استخدام خوارزمية (EM) والتي بموجبها يتم افتراض قيم ابتدائية للمعلمات وهي  $(\alpha^t, \beta^t, \lambda^t)$  وبعدها تطبيق خطوات خوارزمية (EM) والتي تتطلب حساب الخطوة E والخطوة M وعليه فان الدالة المشتركة الى المتغير العشوائي (x) الذي يمثل التوزيع الاحتمالي الى البيانات المشاهدة مع المتغير العشوائي (z) الذي يمثل التوزيع الاحتمالي الى البيانات المفقودة ستحسب كالاتي [8]

$$f(x, z, \alpha, \beta, \lambda) = p(z, \lambda) f(x | z, \alpha, \beta)$$

$$f(x, z, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^z}{z!} (1 - e^{-\lambda})^{-1} \alpha \beta z x^{\alpha-1} e^{-\beta z x^{\alpha}}$$



مقارنة بعض طرائق تقدير معلمات توزيع بواسون -  
وبيل المركب

وباستخراج  $e^{-\lambda}$  عامل مشترك من بسط و مقام الصيغة اعلاه نحصل على

$$f(x, z, \alpha, \beta, \lambda) = \alpha \beta z x^{\alpha-1} \lambda^z e^{-\beta z x^\alpha} \frac{1}{z!(e^\lambda-1)}$$

$$x > 0, z = 1, 2, \dots$$

بعد إيجاد الدالة المشتركة نقوم بإيجاد الدالة الحدية الى المتغير العشوائي (z) والذي من خلاله نجد التوقع الشرطي الذي يتم استبداله بكل قيمة من القيم المفقودة وكالاتي

$$f(z|x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{f(x, z, \alpha, \beta, \lambda)}{f(x, \alpha, \beta)}$$

$$f(z|x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha \beta z x^{\alpha-1} e^{-\beta z x^\alpha} \lambda^z \frac{1}{z!(e^\lambda-1)}}{\frac{\alpha \beta \lambda x^{\alpha-1}}{(1-e^{-\lambda})} e^{-\lambda - \beta x^\alpha + \lambda e^{-\beta x^\alpha}}}$$

$$f(z|x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\lambda^{z-1}}{(z-1)!} e^{-\beta z x^\alpha - \lambda e^{-\beta x^\alpha} + \beta x^\alpha} \quad z = 1, 2, \dots \quad (19)$$

ومن الدالة الشرطية اعلاه نقوم بإيجاد التوقع الشرطي وكالاتي

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = \sum_{z=1}^{\infty} Z P(Z|X; \alpha, \beta, \lambda)$$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = \sum_{z=1}^{\infty} Z \frac{\lambda^{z-1}}{(z-1)!} e^{-\beta z x^\alpha - \lambda e^{-\beta x^\alpha} + \beta x^\alpha}$$

$$z = b + 1 \quad \text{ومن ثم فان}$$

$$b = z - 1 \quad \text{لنفرض ان}$$

وان حدود b هي من الصفر الى  $\infty$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = \sum_{b=0}^{\infty} (b+1) \frac{\lambda^b}{(b)!} e^{-\beta(b+1)x^\alpha - \lambda e^{-\beta x^\alpha} + \beta x^\alpha}$$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha} + \beta x^\alpha} \sum_{b=0}^{\infty} (b+1) \frac{\lambda^b}{(b)!} e^{-\beta(b+1)x^\alpha}$$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha} + \beta x^\alpha} \sum_{b=0}^{\infty} (b+1) \frac{\lambda^b}{(b)!} e^{-\beta b x^\alpha - \beta x^\alpha}$$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha} + \beta x^\alpha - \beta x^\alpha} \sum_{b=0}^{\infty} (b+1) \frac{\lambda^b}{(b)!} e^{-\beta b x^\alpha}$$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha}} \sum_{b=0}^{\infty} (b+1) \frac{[\lambda e^{-\beta x^\alpha}]^b}{b!}$$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha}} \left[ \sum_{b=0}^{\infty} b \frac{[\lambda e^{-\beta x^\alpha}]^b}{b!} + \sum_{b=0}^{\infty} \frac{[\lambda e^{-\beta x^\alpha}]^b}{b!} \right]$$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha}} \left[ \sum_{b=0}^{\infty} b \frac{[\lambda e^{-\beta x^\alpha}]^b}{b!} + e^{\lambda e^{-\beta x^\alpha}} \right]$$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha}} \sum_{b=0}^{\infty} b \frac{[\lambda e^{-\beta x^\alpha}]^b}{b!} + 1$$

$$E(Z|X; \alpha, \beta, \lambda) = \left[ e^{-\lambda e^{-\beta x^\alpha}} \lambda e^{-\beta x^\alpha} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{[\lambda e^{-\beta x^\alpha}]^{b-1}}{(b-1)!} \right] + 1$$



## مقارنة بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون - وبيل المركب

ومن ثم فإن التوقع الشرطي الى المتغير العشوائي z بإعطاء قيمة المتغير العشوائي x سيكون كالآتي

$$E ( Z | X ; \alpha , \beta , \lambda ) = 1 + \lambda e^{-\beta x^\alpha} \quad (20)$$

