تنمية الرافدين ٧٩(٢٧) ٢٠٠٥
ص ص [١٥١-١٦٤]

تقدير بيز الهرمي الحركي مع المحاكاة

الدكتور حسن محمد إلياس
أستاذ مساعد/قسم الإحصاء
كلية علوم الحاسبات والرياضيات/جامعة الموصل

زكريا يحيى الجّمال
مدرس مساعد/قسم الإحصاء
كلية الإدارة والاقتصاد/جامعة السليمانية

المستخلص

قدم الباحثان Gamerman and Migon 1993 عملا وصفا فيه النماذج الهرمية الحركية Dynamic Hierarchical Models وتم عرض هذا الوصف بواسطة نظام يتكون من ثلاث معادلات خطية، المعادلة الأولى: تسمى بمعادلة المشاهدة Observation Equation، والمعادلة الثانية: فتسمى بمعادلات البنية التركيبية البنائية Structural Equations ، والمعادلة الثالثة : يطلق عليها معادلة النظام System Equation. ويختلف عمل هذين الباحثين عن عمل الباحثين Harrison and Stevens 1976 اللذين قدما وصفا للنماذج الخطية الحركية بمعادلتين: الأولى: تسمى معادلة المشاهدة والثانية: تسمى معادلة النظام، من خلال زيادة معادلات البنية التي تصف بنية تسلسل المعلمات.

في هذه الدراسة يتم تقديم عرض شامل للنماذج الهرمية الحركية الخطية، مع تبسيط مفاهيم كثيرة عن هذه النماذج نظرا لان المعلومات المتوافرة كانت غير كافية والمتوافر منها قد تم عرضه بصورة معقدة. وقد تم أيضا تقديم عرض بسيط للنماذج الهرمية الحركية اللاخطية ومن ثم تطبيق النتائج النظرية على بيانات مولدة عن طريق المحاكاة Simulation لأحد النماذج التي عرضها الباحثان Gamerman and Migon وهو نموذج النمو الخطي ذو الأوساط المتغيرة Linear Growing Exchangeable Means .

مقدمة

تعد النماذج الخطية من أكثر الوسائل استخداما في تحليل النتائج النظرية والعملية لمختلف العلوم، لكونها توضح العلاقة بين المتغيرات على شكل معادلة تستدل من تقدير معلماتها على أهمية هذه العلاقة وقوتها واتجاهها، كما تبين تقدير الاستجابة والتنبؤ، وهذا يفيد كثيرا في التخطيط وفي عملية اتخاذ القرار. وقد تبين من خلال الدراسات السابقة بان تطبيقات النماذج الخطية الساكنة Static Linear Models في التحليل والتنبؤ تتطلب في الغالب افتراضات غير واقعية، وكذلك ظهور الكثير من المشاكل الاقتصادية والبيولوجية، من هنا اتجهت أنظار الباحثين والدارسين، ولاسيما في العقد الأخير من القرن العشرين لإيجاد طرق بديلة ولتكون أكثر أداء لحل المعضلات من الناحيتين العلمية والعملية.

لذلك توجهت البحوث والدراسات الحديثة إلى استخدام النماذج الهرمية Hierarchical Models للكفاءة العالية التي تمتلكها هذه النماذج لأعطاء نتائج دقيقة في تحليل البيانات الخاصة بها، لان مصطلح الهرمية Hierarchy يعني إن مواصفات

تاريخ التسلم ٢٠٠٥/٢/٢٨ ____________ تاريخ قبول النشر ٢٠٠٥/٦/٥

النماذج تقسم إلى مستويات Levels أو مراحل Stages،كما تم استخدام استدلال بيز مع هذه النماذج (Lange, *et al* 1992)،(Cohen, *et al* 1998). في عام 1993 قدم الباحثان Gamerman and Migon مفهوم النماذج الهرمية الحركية الخطية Dynamic linear hierarchical model.التي تتكون من ثلاث معادلات الأولى تسمى معادلة المشاهدة وهي تصف المشاهدات والمعادلة الثانية هي معادلات البنية وهي تصف بنية تسلسل المعلمات والثالثة تسمى معادلة النظام وهي تصف تطور المعلمات خلال الزمن .وهذا العمل الذي قدمه الباحثان يختلف عن العمل الذي قدمه (Harrison and Stevens 1976) بزيادة المعادلات البنيوية.

إن الهدف الأساس من البحث هو توفير الأساسيات اللازمة للنماذج الهرمية الحركية وعرضها بأسلوب يمكن الباحثين والدارسين من فهم هذا الموضوع وكيفية التعامل معه بصورة مبسطة ونظرا لصعوبة الحصول على البيانات الحقيقية فقد إلتجأنا إلى استخدام المحاكاة لغرض توليد المشاهدات العشوائية للوصول إلى التوزيعات الأولية والنهائية للمعلمات. علما أن معظم البحوث والدراسات المتوفرة لدينا تناولت استخدام النماذج الخطية الحركية أو طريقة النماذج الهرمية الاعتيادية.

النماذج الهرمية Hierarchical Models

في العقدين الأخيرين من القرن العشرين لوحظ استخدام النماذج الهرمية في مجالات البحث العلمي استخداما كبيرا لكفاءتها في تحليل البيانات التي تكون على شكل هرمي، فضلاً عن توفيق المعلومات المختلفة بين المراحل. إن المفهوم العام لمصطلح الهرمية يعني أن مواصفات النماذج تقسم إلى مستويات أو مراحـــل وهذا التقسيم يوضح مواصفات أي نموذج عن طريق جمع المعلومات التركيبية ولاسيما المعلومات الكمية.

