Comparing between Maximum Likelihood Method and Moments Method to estimation the Fuzzy reliability for Frechet Distribution By using simulation

مقارنة بين طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم في تقدير المعولية الضبابية لتوزيع فريچت باستخدام المحاكاة

أ.م.د. مهدي وهاب نعمة نصر الله بشار خـــــــالد علي

جامعة كربلاء – كلية الادارة والاقتصاد

المستخلص :

قدر الباحث معالم توزيع فريچت $\boldsymbol{Frechet\ Distribution}$ وهما معلمة الشكل $\boldsymbol{Shape\ parameter}$ (α) ومعلمة القيـاس (β) $\boldsymbol{scale\ parameter}$ باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم عندما تكون بيانات اوقات الحياة عبارة عن ارقام ضبابية $(\boldsymbol{Fuzzy\ Numbers})$ ومن ثم استخدام التقديرات التي تم الحصول عليها في ايجاد تقدير دالة المعولية الضبابية للتوزيع . ثم استخدام تلك التقديرات في تقدير دالة المعولية الضبابية للتوزيع ، وتوصل الباحث عن طريق نتائج المحاكاة وان المعولية الضبابية عند مقدرات الامكان الاعظم افضل من طريقة العزوم كونها تعطي اقل متوسط مربعات خطأ $\boldsymbol{MSE}$ واقل متوسط مربعات خطأ نسبي مطلق$\boldsymbol{MAPE}$ ، وان تقدير المعلوية الضبابية يكون افضل من الحقيقية لكل احجام العينات للمعولية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم.

الكلمات المفتاحية : بيانات حياة ضبابية . توزيع فريچت. تقدير المعولية . تقدير الامكان الاعظم. تقدير العزوم

Abstract

The researcher estimated distribution parameters by using the method of maximum Likelihood estimation and moments when the data of life times are fuzzy numbers. And then use the estimates obtained in the estimation of the fuzzy reliability function of the distribution and then choose the best estimate of this function by comparing in mean square error (MSE) and Mean Absolut Proportional Error (MAPE). The researcher concluded by means of the simulation results the fuzzy reliability by using maximum Likelihood estimation is better than moment's method because is give less mean square error (MSE) and less Mean Absolut Proportional Error (MAPE) . That the estimation of the fuzzy is better than the real for all sample sizes when we estimate of the Frechet distribution parameters by using Maximum Likelihood method.

المقدمة : (Introduction)

في كثير من الاحيان ، تواجه في العالم المادي الحقيقي مجموعات من الاشياء قد يكون ليس لها معيار انتماء دقيق لعناصرها ، لذلك فان تلك المجموعات لاتشكل مجموعات بالمعنى الرياضي المعتاد لهذه المصطلحات مثلاً مجموعة (فئة) الحيوانات، من الواضح أن الكلاب او الاحصنة او الطيور .... الخ ، تنتمي لتلك الفئة (المجموعة) وواضح ايضا استبعاد اشياء مثل النباتات ، السوائل ، الصخور ... الخ ، في حين ان هنالك اشياء مثل نجم البحر ، البكتريا ... الخ قد يشك يتعلق بانتماءها لفئة الحيوانات ، وايضا مجموعة الرجال طوال القامة ، و مجموعة الارقام الحقيقية الاكبر من 1 ، ان مثل تلك المجموعات التي يكون هنالك شك في انتماء عناصرها للمجموعة تدرج تحت ما يسمى بالمجموعة الضبابية $\boldsymbol{Fuzzy\ Set}$ والتي تمثل انطلاقة جديدة للخروج من النمط التقليدي والذي سيجهز الطريق للتعامل مع المشاكل التي لها مصدر من عدم الدقة او عدم توفر معيار محدد وثابت بخلاف المتغير العشوائي الاعتيادي.

بدأت ثمار المنطق الضبابي (العائم) تنضج على يد العالم الايراني الاصل لطفي زادة $\boldsymbol{Lotfi\ Zadah}$ عام 1965 [22] عندما استخدم مصطلح المتغيرات الضبابية على التعابير والالفاظ اللغوية التقريبية او غير دقيقة او غير محددة لذلك يكون اول من وضع اسس نظرية المجموعات الضبابية $\boldsymbol{Fuzzy\ sets\ Theory}$ إذ عرف المجموعة الضبابية بانها مجموعة من الكائنات التي لها درجات انتماء مستمرة والتي تميزها دالة انتماء تعيين لكل كائن في المجموعة درجة انتماء بين الصفر والواحد.