ان الخطوة اعلاه تمثل الخطوة M بالنسبة الى خوارزمية EM والتي يتم فيها استبدال القيم المفقودة بالتوقع الشرطي الى القيم المفقودة (القيم الابتدائية) وبمساواة المعادلات (16), (17), (18) بالصفر وتكرار العملية حيث ان المقدرات الى المعلمات سوف تكون بالشكل الآتي [8]

$$\alpha^{(t+1)} = n \left[ \sum_{i=1}^n (\log x_i) \left( \beta^{(t+1)} x_i^{(t+1)} w_i^{(t)} \right) \right]^{-1} \quad (21)$$

$$\beta^{(t+1)} = n \left[ \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha^{(t+1)}} w_i^{(t)} \right]^{-1} \quad (22)$$

$$\lambda^{(t+1)} = n^{-1} \left[ 1 - e^{-\lambda^{(t+1)}} \right] \sum_{i=0}^n w_i^{(t)} \quad (23)$$

$$w_i^{(t)} = 1 + \lambda^{(t)} e^{-\beta^{(t)} x_i^{\alpha^{(t)}}} \quad \text{حيث ان}$$

ونستمر بالتكرار الى ان يتم الحصول على مقدرات مستقرة او لحين تحقيق شرط التوقف للخوارزمية بالحصول على نسبة خطأ معينة  $\varepsilon = 0.00005$  مثلا .

### (2) طريقة Minmum Chi Square باستخدام خوارزمية Downhill Simplex

#### Minmum Chi Square Using Downhill Simplex Algorithm

تعد طريقة اقل مربع كاي من الطرق التقليدية في تقدير المعلمات وتعتمد هذه الطريقة على اساس جعل مجموع مربع كاي اصغر ما يمكن وتعرف دالة مربع كاي <sup>[2]</sup> كما يأتي:

$$\chi^2 = \sum_{x=1}^k \frac{(n_x - p_x)^2}{p_x} \quad (24)$$

$$N = \sum_{x=1}^k f_x \quad , \quad n_x = \frac{f_x}{N} \quad \text{حيث ان}$$

وللحصول على مقدرات المعلمات باستخدام هذه الطريقة تم استخدام طريقة Downhill Simplex <sup>[1]</sup> هي طريقة عددية تستعمل لتقليل او لتعظيم دالة الهدف (المشكلة الرياضية تحت الدراسة) في فضاء متعدد الأبعاد، تطبق هذه الطريقة على مشاكل الامثلية غير الخطية عندما لا يمكن ايجاد المشتقة، تم استخدام هذه التقنية العددية لأول مرة عام 1965 على يد [John Nelder & Roger Mead] وقد سميت الخوارزمية على اسم هذين الباحثين ( Nelder Mead Algorithm ) حيث استخدموا هذه الطريقة في تقدير مصفوفة هس ( Hussian matix ) في الجوار الأدنى، وصفت هذه الخوارزمية لتقليل قيمة دالة الى n من المتغيرات حيث تعتمد على مقارنة قيمة الدالة عند (n+1) من نقاط الشكل الهندسي (الشكل الهندسي الاولي) يلي ذلك استبدال القيمة العالية بنقطة اخرى و بذلك يتحول الشكل من حالة الى حالة اخرى الى ان يصل الى الشكل الامثل ( اي القيم التي تجعل دالة الهدف اقل ما يمكن ) و ذلك يتم بالاعتماد على عدد من العمليات في كل عملية يتم تحول الشكل الهندسي الاولي الى شكل اخر حتى يصل الى الشكل الامثل، وهذه العمليات تشمل الانعكاس ( Reflection ، التوسع (Expansion)، الانكماش (Contraction) والتقلص ( Shrinkage ). وفيما يلي خطوات تقدير معاملات توزيع بواسون - وبيل المركب بطريقة Downhill Simplex Method .

1- تحديد دالة الهدف (Objective function) للخوارزمية [ الصيغة الرياضية التي لا يمكن حلها] وتحديد نوعها من حيث التعظيم او التقليل و هنا تمثل صيغة مربع كاي (chi - square) التي نهدف الى جعلها اقل ما يمكن حيث ان صيغة مربع كاي تمثل الصيغة (24)

2- ادخال قيم معاملات الخوارزمية الاربعة وهي (  $\sigma$  : معلمة الانعكاس)، (  $\gamma$  : معلمة التوسع)، (  $\rho$  : معلمة الانكماش)، (  $\tau$  : معلمة التقلص ) ، حيث ان معلمة معرفة كما يلي



## مقارنة بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون - وبيل المركب

$$0 < \tau < 1, \quad 0 < \rho < 1, \quad \gamma > 1, \quad \sigma > 0$$

وفي اغلب البحوث التي تناولت هذه الخوارزمية كانت كل قيمة من قيم معاملات الخوارزمية مساوية الى  $\sigma = 1, \gamma = 2, \rho = 0.5, \tau = 0.5$  وهي القيم التي اعتمدت عند تطبيق الخوارزمية .  
تم توظيف هذه الطريقة في تقدير معاملات توزيع بواسون - وبيل المركب من قبل الباحثة بعد الاطلاع على المصادر [ 9, 5, 1 ]

3- توليد مصفوفة مكونة من ( n+1 ) من النقاط الاختبارية لكل متغير او معلمة في الدالة وتسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الحلول الاولية وهي ذات البعد  $m \times (n+1)$  حيث ان m : تمثل عدد الاعمدة وهي عدد المعلمات في التوزيع  $n+1$  : عدد القيم الاختبارية لكل معلمة

$$W = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} & \lambda_{n+1} \end{vmatrix}$$

4- تعوض قيم كل صف من المصفوفة اعلاه في دالة الهدف وحساب قيمتها ومن ثم ترتب دوال الهدف الناتجة [ والتي عددها n+1 ] من الاقل قيمة الى اعلى قيمة حيث ان الاقل قيمة هي التي تمثل افضل حل والاعلى قيمة هي التي تمثل اسوء حل .