يمكن أيضا تقديم مفهوم آخر للنماذج الهرمية إذ إن البيانات في النماذج الهرمية تعتمد على بعض المعلمات و يطلق عليها بالمعلمات الخاصة بالمرحلة الأولى وهذهِ المعلمات بدورها تعتمد على معلمات المرحلة الثانية وهكذا. إن مـن أهـم فوائـد استخدام النمــاذج الهرمية التي تطرق إليها (Draper, 1995,3) هي:

١. إن النماذج الهرمية توفر بيئة طبيعية للتعبير عن ومقارنة النظريات حول العلاقة التركيبية في البيانات في جميع المراحل.
٢. إن النماذج الهرمية تفرض إطار عمل واضح لغرض التعبير عن التشابه في عملية تكوين الآراء عن طريق التمييز والمقارنة لكي تجمع المعلومات عبر الوحدات لتقديم تنبؤ دقيق لنتائج جديرة بالملاحظة.

والنماذج الهرمية لها الصيغة العامة الآتية:

$$Y|q_1,V_1 \sim N1\left(F_1(q_1),x_1(V_1)\right) \qquad (1)$$

$$q_1|q_2,V_2 \sim N2\left(F_2(q_2),x_2(V_2)\right) \qquad (2)$$

اذ إن الجـزء الأول من الصيغة العـامة يسمى بمعـادلة المشاهدة أما الجزء الثاني فيطلق عليه معادلة البنية (التركيبية) (Neelamegham and Chintagunta, 2001,6).

وأن:

Y: عبارة عن متجه المشاهدات وذات بعد $n\times1$

$F_i(q_i)$: تمثل العلاقة بين الوسط أو التباين مع المعلمات q_i و V_i $(i=1,2)$

في النماذج الهرمية نلاحظ أنها تكون مركزة على متوسط المعلمات q_i الذي يعد الجزء الأساسي والرئيس في التحليل.

النماذج الهرمية الحركية الخطية Dynamic Hierarchical Linear Models

تمتلك النماذج الهرمية الحركية مفاهيم أوسع من النماذج الحركية الخطية إذ تعمل على إجازة التسلسل الهرمي للمراحل المتعددة الخاصة في معادلة الحالة للنماذج الحركية الخطية. أي أن النماذج الهرمية الحركية الخطية تختلف عن النماذج الحركية الخطية بزيادة المعادلات البنيوية. وبفرض أن البيانات طبيعية وأن الأخطاء لها تباين معلوم فان الباحثين (Gamerman and Migon 1993,630) عرفا مواصفات هذه النماذج بوصفها تتكون من ثلاث مراحل أو معادلات، إذ إن المعادلة الأولى: هي معادلة المشاهدة والتي لها تفسير وصيغة المعادلة الخاصة بالنماذج الحركية نفسها، أما المعادلة الثانية: فهي معادلة البنية التي تصف العلاقة بين معلمات المرحلة الأولى (معادلة المشاهدة) المتغيرة خلال الزمن ومجموعة المعلمات الجديدة التي تتغير مع الزمن أيضاً (Neelamegham and Chintagunta, 2001,5) كذلك يمكن توضيح معادلة البنية بمفهوم آخر بأن هذه المعادلة تصف بنية تسلسل المعلمات.أما المعادلة الثالثة: يطلق عليها بمعادلة النظام فيمكن توضيحها بالمفهوم نفسه في النماذج الحركية الخطية.وبناء على ما تم عرضه فانه يمكن كتابة المعادلات للنماذج الهرمية الحركية الخطية على النحو الآتي:

أولاً- معادلة المشاهدة

$$Y_t = F_{1t}q_{1t} + v_{1t} \qquad , \quad v_{1t} \sim N(0,V_{1t}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ثانياً- معادلة البنية

$$\left.\begin{aligned} q_{1t} &= F_{2t}q_{2t} + v_{2t} \qquad , \quad v_{2t} \sim N(0,V_{2t}) \\ q_{2t} &= F_{3t}q_{3t} + v_{3t} \qquad , \quad v_{3t} \sim N(0,V_{3t}) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(4)$$

ثالثاً- معادلة النظام

$$q_{3t} = G_t q_{3,t-1} + w_t \qquad , \qquad w_t \sim N(0,W_t) \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

آخذين بنظر الاعتبار ما يأتي:

أولاً - بأن جميع الأخطاء العشوائية $(v_{1t}, v_{2t}, v_{3t}, w_t)$ مستقلة عن بعضها البعض وعن المتغيرات الاخرى وبمصفوفات تباين معلومة.

ثانياً- إن $F_{1t}, F_{2t}, F_{3t}, G_t$ مصفوفات معطاة.

وهذه القيود توضع لأغراض توضيحية وعملية فضلا عن ذلك فأن المصفوفات $F_{it}\ ,i = 1,2,3$ تكون كاملة الرتبة، هذه الشروط تعد حاجة ضرورية وتمثل جوهر الطريقة التي توفرها البنية الإضافية بوصفها علاقة بين المعلمات (Gamerman and Migon, 1993,630).