وفي عام 2004 قدر $(\boldsymbol{Wu})$ [19] المعولية الضبابية باستخدام المنهج البيزي $\boldsymbol{Bayes\ Approach}$ تحت البيئة الضبابية إذ افترض معالجة ضبابية لمتغيرات ضبابية بتوزيعات سابقة ضبابية واستخدمت طريقة تقدير بيز التقليدية لانشاء مقدر بيز النقطي

الضبابي للمعولية بتضمين النظرية المعروفة باسم $\boldsymbol{Resolution\ Identity}$ في نظرية المجموعات الضبابية وحدد درجة انتماء لاي تقدير بيزي للمعولية. وفي عام 2006 حلل ($\boldsymbol{Huang}$) و($\boldsymbol{Zuo}$) و ($\boldsymbol{Sun}$) [9] المعولية البيزية لبيانات الحياة الضبابية إذ استعمل طريقة بيز لتقدير المعولية الضبابية بالاعتماد على حجم عينة صغير إذ افترض طريقة جديدة لتحديد دالة الانتماء لتقدير المعالم ودالة المعولية لتوزيعات حياة متعددة المعالم وهي التوزيع الطبيعي وتوزيع وايبل. وفي عام 2012 قدر ($\boldsymbol{Abbas}$) و ($\boldsymbol{Yincai}$) [2] معلمة القياس لتوزيع فريچت بمعلمة شكل معلومة باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم الموزونة الاحتمالية وطريقة بيز لتوزيع اولي $\boldsymbol{Jeffery}$ ودالة خسارة تربيعية و دالة خسارة $\boldsymbol{El-Sayyad}$ وكذلك دالة خسارة $\boldsymbol{linex}$ عن طريق دراسة محاكاة باستعمال احجام عينات مختلفة بالاستناد إلى معيار متوسط مربعات الخطأ $\boldsymbol{MSE}$. واستنتجا بان طريقة الامكان الاعظم افضل من طريقة بيز من حيث التحيز عند زيادة قيمة $\boldsymbol{\alpha}$. وفي عام 2013 قدر ($\boldsymbol{Pak}$)و($\boldsymbol{Ali}$) و ($\boldsymbol{Saraj}$) [15] معولية توزيع رايلي $\boldsymbol{Rayleigh\ Distrbution}$ بالاستناد إلى بيانات حياة ضبابية إذ استخدم منهجية بيز لتقدير معلمة ودالة المعولية للتوزيع من بيانات حياة ضبابية ، ولكون مقدرات بيز لا يمكن ان تعطى بصيغ واضحة، لذلك استعمل الباحثون تقريبات مثل تقريب $\boldsymbol{Lindely}$ ، وتقريب $\boldsymbol{Trereney}$ ، وتقريب $\boldsymbol{Kadane}$ المعروفة بطرائق سلاسل ماركوف مونتي كارلو لحساب مقدرات بيز لمعالم ودالة معولية توزيع رايلي باستخدام المحاكاة بطريقة مونتي كارلو، واوضحت نتائج المحاكاة بان تقريب $\boldsymbol{Kadane}$ وتقريب $\boldsymbol{Trereney}$ يعطي تقديرات دقيقة للمعالم لذلك من المستحسن اســــتخدام تقريب$\boldsymbol{Kadane}\ \&\ \boldsymbol{Trereney}$ في ايجاد تقديرات بيز وكذلك المعولية لتوزيع رايلي . وكذلك استعمل ($\boldsymbol{Pak}$) و($\boldsymbol{Ali}$) و ($\boldsymbol{Saraj}$) [14] تقدير الامكان الاعـــــظم $Maximum\ Liklihood\ Estimation$ وتقدير بيز $Bayes\ Estimation$ وتقدير العزوم $Moment\ estimation$ عندما تكون المشاهدات في صيغة بيانات ضبابية في الاستدلال حول معالم توزيع وايبل$\boldsymbol{Weibul\ Distribution}$ إذ استعمل طريقة نيوتن رافسون $\boldsymbol{Newton\ Rafson}$ وطريقة تعظيم التوقع $\boldsymbol{Expectation\ maximization}$ لايجاد تقديرات الامكان الاعظم وتقريب $\boldsymbol{Kadane}\ \&\ \boldsymbol{Trereney}$ لايجاد تقديرات بيز لدالة خسارة تربيعية