5- ايجاد المتوسط لمصفوفة الحلول باستخدام الصيغة الاتية :

$$X_m = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} w(i)$$

6- ايجاد نقطة اختبار جديدة تسمى نقطة الانعكاس ( Reflection Point :  $x_r$  ) ويتم ايجادها وفق الصيغة الاتية :

$$X_r = X_m + \sigma (X_m - X_{n+1})$$

ومن ثم حساب دالة الهدف لهذه النقطة  $f(x_r)$  فاذا كانت  $f_1 < f_r < f_{n+1}$  اي ان نقطة الانعكاس تقع ما بين افضل نقطة واسوء نقطة عندئذ يتم استبدال اسوء نقطة بالنقطة  $x_r$  اي جعل  $x_{n+1} = x_r$  اما اذا كانت  $f_r < f_{x_1}$  اي ان نقطة الانعكاس افضل من افضل نقطة انتقل للخطوة الاتية .

7- ايجاد نقطة اختبار جديدة تسمى نقطة التوسع ( Expansion Point : e ) تحسب كالاتي :

$$X_e = X_m + \gamma (X_r - X_m)$$

ثم ايجاد دالة الهدف لنقطة التوسع  $f(x_e)$  فاذا كانت  $f(x_e) < f(x_r)$  (اي ان نقطة التوسع افضل من افضل نقطة) استبدال اسوء نقطة بنقطة التوسع  $x_{n+1} = x_e$  اما اذا كان  $f(x_n) < f(x_r) < f(x_{n+1})$  عندئذ ننقل الى الخطوة الاتية .

8- ايجاد نقطة اختبار جديدة تمثل نقطة الانكماش ( Contraction Point : C ) ويتم ايجادها في حالتين

(a) اذا كانت  $f(x_n) < f(x_r) < f(x_{n+1})$  عندئذ فان الصيغة الاتية سيتم استعمالها لايجاد نقطة الانكماش الخارجي ( Outside Contraction :  $X_{oc}$  )

$$X_{oc} = X_m + \rho (X_r - X_m)$$



## مقارنة بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون - وبيل المركب

ومن ثم يتم ايجاد الدالة لنقطة الانكماش اعلاه  $f(x_{oc})$  فإذا كانت  $f(x_{oc}) \leq f(x_r)$  نستبدل اسوء نقطة  $(x_{n+1})$  بنقطة الانكماش الخارجي  $(x_{oc})$  عدا ذلك اذهب للنقطة 9 .  
(b) إذا كانت  $f(x_r) \geq f(x_{n+1})$  [ اي ان نقطة الانعكاس اسوء من اسوء نقطة ] عندئذ سيتم ايجاد نقطة الانكماش الخارجي (Inside Contraction :  $x_{ic}$ ) سيتم ايجادها من الصيغة الاتية:

$$x_{ic} = x_m - \rho (x_m - x_{n+1})$$

ومن ثم يتم حساب الدالة الى نقطة الانكماش الداخلي  $f(x_{ic})$  فإذا كانت  $f(x_{ic}) < f(x_{n+1})$  نستبدل اسوء نقطة  $x_{n+1}$  بنقطة الانكماش الداخلي  $x_{ic}$  عدا ذلك نذهب الى الخطوة 11.

9- ايجاد نقطة اختبار جديدة تمثل نقطة التقلص ( Shrink Point :  $x_{sh}$ ) عند  $n$  من النقاط و تحسب وفق الصيغة الاتية :

$$x_{sh} = x_i + \tau (x_i - x_1)$$

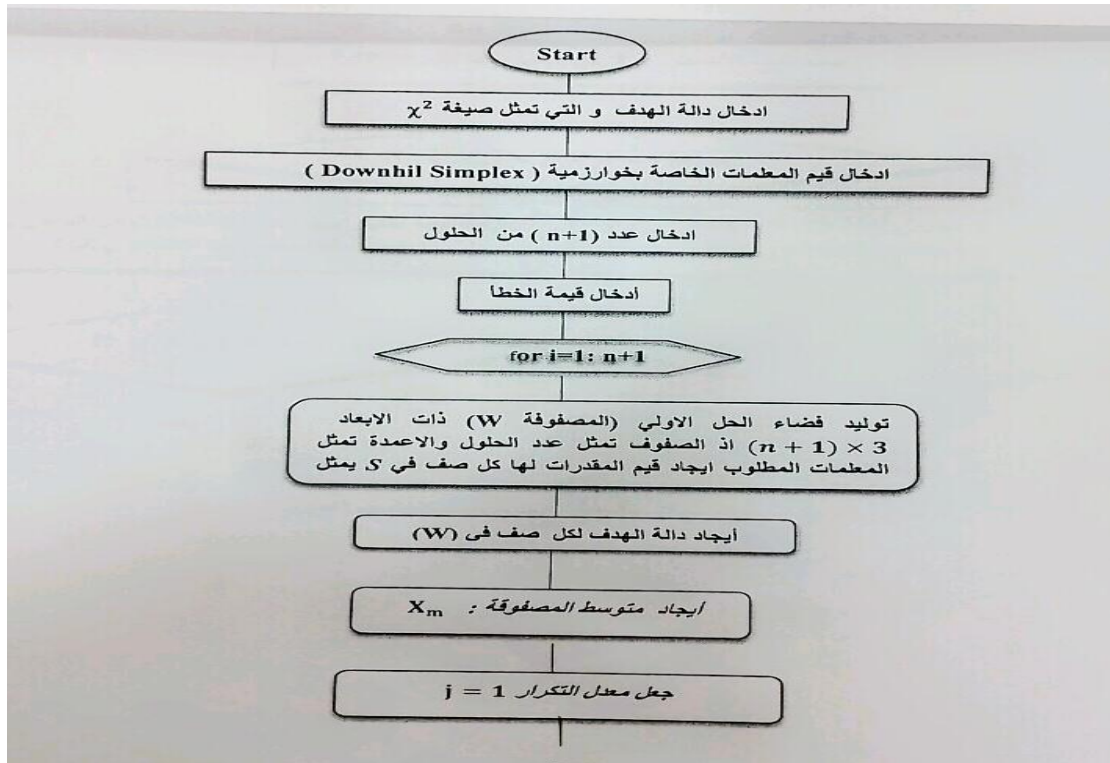
10- عند تحقق شرط توقف التكرار يتم التوقف وطباعة افضل حل وهذا الشرط يتحقق عندما عند الحصول على اقل قيمة لدالة الهدف اي