إن النموذج الذي ذكرناه يشمل ثلاثة مستويات (مراحل) في التسلسل المعلمي، أما النموذج الذي يشمل أكثر من ذلك فانه يكون قليل الاستخدام. وعلى العموم فان النماذج المتسلسلة تكتب على مرحلتين يتم الحصول عليها من نماذج ذات الثلاث مراحل وذلك بتعويض القيم الاتية $F_{3t} = I \quad , \quad v_{3t} = 0$ في معادلة (4)

اذ إن:

I : تمثل مصفوفة الوحدة.

0 : تمثل مصفوفة صفرية.

الاستدلال الإحصائي للنموذج الهرمي الحركي الخطي

Inference for Dynamic Hierarchical Model

إن المعادلات (3)، (4) و (5) توفر عرضا كفوءا ومفسرا للنموذج الهرمي الحركي الخطي ولكنها لا تصف النموذج بصورة كاملة كونها لا توضح الشروط الخاصة بعملية الاستدلال الإحصائي.

ولغرض توفير هذه الشروط نعرف D_t والتي تمثل المعلومات التي نحصل عليها لغاية الزمن t وهي بدورها تضم المعلومات الأولية D_0 وقيم المشاهدات) $y_1, y_2, ..., y_t$ (أي أن :

$D_t = \{Y_t, D_{t-1}\}$ ويمكن إعادة كتابة معادلات النموذج الهرمي الحركي الخطي (ذو K مرحلة) لكل t على النحو الآتي:

$$(Y_{it} | q_{it}) \sim N(F_{it} q_{it}, v_{it}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$Y_{ti} = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix}$$

$$(q_{it} | q_{i+1,t}, D_{t-1}) \sim N(F_{i+1,t} q_{i+1,t}, v_{i+1,t}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$i = 1,2,........, k-1$$

$$(q_{kt} | q_{k,i-1}, D_{t-1}) \sim N(G_t q_{k,t-1}, w_t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

مع توزيع أولي ابتدائي هو

$$(q_{k,0} | D_0) \sim N(m_{k,0}, C_{k,0})$$

المعادلة (7) تعطي بنية التسلسل المعلمي، وذلك بربط المراحل المتتالية وباستخدام تكرار المعادلات (7) لقيم (i, j) اذ إن $j > i+1$ فسنحصل على العلاقة بين المراحل المختلفة كما يأتي:

$$\left(q_{it} \middle| q_{jt}, D_{t-1}\right) \sim N\left(E_{ijt} q_{jt}, V^{*}_{ijt}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

اذ إن:

$$E_{ijt} = F_{i+1,t} \ldots\ldots F_{jt} \qquad , \quad 0 \le i \le j \le k$$

$$E_{iit} = I_{ri} \qquad , \quad 1 \le i < k$$

$$V^{*}_{ijt} = \sum_{L=i+1}^{j} E_{i,L-1,t} V_{Lt} E'_{i,L-1,t}$$

فانه يمكننا الحصول على التوزيعات الآتية:

١. التوزيعات الأولية عند الزمن t

$$\left(q_{it} \middle| D_{t-1}\right) \sim N\left(a_{it}, R_{it}\right) \qquad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots,k \ \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

٢. التوزيعات التنبؤية عند الزمن t

$$\left(Y_t \middle| D_{t-1}\right) \sim N\left(f_t, Q_t\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$f_t = F_{1t} a_{1t}$$

$$Q_t = F_{1t} R_{1t} F'_{1t} + V_{1t}$$

٣. التوزيعات النهائية عند الزمن t

$$\left(q_{it} \middle| D_t\right) \sim N\left(m_{it}, C_{it}\right) \qquad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots,k \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

اذ إن :

$$m_{it} = a_{it} + S_{it} Q_t^{-1} \left(Y_t - f_t\right)$$

$$C_{it} = R_{it} - S_{it} Q_t^{-1} S'_{it} \qquad , \quad S_{it} = R_{it} \mathbf{E}'_{0it}$$

العلاقة بين مراحل التسلسل

Relationship Between Stages of Hierarchy

سوف نتناول في هذا المبحث العلاقة بين مراحل التسلسل من خلال التحديث . Updating ولغرض الإطلاع على العلاقات الاخرى وهي التطور Evolution والتمهيد Smoothing انظر (Gamerman and Migon, 1993,634).

أولاً- التحديث

المقصود بمفهوم التحديث هو عملية إعادة حساب معادلات البنية كلما توفرت بيانات جديدة في حال النماذج الهرمية الحركية، بين (Gamerman and Migon, 1993,634)المعادلات والصيغ النهائية لعملية التحديث وقد بيّن الباحث (سالم،٧٢،٢٠٠٠-٧٤) الاشتقاقات الخاصة بهذه الصيغ.