وطريقة تكرارية لايجاد تقديرات العزوم ،واستخدم المحاكاة مونتي كارلوا للمقارنة بين، واستنتجوا بانه عندما يكون حجم العينة صغيراً ومتوسطاً فان مقدر بيز افضل من مقدر الامكان الاعظم ومن ثم ياتي بعدهم مقدر العزوم. وفي حالة كون حجم العينة كبيراً فان الطرائق الثلاثة تعطي التقديرات نفسها. وفي العام 2015 استعمل الباحث (**Pak**) [12] تقدير الامكان الاعظم **Maximum Liklihood Estimation** وتقدير بيز $Bayes\ Estimation$ وتقدير العزوم $Moment\ estimation$ لتقدير معلمة الشكل للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي $\boldsymbol{Log-Normal\ Distribution}$ عندما تكون المشاهدات في صيغة بيانات ضبابية واستعمل طريقة نيوتن رافسون لايجاد تقديرات الامكان الاعظم وطريقة سلسلة ماركوف مونتي كارولوا لايجاد تقديرات بيز لانواع مختلفة من التوزيعات السابقة وكذلك طريقة العزوم واستخدم المحاكاة مونتي كارلوا للمقارنة بين الطرائق ، وتم التوصل الى ان تقديرات بيز المستندة إلى معلومات سابقة غير مشخصة بشكل وكذلك تقدرات الامكان الاعظم تعطي نتائج تقدير متشابهة. وان تقدير بيز في حالة المعلومات السابقة المشخصة بشكل كامل تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ ، لاحظ ايضاً بان اضافة اي معلومات سابقة عن المعلمة **σ** تحسن من المقدرات. وان متوسط مربعات الخطأ والتحيز يتناقص معنوياً في حالة زيادة حجم العينة . وفي عام **2017** قدر ***(Nathier*** ***Hussein A. Mohammed)*** و***A. Ibrahim)*** [1] معالم ومعولية التوزيع الاسي الضبابي بمعلمتين إذ قدر معلمة القياس (**λ**)بطريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم ثم قدروا دالة المعولية الضبابية و قارنوا النتائج باستخدام مقياس متوسط مربعات الخطأ , ووجدوا بان مقدر الامكان الاعظم هو الافضل , وكذلك المعولية الضبابية افضل عندما يكون المقدر هو مقدر الامكان الاعظم عند الرقم الضبابي**$\tilde{\mathbf{k}}$=0.3** واستنتجوا بان المقدر الضبابي للمعولية افضل من المقدر التقليدي .وفي العام نفسه قدر الباحث ($\boldsymbol{Pak}$) [13] توزيع ليندلي $Lindley\ Distribution$ بمعلمة واحدة عندما تكون البيانات المتوفرة في صيغة بيانات ضبابية إذ استعمل تقدير الامكان الاعظم $Maximum\ Liklihood\ Estimation$ وتقدير بيز $Bayes\ Estimation$ ، استخدم خوارزمية EM لتحديد تقدير الامكان الاعظم MLE للمعلمة وانشأ حدود ثقة باستعمال $asymptotic\ normality$ لمقدر الامكان الاعظم ، وفي طريقة بيز استخدام تقريب لابلاس المعروف باسم سلاسل ماكروف مونتي كارلوا لايجاد مقدر بيز للمعلمة ، وتم الحصول ايضاً على فترة ثقة سابقة للمعلمة المجهولة . وتوصل الباحث عن طريق دراسة محاكاة مونتي كارلوا بان تقديرات بيز المستندة إلى معلومات سابقة غير مشخصة بشكل كامل $Non-Informative\ prior$ وكذلك تقدرات الامكان الاعظم تعطيا نتائج تقدير متشابهة. وان تقدير بيز في حالة المعلومات السابقة المشخصة تماماً $Informative\ prior$ تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ ولاحظ ايضاً بان اضافة اي معلومات سابقة عن المعلمة θ تحسن من المقدرات.