$$\left| \frac{\max(f) - \min(f)}{\max(f)} \right| < \epsilon$$

وان  $\epsilon$  عدد صغير جدا وعند تحقق هذا الشرط ننتقل الى الخطوة 11

11- طباعة الحل الامثل الذي يجعل دالة الهدف اقل ما يمكن ( اي قيم المعلمات التي حققت اقل قيمة لدالة الهدف ) و توقف عمل الخوارزمية.

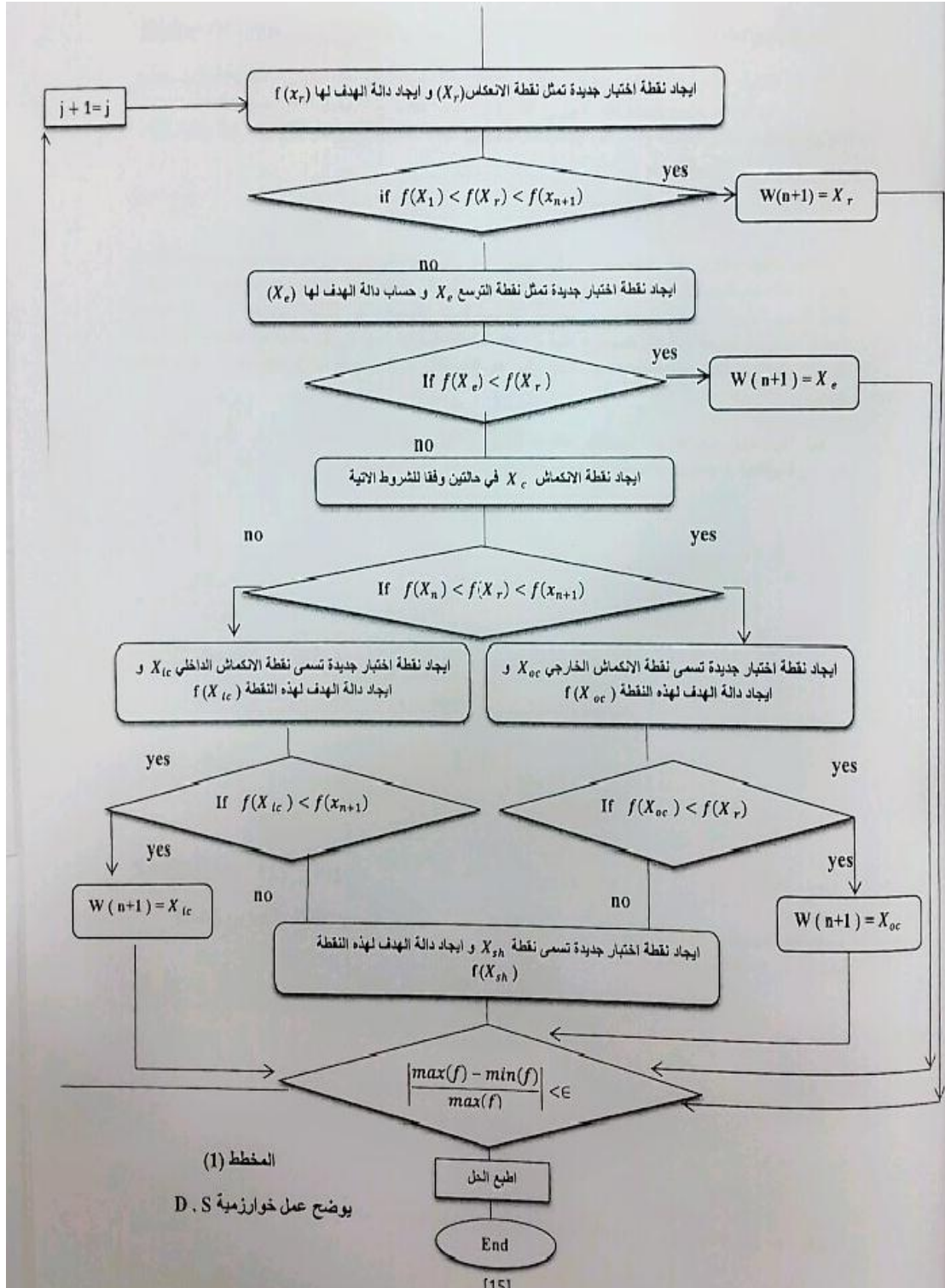
المخطط ادناه يوضح عمل خوارزمية Downhill Simplex في تقدير معاملات توزيع بواسون - وبيل المركب والمصمم من قبل الباحثة لمياء [1] مع اجراء بعض التغييرات البسيطة ليناسب توزيع البحث .