تجدر الإشارة هنا أنه يجب ملاحظة أنه بالنسبة لـ $i < j$ يكون

$$P\left(Y_t \middle| q_{it}, q_{jt}\right) = P\left(Y_t \middle| q_{it}\right)$$

وباستخدام نظرية بيز نجد أن:

$$P\left(q_{it}, q_{jt} \middle| D_t\right) \propto P\left(Y_t \middle| q_{it}, q_{jt}\right) P\left(q_{it}, q_{jt} \middle| D_{t-1}\right)$$

$$\propto P\left(q_{it} \middle| D_t\right) P\left(q_{jt} \middle| q_{it}, D_{t-1}\right)$$

وكما ذكرنا سابقا فان التوزيعات المذكورة انفاً تكون توزيعات طبيعية والتوقع والتباين للتوزيع

$P(q_{jt}|D_t)$ يمكن الحصول عليها من $P(q_{it}|D_{t-1})$ عن طريق

$$\mathrm{E}(q_{jt}|D_t) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(q_{jt}|q_{it}, D_{t-1})\,|D_t\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\quad(13)$$

$$Var(q_{jt}|D_t) = Var\left[\mathrm{E}(q_{jt}|q_{it}, D_{t-1})\,|D_t\right] + \mathrm{E}\left[Var(q_{jt}|q_{it}, D_{t-1})\,|D_t\right]\ldots.(14)$$

إن المعادلتين (13) و(14) تم تطبيقهما حسب ما ورد في البحث المقدم من قبل الباحثين (Kass and Steffey, 1989,719). وعليه فان معادلة التحديث تكون:

$$(q_{it}|q_{i+1,t}, D_t) \sim N\begin{Bmatrix} F_{i+1,t}q_{i+1,t} + V_{i+1,t}\mathrm{E}'_{\mathbf{o}it}{V^*_{\mathbf{o},i+1,t}}^{-1}(Y_t - \mathrm{E}_{\mathbf{o},i+1,t}q_{i+1,t})\ , \\ \\ V_{i+1,t} - V_{i+1,t}\mathrm{E}'_{\mathbf{o}it}{V^*_{\mathbf{o},i+1,t}}^{-1}\mathrm{E}_{\mathbf{o}it}V_{i+1,t} \end{Bmatrix}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

المحاكاة Simulation

يعد أسلوب المحاكاة واحدا من الأساليب المهمة التي تساعد الباحثين في دراساتهم، إذ أن المحاكاة تشبه مختبر الباحثين، اذ يقوم الباحث بتوليد بيانات أو مشاهدات من النموذج المستخدم لدراسة ظاهرة معينة.

فأسلوب المحاكاة مفيد جدا كونه البديل في حال عدم توافر البيانات المطلوبة الخاصة بموضوع الدراسة لأسباب قد تكون متعلقة بكلفة الحصول على البيانات أو استحالة الحصول على نوع البيانات الخاصة بالدراسة.

وبعد توليد هذه البيانات من الممكن أن نستخدم فيها النتائج والعلاقات الإحصائية التي تم التوصل إليها من خلال نموذج الدراسة المستخدم، وفي بعض الأحيان تفيد في بعض الحقائق التي من الصعب التوصل إليها رياضيا (العكاش٢٠٠١، ٥٠).

في هذه الدراسة تم توليد مشاهدات عشوائية لتساعدنا في الدراسة والبحث في هذا المجال وذلك بسبب صعوبة حصولنا على البيانات الحقيقية المطلوبة التي تمثل النموذج المدروس المبين لاحقا.

ولغرض توليد البيانات الخاصة بهذه الدراسة فقد تم كتابة برنامج بلغة Basic من قبل الباحث.

النتائج والمناقشة

أولاً- النموذج المدروس

لقد تطرق البحث الخاص بالنماذج الهرمية الحركية الخطية من قبل (Gamerman and Migon, 1993,631) إلى بعض أنواع النماذج الهرمية الحركية الخطية ومن بين هذه النماذج هو نموذج النمو الحركي الخطي ذو المتوسطات المتغيرة وهو النموذج المدروس في هذا البحث. والنموذج المدروس عبارة عن نموذج هرمي ذي مرحلتين يوصف بالصيغة الآتية:

١. معادلة المشاهدة

$$Y_{ti} = F_{1t} b_{ti} + v_{1t} \qquad , \quad v_{1t} \sim N(0, V_{1t}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(16)$$

٢. معادلة البنية

$$b_{ti} = F_{2t} m_{ti} + v_{2t} \qquad , \quad v_{2t} \sim N(0, V_{2t}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(17)$$

٣. معادلة النظام

$$m_{ti} = G_t m_{t-1,i} + w_t \qquad , \quad w_t \sim N(0, W_t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

اذ إن $i = 1,2$ وأن :

$$Y_{ti} = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix}, \quad F_{1t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; q_{1t} = \begin{pmatrix} b_{1t} \\ b_{2t} \end{pmatrix} = b_{ti}, \quad F_{2t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q_{2t} = \begin{pmatrix} m_t \\ g_t \end{pmatrix} = m_{ti} \;, \quad G_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q_{2,t-1} = \begin{pmatrix} m_{t-1} \\ g_{t-1} \end{pmatrix} = m_{t-1,i}$$

$$m_t = m_{t-1} + g_{t-1} + w_{1t}$$

$$g_t = g_{t-1} + w_{2t}$$

وبافتراض أن y_{1t} مستقلة عن y_{2t} وكذلك b_{1t} مستقلة عن b_{2t} وأيضا m_t مستقلة عن g_t وجميع حدود الأخطاء مستقلة عن بعضها البعض وعن المتغيرات الاخرى.

وبناءاً على هذا فان مصفوفات التباين والتباين المشترك لجميع الحالات سيكون فيها مقدار التباين المشترك مساويا للصفر.