مشكلة البحث: ($\boldsymbol{Problem\ of\ Research}$)

تعاني الكثير من البيانات في العالم الحقيقي من مشكلة عدم الدقة (التشويش) في قياساتها مما يجعلها تمتلك صفة الضبابية $\boldsymbol{Fuzzy}$ ويعبر عنها بارقام ضبابية $\boldsymbol{Fuzzy\ Numbers}$ ، فكلما اقتربنا من عالمنا الحقيقي يصبح اكثر غموضاً (ضبابية) ، مما يجعل الطرائق التقليدية في التقدير غير مناسبة لايجاد تقديرات معالم التوزيع الاحتمالي فيما لو كانت البيانات ضبابية. وللتقدير واستخراج المؤشرات في ظل هذه البيئة لابد من اعمام مفهوم الضبابية والانتقال من اساليب التقدير الاعتيادية (التقليدية) الى تلك المتخصصة بالضبابية لاسيما بالنسبة للتوزيع الاحتمالي الضبابي الذي يحكم سلوك الظاهرة ، وبعد تحديد التوزيع الاحتمالي الضبابي نعمل على تقدير معلماته بطرائق مختلفة ومن ثم تقدير المعولية الضبابية $\boldsymbol{Fuzzy\ Reliability}$.

هدف البحث: $(Purpose\ of\ Research)$

ان ما يهدف له البحث هو الاتي:

1- تقدير معالم توزيع فريچت $Frechet\ Distribution$ وهما معلمة الشكل $Shape\ parameter\ \alpha$ ومعلمة القياس $scale\ parameter$ باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم عندما تكون بيانات اوقات الحياة عبارة عن ارقام ضبابية $(Fuzzy\ Numbers)$.

2- اعتمادا على هذا التقدير يتم احتساب دالة المعولية الضبابية للتوزيع .

3- اختيار افضل تقدير للمعولية الضبابية باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ $Mean\ Square\ error$ و متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق$(Mean\ Absolut\ Proportional\ Error)$.

_المنطق الضبابي $(Fuzzy\ logic)$: [20,22,23]

يعد المنطق الضبابي من التقنيات الحديثة في تطوير الانظمة إذ اظهر مقدرة كبيرة في حل المشاكل على نطاق واسع في مجالات تطبيقية مختلفة ، ثم تطور هذا المنطق ليمس معظم الجوانب التكنولوجية الحديثة. ولوجود الكثير من الظواهر في العالم الحقيقي تتعامل مع معلومات غير دقيقة وغير محددة بشكل واضح جاءت نظرية المنطق الضبابي لسد ثغرات كبيرة في المنطق الكلاسيكي $(Crisp)$ للاستدلال في ظروف غير مؤكدة $(Uncertain)$ وغير دقيقة والذي يعد كحل لمشكلة تمثيل المعلومات التقريبية إذ يركز المنطق الضبابي على الاستنتاج من خلال التعابير اللغوية إذ يتم اسناد درجة للمتغير (عنصر في المجموعة الشاملة) اي درجة انتماء في المجال الحقيقي $[0,1]$ تساعد هذه الدرجة في تحديد انتماء العنصر الى المجموعة الجزئية الضبابية**.** فهو نظريات وتقنيات تستعمل المجموعات الضبابية $(Fuzzy\ sets)$ والتي هي مجموعات بلا حدود قاطعة فهو طريقة سهلة لتوصيف وتمثيل الخبرة البشرية كما انه يقدم الحلول العلمية للمشاكل الواقعية مع اختزال الوقت والكلفة مقارنة بالحلول التي تقدمها التقنيات الاخرى.

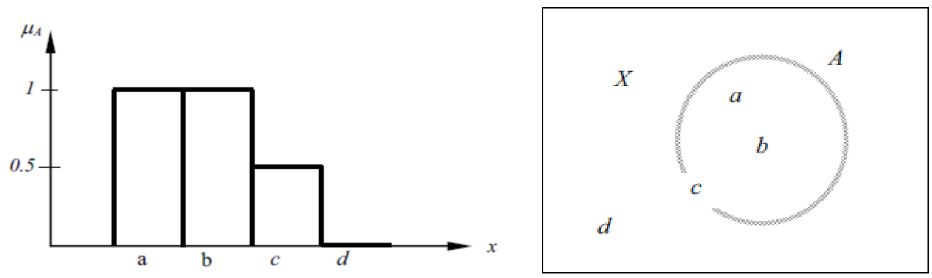
المجموعة الضبابية $(Fuzzy\ set)$: [20,19,21]

مجموعة حدودها غامضة ، كل عنصر في المجموعة الضبابية له درجة انتماء معينة ، وتُميَّز المجموعة الضبابية بدالة انتماء $Membership\ function$ التي تخصص لكل عنصر في المجموعة درجة انتماء في الفترة $[0,1]$. وفيها يسمح للعنصر او الكائن بالانتماء الجزئي $Partial\ Membership$.

لتكن X مجموعة شاملة فان المجموعة الضبابية الجزئية $\tilde{A}$ من X والمميزة بدالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ التي تنتج قيم بين $[0,1]$ لكل قيم x في فضاء العينة الضبابية X .

$$\tilde{A} = \{(x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)), x \in X, i = 1,2,3, \dots \dots n, o < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1\} \qquad \dots (1)$$

لنفرض ان $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$ فان x_0 ينتمي تماماً الى $\tilde{A}$ واذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0$ فان x_1 لا ينتمي تماماً الى المجموعة $\tilde{A}$ واذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0.6$ فان x_1 ينتمي بدرجة 0.6 الى $\tilde{A}$. واذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مساوية الى واحد او صفر سنحصل على مجموعة جزئية غير ضبابية $Crisp\ subset$ من فضاء العينة X .