## مقارنة بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون - وبيل المركب





## مقارنة بعض طرائق تقدير معالم توزيع بواسون - وبيل المركب

### (3) طريقة تقدير تعتمد على النسب المئوية Method Of Estimation Based On Percentiles

ان اول من اكتشف هذه الطريقة هو Kao (1958-1959) [6] حيث تعتبر هذه الطريقة مناسبة لتوزيع وبيل والتوزيع الاسي المعمم بسبب طبيعة دالة التوزيع لهذه التوزيعات، تعتمد هذه الطريقة على وجود الدالة التجميعية للتوزيع المطلوب تقدير معالمه وتفترض ايجاد مقدر لا معلمي للدالة التجميعية  $p_i$  والذي يأخذ عدة حالات منها

$$P_i = \frac{i}{n+1}, \quad p_i = \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}}, \quad P_i = \frac{i - \frac{1}{2}}{n}$$

لكن تعد الصيغة الاولى اكثر استخداما من باقي الصيغ الاخرى، ومن ثم فان مقدرات المعالم للتوزيع المطلوب تقدير معالمه يتم الحصول عليها عن طريق ملائمة الخط المستقيم الى النقاط النظرية المستحصلة من دالة التوزيع ونقاط النسب المئوية للعينة، اي بمساواة الصيغة التقريبية للدالة التجميعية الى الدالة التجميعية ومن ثم مساواة المقدر للصفر وتربيعة وادخال المجموع علية وايجاد المشتقة الجزئية نسبا الى كل معلمة من معالم التوزيع او النموذج المطلوب تقدير معالمه حيث ان افضل مقدر هو الذي يقلل الدالة التي تم استخراجها بعد التربيع وادخال المجموع .

وعليه فان تطبيق هذه الطريقة في تقدير معالم توزيع بواسون وبيل المركب سيكون بالشكل الاتي ووفقا لدالة التوزيع التراكمية المحسوبة بالصيغة (9) وعلى افتراض ان مقدر دالة التوزيع التراكمية لها الصيغة الاتية

$$P_i = \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}} \quad (25)$$

$$P_i = \frac{e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda}{1 - e^\lambda}$$

$$T = \sum_{i=1}^n [\log p_i - \log F_i]^2$$

$$T = \sum_{i=1}^n [\log p_i - \log \frac{e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda}{1 - e^\lambda}]^2$$

$$T = \sum_{i=1}^n [\log (P_i) - \log (e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda) + \log (1 - e^\lambda)]^2 \quad (26)$$

وباشتقاق الصيغة (26) اعلاه بالنسبة الى معالم توزيع بواسون - وبيل المركب الثلاث ابتداءا من الاشتقاق بالنسبة الى المعلمة  $\alpha$  وكالاتي

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n [\log (p_i) - \log (e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda) + \log (1 - e^\lambda)] \dots$$

$$\dots [ - \frac{e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} \lambda e^{-\beta x_i^\alpha} (-\beta) x_i^\alpha \log(x_i)}{e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda} ]$$

تم توظيف هذه الطريقة في تقدير معالم توزيع بواسون - كما المركب من قبل الباحثة بعد الاطلاع على المصدر [6]

وبمساواة المقدر اعلاه الى الصفر والقسمة على 2 ينتج

$$= \sum_{i=1}^n [\log (p_i) - \log (e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda) + \log (1 - e^\lambda)] \hat{\alpha} \dots$$

$$\dots [ \frac{\beta \lambda e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} e^{-\beta x_i^\alpha} x_i^\alpha \log(x_i)}{e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda} ] \quad (27)$$



## مقارنة بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون - وبيل المركب

وباشتقاق الصيغة (26) بالنسبة الى المعلمة  $\beta$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^n [\log(p_i) - \log(e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda) + \log(1 - e^\lambda)]$$
$$\left[ \frac{-e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} \lambda e^{-\beta x_i^\alpha} (-x_i^\alpha)}{e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda} \right] = 0$$

وبمساواة المقدار اعلاه الى الصفر والقسمة على 2 ينتج

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n [\log(p_i) - \log(e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda) + \log(1 - e^\lambda)]$$
$$\left[ \frac{\lambda x_i^\alpha e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} e^{-\beta x_i^\alpha}}{e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda} \right] \quad (28)$$

وباشتقاق الصيغة (26) بالنسبة الى المعلمة  $\lambda$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^n [\log(p_i) - \log(e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda) + \log(1 - e^\lambda)]$$
$$\left[ \frac{-e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} e^{-\beta x_i^\alpha}}{e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda} - \frac{e^\lambda}{1 - e^\lambda} \right]$$

وبمساواة المقدار اعلاه الى الصفر والقسمة على 2 ينتج

$$\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^n [\log(p_i) - \log(e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda) + \log(1 - e^\lambda)]$$
$$\left[ \frac{-e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} e^{-\beta x_i^\alpha}}{e^{\lambda e^{-\beta x_i^\alpha}} - e^\lambda} - \frac{e^\lambda}{1 - e^\lambda} \right] \quad (29)$$

بما ان مقدرات المعلمات المستخرجة في الصيغ (27) و (28) و (29) على التوالي هي معادلات غير خطية، لذا سيتم استخدام طريقة عددية لحلها متمثلة باستخدام خوارزمية D.S الموضحة خطواتها في الطريقة السابقة مع استبدال دالة الهدف بالخطوة الاولى بدالة المعلمة المقدره باعتبارها هي دالة الهدف .