وفقا لما تم عرضه مسبقا حول النموذج المدروس سنحسب الآن التوزيعات الاحتمالية الأولية والنهائية للمعلمتين q_{1t} و q_{2t} على ضوء المعادلات (7) ،(8) و (9) النظرية الخاصة بإيجاد هذه التوزيعات التي قدمها (Gamerman and Migon) وسنقوم بحساب معادلة التحديث الخاصة بالمعلمة q_{1t} على فرض وجود التوزيع الاحتمالي الأولي $(q_{2,0}|D_0)$ وسنتبع الخطوات الاتية لإيجاد هذه التوزيعات:

أولاً- نقوم باختيار قيم أولية ثابتة لمتجه المعلمات $q_{2,t-1}$ وتوقعه الاحتمالي النهائي $m_{2,t-1}$وهنا يكون $q_{2,0}$ وتوقعه $m_{2,0}$ وكما هو مبين

$$q_{2,t-1} = m_{2,t-1} = \begin{pmatrix} m_{21,t-1} \\ m_{22,t-1} \end{pmatrix}, \quad q_{2,0} = m_{2,0} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

علما أن $q_{2,t-1}$ تستخدم في حالة توليد البيانات و $m_{2,t-1}$ تستخدم في حالة إيجاد التوزيعات الاحتمالية .

ثانياً-نقوم باختيار مصفوفة التباين للتوزيع الأولي لمتجه المعلمات $q_{2,t-1}$ وهو $q_{2,0}$ اذ إن :

$$C_{2,t-1} = \begin{pmatrix} c_{11,t-1} & 0 \\ 0 & c_{22,t-1} \end{pmatrix} \quad , \quad C_{2,0} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

ثالثاً- اختيار تباينات متجهات الأخطاء العشوائية لمعادلة المشاهدة ومعادلة البنية ومعادلة النظام .

رابعاً- إعداد برنامج بلغة Basic من أجل التوصل إلى النتائج الخاصة بالتوزيعات الاحتمالية النهائية للمعلمتين q_{1t} و q_{2t}، فضلاً عن النتائج الخاصة بمعادلة التحديث الخاصة بالمعلمة q_{1t} .

وباستخدم جبر المصفوفات في حساب التوزيعات الاحتمالية الأولية والنهائية و معادلة التحديث الخاصة بـ q_{1t} نحصل على:

- التوزيع الاحتمالي الأولي للمعلمة q_{2t}

بناء على $q_{2t}|D_{t-1} \sim N(a_{2t}, R_{2t})$ وأن

$$a_{2t} = G_t m_{2,t-1}$$

$$R_{2t} = G_t C_{2,t-1} G_t' + W_t$$

- التوزيع الاحتمالي الأولي للمعلمة q_{1t}

بما أن

$$q_{1t}|D_{t-1} \sim N(a_{1t}, R_{1t})$$

اذ أن :

$$a_{1t} = F_{2t} a_{2t}$$

$$(q_{it}|q_{jt}, D_{t-1}) \sim N(E_{ijt} q_{jt}, V^*_{ijt})$$

وقبل الانتقال الى حساب التوزيعات الاحتمالية النهائية لابد من حساب التوزيع الاحتمالي التنبؤي (خطوة واحدة إلى أمام) والمعطى بالصورة الآتية:

$$Y_t|D_{t-1} \sim N(f_t, Q_t)$$

$$f_t = F_{1t} a_{1t}$$

$$Q_t = F_{1t} R_{1t} F_{1t}' + V_{1t}$$

- التوزيع الاحتمالي النهائي للمعلمة q_{2t}

$$q_{2t}|D_t \sim N(m_{2t}, C_{2t})$$

$$m_{2t} = a_{2t} + R_{2t} F_{2t}' Q_t^{-1} (Y_t - f_t)$$

$$C_{2t} = R_{2t} - R_{2t} F_{2t}' Q_t^{-1} F_{2t} R_{2t}'$$

- التوزيع الاحتمالي النهائي للمعلمة q_{1t}

$$q_{1t}|D_t \sim N(m_{1t}, C_{1t})$$

$$m_{1t} = a_{1t} + R_{1t} F_{1t}' Q_t^{-1} (Y_t - f_t)$$

$$C_{1t} = R_{1t} - R_{1t} F_{1t}' Q_t^{-1} F_{1t} R_{1t}'$$

- حساب توزيع معادلة التحديث

كما سبق فان مفهوم التحديث عبارة عن إعادة صياغة معادلات البنية وعلى اعتبار أن النموذج الهرمي الحركي الخطي المدروس مبين في المعادلات (19)، (20) و(21) فان المعادلة تمثل معادلة البنية.