الشكل (1) التمثيل البياني للمجموعة الضبابية $Fuzzy\ set$

دالة الانتماء (العضوية) $\boldsymbol{Membership\ function}$: [8,5]

يُعد مفهوم دالة الانتماء $\boldsymbol{Membership\ function}$ الاكثر اهمية في نظرية المجموعات الضبابية والتي تستعمل لتمثيل مختلف انواع المجموعات الضبابية . وهي الدالة التي تنتج قيم ضمن الفترة $[0,1]$ لتعبر عن درجة انتماء كل عنصر في المجموعة الشاملة الى المجموعة الضبابية $Fuzzy\ set$ ، بمعنى اخر هي الخريطة التي ترسم درجة الصحة (درجة تحقق العضوية) لانتماء كل عنصر في المجموعة الشاملة الى المجموعة الضبابية ، وهي دالة ذات قيمة غير سالبة ، والشرط الاساس لهذه الدالة ان يكون مداها بين الصفر والواحد.

الارقام الضبابية $\boldsymbol{Fuzzy\ Numbers}$: [4,10]

الارقام الضبابية تستعمل لوصف حالة عدم التاكد ، وهي ارقام غالباً ما تكون ثلاثية الشكل $\boldsymbol{Traingular}$ او شبه منحرفة الشكل $\boldsymbol{Trapizoidal}$ او اي شكل اخر .

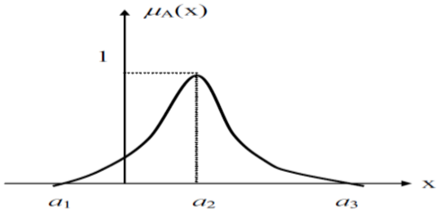
والرقم الضبابي هو مجموعة ضبابية بالشروط الاتية :

1- مجموعة ضبابية محدبة $\boldsymbol{Convex}$ ومعيارية $\boldsymbol{Normalized}$

2- دالة الانتماء $\mu_{\tilde{a}}$ شبه مستمرة من الاعلى

3- مجموعة المستوى α محددة لكل $\alpha \in [0,1]$

4- معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R



الشكل (2) يمثل الرقم الضبابي

الرقم الضبابي المثلثي $\boldsymbol{Traingular\ Fuzzy\ Number}$: [15,13]

يعرف بثلاثة ارقام $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$ إذ $\boldsymbol{a_1 < a_2 < a_3}$ وقاعدة المثلث الفترة $[\boldsymbol{a_1, a_3}]$ وراسه عند $\boldsymbol{x = a_2}$ ويمكن ان يكتب بالصيغة الاتية :

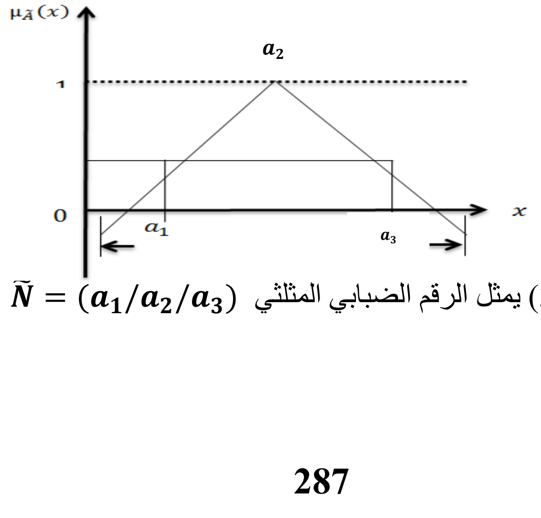
$$\boldsymbol{\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)}$$

ويكون الرقم الضبابي المثلثي $\boldsymbol{\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)}$ مميز بدالة انتماء مثلثية $\boldsymbol{Traingular\ membership\ fucntion}$ وصيغتها كالاتي :

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} \frac{x-\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_2-a_1}} & \boldsymbol{a_1} \le x \le \boldsymbol{a_2} \\ \frac{\boldsymbol{a_3}-x}{\boldsymbol{a_3-a_2}} & \boldsymbol{a_2} \le x \le \boldsymbol{a_3} \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \dots(2)$$