### 7- تجربة المحاكاة لتقدير معاملات توزيع بواسون - وبيل المركب

تم استخدام اسلوب المحاكاة عن طريق كتابة برنامج بلغة (matlab) بطريقة المعكوس حيث استخدمت الصيغة (13) كدالة للتوليد وتنفيذ مراحل تجربة المحاكاة مروراً باختيار قيم اولية لمعاملات التوزيع ومن ثم توليد متغيرات عشوائية تتوزع وفقاً لتوزيع بواسون - وبيل المركب وصولاً الى مرحلة التقدير باستخدام طرائق التقدير الموضحة انفا وانتهاءً بمرحلة المقارنة باستخدام المقياس الاحصائي MSE، الجداول ادناه توضح نتائج تجربة المحاكاة لاربعة نماذج مختلفة من المعلمات وحجوم العينات .





مقارنة بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون -  
وبيل المركب

جدول (1) يبين مقدرات ومتوسطات مربعات الخطأ للمعالم ومتوسطات مربعات الخطأ لدالتي pdf والمعولية لتوزيع بواسون - وبيل المركب بالنسبة الى النموذج الاول للمعلمات .

n	Method		$\alpha = 1.25$	$\beta = 1$	$\lambda = 0.5$	Mse pdf	Mse R	
25	mle	est.	1.363871	0.888364	1.068648	0.036704	0.007955	
		mse	0.077626	0.099153	0.537517			
	D.S	est	1.250682	0.994407	0.500811	0.001724	0.000685	
		mse	0.003097	0.011868	0.000131			
	Per	est	1.429484	1.345639	0.500811	0.081384	0.008171	
		mse	0.148988	0.185183	0.000131			
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S	
	50	mle	est.	1.342915	0.840984	1.123182	0.019647	0.005055
			mse	0.037258	0.077107	0.524583		
		D.S	est	1.245925	0.986778	0.499784	0.000619	0.000242
mse			0.001138	0.00346	6.47E-05			
Per		est	1.397202	1.362462	0.499784	0.054638	0.008206	
		mse	0.10617	0.310258	6.47E-05			
Best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S		
100		mle	est.	1.327681	0.837901	1.133886	0.013871	0.003998
			mse	0.022841	0.067053	0.490046		
		D.S	est	1.246935	0.991156	0.499938	0.000322	0.000102
	mse		0.000753	0.001431	2.99E-05			
	Per	est	1.321813	1.195246	0.499938	0.023259	0.004385	
		mse	0.059045	0.194205	2.99E-05			
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S	
	150	mle	est.	1.319877	0.838035	1.148048	0.011977	0.003591
			mse	0.016397	0.065098	0.499797		
		D.S	est	1.249718	0.996738	0.500206	0.000288	8.46E-05
mse			0.000675	0.001206	2.17E-05			
Per		est	1.285925	1.107199	0.500206	0.0127	0.002508	
		mse	0.030627	0.092003	2.17E-05			
best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S		



مقارنة بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون -  
وبيل المركب

جدول (2) يبين مقدرات ومتوسطات مربعات الخطأ للمعالم ومتوسطات مربعات الخطأ لدالتي pdf والمعولية لتوزيع بواسون - وبيل المركب بالنسبة الى النموذج الثاني للمعاملات .

n	Method		$\alpha=1.5$	$\beta=1$	$\lambda=1.5$	Mse pdf	Mse R	
25	mle	est.	1.480028	1.190545	1.04574	0.050762	0.008703	
		mse	0.091348	0.202379	0.411872			
	D.S	est	1.502653	1.006636	1.497274	0.000842	0.000164	
		mse	0.00189	0.003503	0.003677			
	Per	est	1.674729	1.30486	1.497274	0.060173	0.006415	
		mse	0.148241	0.139157	0.003677			
	best			D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
	50	mle	est.	1.480183	1.152574	1.182475	0.036179	0.006429
			mse	0.056038	0.124569	0.216121		
		D.S	est	1.504114	1.005546	1.50187	0.000592	0.000109
			mse	0.001455	0.002325	0.001949		
		Per	est	1.664695	1.425977	1.50187	0.052341	0.007416
mse			0.120676	0.357284	0.001949			
best			D.S	D.S	D.S	D.S	D.S	
100		mle	est.	1.494336	1.102624	1.251198	0.025015	0.005108
			mse	0.032018	0.089339	0.127666		
		D.S	est	1.502193	1.00395	1.500557	0.000555	0.000101
			mse	0.001286	0.00215	0.001213		
		Per	est	1.61514	1.318785	1.500557	0.037247	0.005389
	mse		0.087446	0.341396	0.001213			
	best			D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
	150	mle	est.	1.492983	1.101929	1.271069	0.025008	0.004345
			mse	0.028391	0.078433	0.115796		
		D.S	est	1.503624	1.005097	1.501144	0.000535	9.72E-05
			mse	0.001324	0.002051	0.000682		
		Per	est	1.573562	1.199922	1.501144	0.023374	0.00327
mse			0.064264	0.204462	0.000682			
best			D.S	D.S	D.S	D.S	D.S	