وبوجود المعادلة (15) واعتبار أن $i=1$ فان الوسط والتبـاين يكونـان علـى النحـو الآتـي:

$$Mean = F_{2t}q_{2t} + V_{2t}\mathrm{E}'_{\mathbf{o}1t}V^{*}{}_{\mathbf{o}2t}{}^{-1}\left(Y_t - \mathrm{E}_{\mathbf{o}2t}q_{2t}\right)..........(19)$$

$$Variance = V_{2t} - V_{2t}\mathrm{E}'_{\mathbf{o}1t}V^{*}{}_{\mathbf{o}2t}{}^{-1}\mathrm{E}_{\mathbf{o}1t}V'_{2t}..................(20)$$

اذ أن:

$$\mathrm{E}_{\mathbf{o}1t} = F_{1t} \quad , \mathrm{E}_{\mathbf{o}2t} = F_{2t} \ , \quad V^{*}{}_{\mathbf{o}2t} = V_{1t} + V_{2t}$$

الجدول ١

التوزيع الخاص بالمعلمة q_{1t} عندما $s^2 = 0.5$

No.	y1t	y2t	m11(t)	m12(t)	c11(t)	c12(t)
1	22.0348	22.5433	22.779	22.465	0.93787	0.00727
2	21.18074	20.27561	21.30316	20.52948	0.265545	0.333256
3	20.86601	21.28593	21.50407	21.20251	0 .00 828	0.174275
4	21.31146	21.94511	22.29902	21.94621	0.102461	0.00536
5	21.22128	21.91555	21.57943	22.7269	0.169724	1.735713
6	20.14882	19.86653	20.2429	20.36975	0.139249	0.457062
7	21.95936	20.71319	20.6107	20.8407	0.268815	0.00898
8	20.7247	20.86563	21.61511	24.4971	0.140823	1.585737
9	21.97083	21.39857	21.93965	21.75659	0.007966	0.003501
10	22.07034	23.24261	22.13148	22.82185	0.005282	0.374031

الجدول ٢

التوزيع الخاص بالمعلمة q_{1t} عندما $s^2 = 1$

No.	y1t	y2t	m11(t)	m12(t)	c11(t)	c12(t)
1	21.84224	22.56135	22.52908	22.4138	0.62761	0.00873
2	20.63429	19.35423	20.80742	19.71326	0.375537	0.471295
3	20.1892	20.78305	21.09155	20.66507	0.117098	0.246464
4	20.81915	21.71527	22.21579	21.71682	0.144906	0.007254
5	20.69161	21.67346	21.19812	22.82081	0.240026	2.454578
6	19.17493	18.77571	19.30798	19.48737	0.196928	0.646384
7	21.73542	19.97306	19.82813	20.1534	0.380165	0.12576
8	19.98935	20.18865	21.24857	25.32424	0.199152	2.242524
9	21.75164	20.94235	21.70754	21.44867	0.112659	0.004949
10	21.89237	23.55021	21.97883	22.95517	0.074709	0.52896

الجدول ٣

التوزيع الخاص بالمعلمة q_{1t} عندما $s^2 = 1.5$

No.	y1t	y2t	m11(t)	m12(t)	c11(t)	c12(t)
1	21.69441	22.57514	22.4234	22.362	0.55422	0.0093071

2	20.21498	18.64724	20.42702	19.08695	0.4599372	0.5772166
3	19.66986	20.39718	20.775	20.25268	0.1434149	0.3018544
4	20.44139	21.53891	22.15191	21.54081	0.1774709	0.008849
5	20.28519	21.48771	20.90553	22.89294	0.2939706	3.006257
6	18.42763	17.93869	18.59059	18.8103	0.241187	0.7916557
7	21.56358	19.40515	19.22764	19.62601	0.4656037	0.1540242
8	19.42509	19.66918	20.96731	25.9589	0.2439088	2.746488
9	21.58345	20.59228	21.52944	21.21238	0.1379783	0.00 60612
10	21.75581	23.78625	21.8617	23.05746	0.009149	0.6478407

الجدول ٤

التوزيع الخاص بالمعلمة q_{2t} عندما $s^2 = 0.5$

No.	**y1t**	**y2t**	**m21t**	**m22t**	**c21(t)**	**C22(t)**
1	22.0348	22.5433	22.4898	10.41571	0.1585	0.515706
2	21.18074	20.27561	20.7837	-0.38913	0.540386	0.389129
3	20.86601	21.28593	21.35052	-0.58115	0.060483	0.581148
4	21.31146	21.94511	24.61918	-0.60559	0.6584	0.605588
5	21.22128	21.91555	22.22526	-0.81372	0.874138	0.81372
6	20.14882	19.86653	20.33711	0.434601	0.598001	0.434601
7	21.95936	20.71319	20.44525	-0.2117	0.493577	0.211698
8	20.7247	20.86563	29.59869	-0.22825	5.063447	0.228251
9	21.97083	21.39857	20.32615	0.79523	2.162261	0.79523
10	22.07034	23.24261	22.15811	0.138256	0.315276	0.138256

الجدول ٥

التوزيع الخاص بالمعلمة q_{2t} عندما $s^2 = 1$

No.	**y1t**	**y2t**	**m21t**	**m22t**	**c21(t)**	**c22(t)**
1	22.0348	22.5433	22.2023	10.5879	0.000768	0.6878
2	21.18074	20.27561	20.07279	-0.55031	0.764221	0.550311
3	20.86601	21.28593	20.87438	-0.82187	0.08553	0.821867
4	21.31146	21.94511	25.49703	-0.85643	4.529411	0.856432
5	21.22128	21.91555	22.11142	-1.15077	1.236183	1.150774
6	20.14882	19.86653	19.44122	0.614619	0.845701	0.614619
7	21.95936	20.71319	19.59414	-0.29939	0.698026	0.299386
8	20.7247	20.86563	32.53887	-0.3228	7.160636	0.322796
9	21.97083	21.39857	19.4257	1.124626	3.057913	1.124626
10	22.07034	23.24261	22.0165	0.195523	0.445865	0.195523