فمثلاً الرقم الضبابي المثلثي الاتي : $\boldsymbol{\tilde{N} = (1.2/2/2.4)}$

المبين في الشكل رقم(3) ونلاحظ انه $\boldsymbol{\tilde{N} = (1.6) = 0.5}$ و $\boldsymbol{\tilde{N} = (2) = 1}$



الشكل (3) يمثل الرقم الضبابي المثلثي $\boldsymbol{\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)}$

الرقم الضبابي شبه المنحرف $:Trapizoidal\ Fuzzy\ Number$ (13، 15)

يعرف باربعة ارقام a_1, a_2, a_3, a_4 إذ $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ وقاعدة المثلث الفترة $[a_1, a_4]$ وقمته عند الفترة $[a_2, a_3]$ ويمكن ان يكتب بالصيغة الاتية :

$$\tilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$$

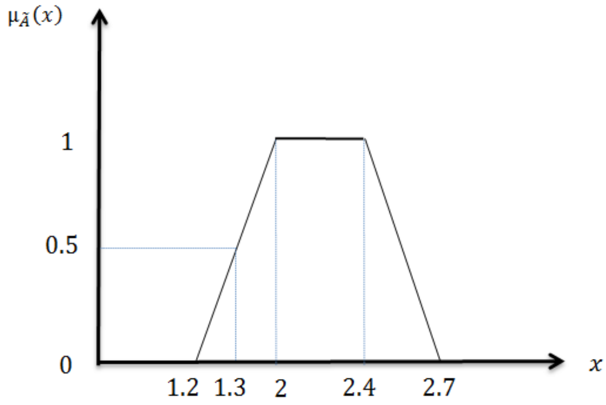
ويكون الرقم الضبابي شبه المنحرف $\tilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$ مميز بدالة انتماء شبه منحرفة $Trapizoidal\ membership\ fucntion$ وصيغتها كالاتي :

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & a_2 \le x \le a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 \le x \le a_4 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \ldots(3)$$

لتوضيح ماهو الرقم الضبابي الشبه المنحرف نفرض الرقم الضبابي الاتي :

$$\tilde{N} = (1.2/2, 2.4/2.7)$$

المبين في الشكل رقم (4) ونلحظ أنه $\tilde{N} = (2, 2, 4) = 1$ و $\tilde{N} = (1.3) = 0.5$



الشكل (4) يمثل الرقم الضبابي شبه المنحرف$\tilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$

ضاء العينة الضبابي $: Fuzzy\ sample\ space$ (14,18)

هو الاجزاء الضبابية $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots \ldots \ldots, \tilde{x}_n)$ من $X = (X_1, \ldots \ldots \ldots, X_n)$ ، بعبارة اخرى هو مجموعة المجموعات الجزئية الضبابية لـ X بدوال انتماء لها قياس بوريل $Borel\ Measure$ ، وتحقق قيد التعامد :

$$\sum_{\tilde{x} \in X} \mu_{\tilde{x}}(x) = 1$$

لكل $x \in X$ ، ويسمى ايضا نظام المعلومات الضبابية FIS.

الحدث الضبابي $\boldsymbol{Fuzzy\ Event}$: (38، 36، 41،37)

لتكن $X = (X_1, \dots \dots \dots, X_n)$ مجموعة في الفضاء الاقليدي $\boldsymbol{Euclidean\ space}$ التي تمثل المجموعة الشاملة و $\boldsymbol{B_x}$ اصغر حقل (جبر) سيكما بورل $\boldsymbol{Smallest\ Borel\ \sigma - Field}$ في X . وان اصغر حقل سيكما بوريل يضم اصغر جبر سيكما لكل المجموعات المفتوحة (المغلقة) عن طريق التقاطع والاتحاد والاتمام النسبي.

فان الحدث الضبابي في X هو المجموعة الضبابية الجزئية $\tilde{A}$ $(\boldsymbol{Fuzzy\ subset})$ من X التي دالة انتمائها $\mu_{\tilde{A}}(x)$ دالة قابلة للقياس بوريل $\boldsymbol{Borel\ measurable}$.

التوزيع الاحتمالي الضبابي $\boldsymbol{Fuzzy\ probability\ Distribution}$: (15,12 ,13)

لنفترض انه لدينا تجربة W لها فضاء احتمالي (X, f, P_θ) إذ (X, f) قابل للقياس Mesureable وP_θ ينتمي الى عائلة المقاييس الاحتمالية $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ في (X, f). فان المجموعة الضبابية $\tilde{A}$ في X لها دالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(w)$ التي تربط كل نقطة w في X عدد حقيقي في الفترة [0,1] حيث $\mu_{\tilde{A}}(w)$ تمثل درجة الانتماء للـ w في$\tilde{A}$.