مقارنة بعض طرائق تقدير معاملات توزيع بواسون -  
وبيل المركب

جدول (3) يبين مقدرات ومتوسطات مربعات الخطأ للمعالم ومتوسطات مربعات الخطأ لدالتي pdf و دالة المعولية لتوزيع بواسون وبيل المركب بالنسبة الى النموذج الثالث للمعلمات .

n	Method	$\alpha=1.75$	$\beta = 0.8$	$\lambda= 0.2$	Mse pdf	Mse R		
25	mle	est.	1.543966	0.825747	0.28408357	0.029594	0.009247	
		mse	0.263131	0.035871	0.12850811			
	D.S	est	1.755737	0.798571	0.19997239	0.002231	0.001429	
		mse	0.003015	0.014278	4.23E-06			
	Per	est	2.15503	1.123275	0.19997239	0.050663	0.011888	
		mse	0.492882	0.185554	4.23E-06			
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S	
	50	mle	est.	1.634098	0.778041	0.329916	0.018915	0.006302
			mse	0.169521	0.024613	0.130932		
		D.S	est	1.754811	0.788066	0.199977	0.000999	0.000662
mse			0.001578	0.005677	2.21E-06			
Per		est	2.032134	1.093167	0.199977	0.04139	0.010278	
		mse	0.334612	0.217953	2.21E-06			
best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S		
100		mle	est.	1.712535	0.762975	0.333058	0.012863	0.004384
			mse	0.110259	0.015058	0.100297		
		D.S	est	1.751624	0.790694	0.200034	0.000332	0.000205
	mse		0.000804	0.001698	1.04E-06			
	Per	est	1.883377	0.931193	0.200034	0.016566	0.004232	
		mse	0.134236	0.078087	1.04E-06			
	best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S	
	150	mle	est.	1.733377	0.748381	0.334396	0.010542	0.003679
			mse	0.089556	0.014193	0.082319		
		D.S	est	1.751633	0.789396	0.199973	0.000255	0.000154
mse			0.000763	0.001239	7.76E-07			
Per		est	1.813186	0.85676	0.199973	0.007688	0.002205	
		mse	0.066302	0.026928	7.76E-07			
best		D.S	D.S	D.S	D.S	D.S		



## مقارنة بعض طرائق تقدير معالم توزيع بواسون - ويبل المركب

جدول (4) يبين مقدرات ومتوسطات مربعات الخطأ للمعالم ومتوسطات مربعات الخطأ لدالتي pdf ودالة المعولية لتوزيع بواسون ويبل المركب بالنسبة الى النموذج الرابع للمعاملات .

n	Method		$\alpha=2$	$\beta=1$	$\lambda=2$	Mse pdf	Mse R	
25	mle	est.	1.502765	1.469379	0.505548	0.103568	0.01352	
		mse	0.544919	0.415749	2.455499			
	D.S	est	2.002262	1.007395	2.004422	0.000978	0.000165	
		mse	0.003058	0.003859	0.007898			
	Per	est	2.222409	1.284798	2.004422	0.048293	0.005866	
		mse	0.233546	0.113489	0.007898			
	best			D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
	50	mle	est.	1.60454	1.404146	0.613426	0.075191	0.01023
			mse	0.398498	0.295177	2.1264		
		D.S	est	1.999967	1.001153	1.998738	0.000631	0.000114
mse			0.002108	0.002692	0.004091			
Per		est	2.255248	1.454669	1.998738	0.050325	0.006521	
		mse	0.202314	0.345503	0.004091			
best			D.S	D.S	D.S	D.S	D.S	
100		mle	est.	1.690673	1.409522	0.649668	0.054433	0.007525
			mse	0.278384	0.264541	1.967932		
		D.S	est	2.000016	1.002059	1.999534	0.000644	0.000112
	mse		0.002219	0.002555	0.001934			
	Per	est	2.236508	1.453092	1.999534	0.047271	0.005564	
		mse	0.192139	0.45727	0.001934			
	best			D.S	D.S	D.S	D.S	D.S
	150	mle	est.	1.739412	1.400472	0.668831	0.041293	0.005819
			mse	0.205744	0.247215	1.897706		
		D.S	est	2.000441	1.001942	1.99896	0.000632	0.000109
mse			0.002237	0.002302	0.001457			
Per		est	2.18281	1.333412	1.99896	0.034361	0.003873	
		mse	0.14495	0.335719	0.001457			
best			D.S	D.S	D.S	D.S	D.S	

### 8- تحليل نتائج تجربة المحاكاة

في هذا الجانب تم تحليل نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع بواسون المقطوع عند الصفر -ويبل المركب والموضحة نتائجها في الجداول اعلاه والمتضمنة قيم مقدرات المعالم وقيم متوسط مربعات الخطأ للمقدرات ومتوسط مربعات الخطأ لدالة الكثافة الاحتمالية فضلا عن متوسط مربعات الخطأ دالة البقاء (المعولية) ولحجوم عينات مختلفة ولاربعة نماذج للمعاملات المختارة . ومن النتائج نلاحظ قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمقدرات المعالم لحجوم العينات ونماذج المعاملات المفترضة الاتي :

- 1- عند كافة حجوم العينات وجميع النماذج المختارة للمعاملات كانت طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية Downhill Simplex هي الافضل في تقدير معالم التوزيع ( $\alpha, \beta, \lambda$ )
- 2- في ما يتعلق بتقدير دالة الكثافة الاحتمالية ودالة المعولية فقد اثبتت طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية Downhill Simplex تفوقها على طريقة الامكان الاعظم وطريقة النسب المنوية ولجميع حجوم العينات وجميع النماذج المختارة .