الجدول ٦

التوزيع الخاص بالمعلمة q_{2t} عندما $s^2 = 1.5$

No.	y1t	y2t	m21t	m22t	c21(t)	c22(t)
1	22.0348	22.5433	21.9975	10.72003	0.004595	0.820025
2	21.18074	20.27561	19.5272	-0.67399	0.935975	0.673991
3	20.86601	21.28593	20.50903	-1.00658	0.104761	1.006577
4	21.31146	21.94511	26.17057	-1.04891	5.547353	1.04891
5	21.22128	21.91555	22.02411	-1.4094	1.409405	1.409405
6	20.14882	19.86653	18.75377	0.752751	1.035768	0.752751
7	21.95936	20.71319	18.94106	-0.36667	0.854903	0.366672
8	20.7247	20.86563	34.79493	-0.39534	8.769859	0.395343
9	21.97083	21.39857	18.73477	1.37738	3.74516	1.37738
10	22.07034	23.24261	21.90783	0.239466	0.54607	0.239466

الجدول ٧
التوزيع الخاص بمعادلة التحديث عندما $s^2 = 0.5$

No.	y1t	y2t	mup1	mup2	vup1	vup2
1	22.0348	22.5433	22.5195	22.4388	0.4418	0.006167
2	21.18074	20.27561	21.62235	20.69715	0.193501	0.274948
3	20.86601	21.28593	21.56179	21.17387	0.153233	0.195628
4	21.31146	21.94511	21.50297	21.8875	0.134502	0.399686
5	21.22128	21.91555	21.68815	21.6734	0.795	0.203615
6	20.14882	19.86653	20.30251	20.6184	0.130095	0.311337
7	21.95936	20.71319	20.93694	21.02546	0.435302	0.234682
8	20.7247	20.86563	20.98255	21.08141	0.142399	0.108734
9	21.97083	21.39857	21.87843	21.2972	0.5465	0.131058
10	22.07034	23.24261	22.004	22.51991	0.81	0.123818

الجدول ٨
التوزيع الخاص بمعادلة التحديث عندما $s^2 = 1$

No.	y1t	y2t	mup1	mup2	vup1	vup2
1	22.0348	22.5433	22.52761	22.4132	0.62481	0.008722
2	21.18074	20.27561	21.25881	19.95038	0.273653	0.388836
3	20.86601	21.28593	21.17318	20.62457	0.216705	0.276661
4	21.31146	21.94511	21.08998	21.6338	0.190214	0.56525
5	21.22128	21.91555	21.35186	21.331	0.112471	0.287959
6	20.14882	19.86653	19.39228	19.83908	0.183982	0.440297
7	21.95936	20.71319	20.2895	20.41468	0.6156	0.33189
8	20.7247	20.86563	20.354	20.4938	0.201383	0.153773
9	21.97083	21.39857	21.62096	20.7989	0.772	0.185345
10	22.07034	23.24261	21.79856	22.52815	0.114554	0.175106

الجدول ٩

التوزيع الخاص بمعادلة التحديث عندما $s^2 = 1.5$

No.	y1t	y2t	mup1	mup2	vup1	vup2
1	22.0348	22.5433	22.53382	22.39409	0.7652	0.10682
2	21.18074	20.27561	20.97986	19.37737	0.335155	0.476225
3	20.86601	21.28593	20.87498	20.20308	0.265408	0.265408
4	21.31146	21.94511	20.77309	21.43913	0.232964	0.692293
5	21.22128	21.91555	21.09383	21.06828	0.137748	0.352675
6	20.14882	19.86653	18.69384	19.24106	0.225333	0.539252
7	21.95936	20.71319	19.7927	19.94602	0.753	0.40648
8	20.7247	20.86563	19.8717	20.04292	0.246643	0.188333
9	21.97083	21.39857	21.42341	20.4167	0.946614	0.227
10	22.07034	23.24261	21.64091	22.53448	0.140299	0.214459

من النتائج التي تم التوصل إليها تبين أن متجه المتوسط a_{2t} و a_{1t} فيما يخص التوزيعات الاحتمالية الأولية للمعلمتين q_{1t} و q_{2t} على التوالي أنه ثابت في كل الأزمنة، وأن متجه المتوسط a_{1t} يعتمد اعتمادا كليا على العنصر الأول $\left(a_{21,t}\right)$ من متجه المتوسط a_{2t} وهذا منطقي لأن:

$$b_{1t} = m_t + u_{1t}$$

$$b_{2t} = m_t + u_{2t}$$

وعند أخذ التوقع للمعادلتين نحصل على:

$$\mathrm{E}b_{1t} = \mathrm{E}m_t$$

$$\mathrm{E}b_{2t} = \mathrm{E}m_t$$

في حين أن مصفوفات التباين التي تم حسابها للتوزيعات الأولية والنهائية للمعلمات q_{1t} و q_{2t} كانت ثابتة في جميع الأزمنة أيضا. أما فيما يخص متجه المتوسط الخاص بالتوزيع الاحتمالي النهائي للمعلمة q_{2t} نلاحظ بان العنصر الأول $m_{21,t}$ كان متغيرا عند كل زمن ويرجع ذلك إلى وجود المشاهدات العشوائية y_{1t} و y_{2t} في المعادلة التي تم حسابه منها. على عكس العنصر الثاني $m_{22,t}$ الذي بقي ثابت القيمة عند أي زمن.