وان X مجموعة في الفضاء الاقليدي (R) و f اصغر حقل سيكما - بوريل (smallest Boral σ –field) في X. فان الحدث الضبابي $Fuzzy\ event$ هو المجموعة الضبابية الجزئية $\tilde{A}$ في X التي دالة انتماءها $\mu_{\tilde{A}}$ لها قياس بوريل $Borel\ Measure$، فان التوزيع الاحتمالي الضبابي في $\widetilde{W}$ هو الراسم P_θ في $\widetilde{W}$ الى الفترة [0,1] بحيث:

$$P_\theta(\tilde{w}) = \int_\Omega \mu_{\tilde{A}}(w) dP_\theta(w) \quad ; \ \tilde{w} \in \widetilde{W} \qquad \dots(4)$$

إذ أن $P_\theta(w)$ مقياس احتمال العنصر w و $\mu_{\tilde{A}}(w)$ دالة انتماء العنصر w في المجموعة الضبابية الجزئية $\tilde{A}$

الاحتمال الشرطي الضبابي $\boldsymbol{Fuzzy\ Conditional\ Probability}$: (12,13 ,14)

نفرض ان P_θ يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y بدالة كثافة احتمالية $g(Y)$، فان دالة الكثافة الشرطية للـ Y عندما تكون $\tilde{A}$ معطاة كالاتي :

$$g(Y/\tilde{A}) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(y) g(y)}{\int \mu_{\tilde{A}}(u) g(u) du} \qquad \dots(5)$$

وهي المجموعة المؤلفة من كل الاحداث المشاهدة من التجربة المحددة بنظام المعلومات الضبابية $FIS\ (Fuzzy\ Information\ System)$ المرتبط بها.

توزيع فريچت $\boldsymbol{Frechet\ Distribution}$: (6,7 ,11 ,16)

يعد توزيع فريچت من احدث التوزيعات الاحتمالية لنماذج ازمنة الحياة $Lifetime\ models$. قُدم هذا التوزيع من لدن عالم الرياضيات الفرنسي $Maurice\ Frechet$ (1828-1973). وله تطبيقات واسعة في نمذجة وتحليل الكثير من الاحداث مثل الهزات الارضية ، الزلازل، الفيضانات، سقوط الامطار، سرعة الرياح، اختبارات الحياة، تيارات البحار، السلوك الاحصائي لخواص المواد في المجالات الهندسية وكذلك يستعمل في نمذجة وفيات الاطفال الرضع وفي نمذجة فترات فعاليات الكلف والفعاليات الخاصة بفترات الصيانة. ويستخدم توزيع فريچت في نمذجة معدلات الفشل والتي هي شائعة الاستعمال في دراسة المعولية $Reliability$ والدراسات البايولوجية وتحليل الاشارات الضوئية وبناء نماذج الاخطاء.
اقترح الباحث (Drapella) (1993) و الباحث $(Mundhol\ Karad\ Kollia)$ (1994) اسم معكوس وايبل او مقلوب وايبل $Resprocal\ of\ Wiebul$ على توزيع فريچت.

فاذا كان x متغيراً عشوائياً له توزيع وايبل $Wiebul\ distrbution$ فان $y=\frac{1}{x}$ يمثل مقلوب قيم المتغير العشوائي x يكون له توزيع فريچت بدالة الكثافة الاحتمالية الاتية :

$$f(x,\alpha,\beta)=\alpha\beta^{\alpha}x^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha})\ ;x>0 \qquad ...(6)$$

وان $\alpha>0$ معلمة الشكل $Shape\ Parametere$ و $\beta>0$ معلمة القياس $Scale\ Parametere$

وان الدالة التوزيعية $Cummulative\ Distribution\ Function$ تعطى بالشكل الاتي :

$$F(x)=P(X\le x)=\int_0^x f(u)du=\exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha})\ \ ;\ x>0 \qquad ...(7)$$

وان دالة المعولية $(Reliability\ Function)$ كالاتي :

$$R(t)=1-F(t)=\int_t^{\infty} f(t)dt=1-\exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}) \qquad ...(8)$$

ودالة المخاطرة $(Hazard\ Function)$ كالاتي :

$$H(t)=\alpha\beta^{\alpha}t^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha})(1-\exp\left(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha}\right))^{-1} \qquad ...(9)$$

وان العزم ذو المرتبة k حول نقطة الاصل $\mathrm{K'th\ Monent\ about\ origin}$:

$$\mathrm{EX}^{k}=\int_0^{\infty}\mathrm{X}^{k}f(x)dx=\beta^{k}\,\Gamma(1\text{-}\frac{k}{\alpha})\quad ;k=1,2,3, \qquad ...(10)$$