### 9- الاستنتاجات

- 1- التوزيعات المركبة والتي منها توزيع بواسون ويبل الذي يمثل توزيع جديد لاوقات الحياة من احد الوسائل الاخرى لاختبار توزيع البيانات في حالة فشل التوزيعات الاخرى في مطابقة البيانات .
- 2- يتضح من خلال تجربة المحاكاة ان طريقة اقل مربع كاي باستخدام خوارزمية D.S كانت افضل الطرق في تقدير دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المركب لكافة النماذج المختارة وذلك لامتلاكها اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ (mse) .



## مقارنة بعض طرائق تقدير معلمات توزيع بواسون - وبيل المركب

3- ان اسلوب التركيب المتبع في البحث انتج توزيع يمتاز بان دالة معدل الفشل له تاخذ العديد من الحالات (متزايدة، متناقصة، شكل الحوض، الشكل الموحد) وان توزيع وبيل المفرد دالة معدل الفشل له تاخذ عدة حالات بالاعتماد على قيمة معلمة الشكل في التوزيع وهذا يعني ان التوزيع الناتج وفقا لهذا الاسلوب في التركيب قد احتفظ بخواص دالة معدل الفشل لتوزيع وقت الحياة الداخلة في التركيب .

### المصادر

- 1- الحلفي، لمياء داود (2015) " مقارنة طرائق تقدير المعلمات ودالة المعولية لتوزيع lambda ذو الاربعة معلمات مع تطبيق عملي "، رسالة مقدمة الى كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد للحصول على درجة " ماجستير علوم في الاحصاء " .
- 2- محمد، ايناس عبد الحافظ، ( 2016 ) "تقدير نماذج مختلطة لبيانات مصنفة مع تطبيق عملي " اطروحة مقدمة الى كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد للحصول على درجة " دكتوراة فلسفة في الاحصاء " .
- 3- Adamidis, K ., Loukas, S . ( 1998 ) A lifetime distribution with decreasing failure rate , Statistics & Probability Letters 39 , PP 35 – 42 .
- 4- Alkarni, S., Oraby, A . ( 2012 ) A Compound Class Of Poisson And Lifetime Distributions , Journal of Statistics Applications & Probability 1, No . 1, pp 45 – 51 .
- 5- Gao, F. & Han, L., (2012), "Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameter", Comput Optim Appl DOI 10.1007/s10589-010-9329-3 pp .259 – 277 Vol . 51.
- 6- Gupta, D. R., Kund, D. (2000) "GENERALIZED EXPONENTIAL DISTRIBUTION : DIFFERENT METHOD OF ESTIMATIONS " , J . Statist. Comput. Simul . , Vol . 00 , PP 1 – 22 .
- 7- Kus , C . (2007) "A new lifetime distribution" , Computational Statistics & Data Analysis , 51 , pp 4497 – 4509 .
- 8- Lu , W. , Shi , D . ( 2012 ) " A new compounding life distribution : the weibull – poisson distribution " , Journal of Applied Statistics Vol. 39 , No.1 , pp 21 – 38 .
- 9- Nelder, J. & Mead, R., (1965) "A simplex method for function minimization", Computer J., Vol.7, Issue.4, P. (308–313).
- 10- Neta, F . L. , Cancho, V . G., Barriga, G . D . (2011) " The Poisson – Exponential Distribution :A Bayesian Approach", Journal Of Applied Statistics , Vol . 38, No . 6 , pp 1239 – 1248 .
- 11- Neto , F . L . , Cancho, V . G ., Barriga , G . D . ( 2011 ) " The Poisson – Exponential Distribution : A Bayesian Approach " , Journal of Applied Statistics Vol . 38 , No . 6 , pp 1239 - 1248 .
- 12- Sanjay, K . S., Singh, U., Kumar, M . ( 2014 ) "Estimation for the parameter of poisson – Exponential Distribution Under Bayessian Paradigm" , Journal of Data Science , 12 , pp 157 – 173.



## Comparison of some methods for estimating Poisson-Weibull distribution parameters

### Abstract

In this paper was discussed the process of compounding two distributions using new compounding procedure which is connect a number of life time distributions ( continuous distribution ) where is the number of these distributions represent random variable distributed according to one of the discrete random distributions . Based on this procedure have been compounding zero – truncated poisson distribution with weibull distribution to produce new life time distribution having three parameter , Advantage of that failure rate function having many cases ( increasing , decreasing , unimodal , bathtub) , and study the resulting distribution properties such as : expectation , variance , cumulative function , reliability function and failure rate function . In addition to estimating the parameters of the resulting distribution by using three methods of estimation are maximum likelihood method ,minmum chi square method using Downhill simplex algorithm , percentile method. The comparison between them was depending on the statistical measure mean square error ( MSE ) by implementing simulation experiment using different samples size ( small , large , medium ) , which through their results was reached that minmum chi square method using Downhill simplex algorithm is the best to estimating the parameter and probability function for compound distribution .

**Keywords** compound poisson distributions , compound poisson weibull ,Maximum Likelihood Method , Minmum Chi Square Method , percentile method , Downhill simplex algorithm .