على العكس من ذلك نلاحظ أن متجه المتوسط الخاص بالتوزيع الاحتمالي النهائي للمعلمة q_{1t} كان متغيرا عند كل زمن وذلك بسبب ارتباطه بالمشاهدات العشوائية y_{1t} و y_{2t} على التوالي.

ومن نتائج الجداول (7) ،(8) و(9) الخاصة بمعادلة التحديث نلاحظ بان متجه المتوسط أيضا متغير عند كل زمن على عكس مصفوفة التباين فقد كانت ثابتة عند

كـل الأزمــان. مــن ملاحظــة المعــادلتين (19) و(20) نلاحـظ أن جميـع المتغيـرات الموجـودة فـي معادلـة الوسـط والتبـاين خاصـة بالمعلمـة q_{2t} ويرجـع ذلـك إلـى أن التحديث للمعلمة q_{1t} أخذ بنظر الاعتبار وجود المعلومات الخاصة بـ q_{2t} .

الاستنتاجات

فـي الدراسـة النظريـة والعمليـة علـى البيانـات المولـدة تناولنـا فـي هـذا البحـث موضـوعين أساسـيين همـا النمـاذج الحركيـة الهرميـة الخطيـة واسـتدلال بيـز . وتـم التوصل إلى الآتي :

١. إن لاستدلال بيز وتحليله المتسلسل دورا كبيرا في حل كثير من المعوقات التي تعترض التطبيقات العملية باستخدام النماذج الهرمية.
٢. ان مصفوفات التباينات التي تم حسابها للتوزيعات الاولية والنهائية للمعلمات كانت ثابتة في جميع الازمنة .
٣. لقد كانت جميع المتغيرات الموجودة في معادلة الوسط والتباين خاصة بالمعلمة q_{2t} ويرجع السبب في ذلك الى ان التحديث كان للمعلمة q_{1t} آخذاً بالنظر وجود المعلومات الخاصة بالمعلمة q_{2t} .

المراجع

أولاً- المراجع باللغة العربية

١. صفوان ناظم راشد العكاش، "تمهيد بيز لبعض النماذج الحركية الخطية"، رسالة ماجستير، غير منشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات ،جامعة الموصل، ٢٠٠١ .
٢. سلطان علي محمد سالم، "النماذج الهرمية الحركية وتحليل بيز" ، رسالة دكتوراه، غير منشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات ،جامعة الموصل، ٢٠٠٠ .

ثانياً - المراجع باللغة الأجنبية

1. Branett,V.,(1992), " Comparative Statistical Inference" , John Wiley & Sons, New York .
2. Box, G.E. and Tiao, G.C., (1973), " Bayesian Inference In Statistical Analysis", Addison – Wesley Publishing Company, London.
3. Camargo, E.A. and Gamerman, D.,(2000), " Discrete Mixture Alternative to Dynamic Hierarchical Models" , Estadistica, Vol. 52, pp. 39-77
4. Draper, D.,(1995), " Inference and Hierarchical Modeling in the Social Sciences", J.R.Statist.Soc.,Series A,156,pp. 9-38
5. Gamerman, D. and Migon, H.S.,(1993), " Dynamic Hierarchical Models" ,J.R.Statist. Soc.B, Vol.55, No.3, pp. 629-642
6. Harrison, P.J and Stevens, G.F. (1976), " Bayesian Forecasting (with Discussion)" J.R.Statist. Soc.B, Vol.38, pp. 205-247
7. Harrison, P.J and West, M., (1989), " Bayesian Forecasting and Dynamic Models" Springer –Varlag, New York.
8. Kass, R.E. and Steffey, D.,(1989), " A proximate Bayesian Inference in Conditionally Independent Hierarchical Models(Parametric Empirical Bayes Models)", Journal of the American StatisticalAssociation,Vol. 84, No. 407, pp. 717-726
9. Lindley, D.V. and Smith, A.F.M.,(1972), " Bayes Estimates for the Linear Model", J.R.Statist.Soc.B,Vol.34 ,pp. 1-41

10. Neelamegham, R. and Chintagunta, P.K.,(2001), " Modeling and Forecasting for Technology Products : A Dynamic Hierarchical Bayesian Approach", www.uchicago.edu/fac/pradeep.chintagunta/more

BAYESIAN DYNAMIC HIERARCHICAL ESTIMATION WITH STIMULATION

ABSTRACT

Gamerman and Migon 1993 have presented a work describing the dynamic hierarchical models. These models which have been described by them use a system involved with linear equation: first equation called the observation equation, the second one called the structure equation, and the third one called the system equation. This work differs from the work which have been done by Harrison and Stevens in 1976 where they have described the dynamic linear models by using two equations: the first equation was called the observation equation and the second one called the system equation.

In this paper we have presented a comprehensive review for the linear dynamic hierarchical models, and simplifying many concepts related to these modals, since the information available were either inefficient or they have been presented in a complex way. A simple review for the non-linear dynamic hierarchical models was presented as well. We have applied the theoretical results on generated data through using Simulation Technique for one chosen model which have presented by Gamerman and Migon 1993 which is called Linear Growing Exchangeable Means.