وان متوسط وتباين التوزيع $Mean\ \&\ Variance$:

$$\mu_x=\beta\Gamma(1\text{-}\frac{1}{\alpha}) \qquad ....(11)$$

$$\sigma_x^2=\beta^2\Gamma(1\text{-}\frac{2}{\alpha})-\Gamma^2(1-\frac{1}{\alpha}) \qquad ...(12)$$

المعولية الضبابية: $Fuzzy\ Reliability$ [15,7,3]

تعرف المعولية $Reliability$ بانها احتمال بقاء الوحدة اوالجهاز صالحاً للعمل بعد مرور مدة من الزمن(t) على الاستعمال فاذا كان T متغيراً عشوائياً مستمراً ، $T>0$ فان دالة المعولية $R_T(t)$ هي :

$$R_T(t)=P(T\ge t)=\int_t^{\infty}f_T\,(x)dx=1-\int_0^{t}f_T\,(x)dx=1-F_T(t)$$

ومن خصائصها :

- ✓ $R(0)=p(T<\ 0)=1$
- ✓ $R(\infty)=0$
- ✓ $0\le\ R(t)\le 1$
- ✓ اذا $t_1<\ t_2$ فان $R(t_1)\ge R(t_2)$

والآن يمكننا ان نقول إن المعولية الضبابية تمثل احتمال اداء الوحدة للعمل المطلوب منها بدرجات متفاوتة من النجاح لمدة محددة من الوقت تحت الظروف الاعتيادية ويرمز لها $\tilde{R}$ والتي هي دالة في المجموعة الضبابية $\tilde{A}$

وليكن $\mu_{\tilde{A}_i}(R)$ تمثل درجة انتماء R في $\tilde{A}_i$ فان :

$$\tilde{R} = \mu_{\tilde{A}_i}(R).R$$

وبما ان :

$$R(t) = \int_t^\infty f(t)dt$$

فان :

$$\tilde{R} = \mu_{\tilde{A}_i}(R).\int_t^\infty f(t)dt$$

ان دالة معولية توزيع فريچت هي :

$$R(t) = 1 - \exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha)$$

سوف نفرض بان قيم المتغير العشوائي الضبابي $\tilde{T}$ هي رقم ضبابي:

$$\tilde{t} = \{[0,\infty), \mu_{\tilde{t}_i}\}$$

اذن: $\tilde{t} = \tilde{k}t$ و $t \in T$

لذلك فان الضبابية هي رقم ضبابي مثلثي حقيقي :

$$\tilde{k} = \{[0,\infty), \mu_{\tilde{k}}\}$$

وان :

$$\mu_{\tilde{k}}(k) = \begin{cases} \frac{k-k_{min}}{1-k_{min}} & k \in (k_{min}, 1) \\ \frac{k-k_{max}}{1-k_{max}} & k \in (1, k_{max}) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

بحيث : $0 < k_{min} \leq 1 \leq k_{max}$

فاذا كان المتغير العشوائي T له توزيع فريچت تقليدي بدالة كثافة احتمالي $Frechet(\alpha,\beta)$ فان المتغير العشوائي الضبابي $\tilde{T}$ المقابل له تويع فريچت بدالة كثافة احتمالية ضبابية $\widetilde{Frechet}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ بالخواص الاتية :

لكل $t \in [0,\infty)$ ، فان دالة التوزيع الضبابي التراكمي (***The Cumulative Fuzzy Distribution Function***) تكون :

$$\boldsymbol{\tilde{F}(\tilde{t}) = \exp(-\left(\frac{\hat{\beta}}{\tilde{k}t}\right)^{\hat{\alpha}})} \;\; ; \;\; \tilde{t} > 0 \qquad \ldots(13)$$

بينما دالة المعولية الضبابية تصبح :

$$\boldsymbol{\tilde{R}(t) = 1 - exp(-\left(\frac{\hat{\beta}}{\tilde{k}t}\right)^{\hat{\alpha}})} \qquad \ldots(14)$$

طريقة الامكان الاعظم الضبابية (***Fuzzy Maximum liklihood Method***(***FML***)) : [18 ، 14، 15، 12,13]

لنفرض ان $x = (x_1, \ldots \ldots \ldots, x_n)$ قياسات عينة عشوائية بحجم n لها توزيع فريچت $Frechet\ Distribution$ بدالة كثافة احتمالية :

$$f(x,\alpha,\beta) = \alpha\beta^\alpha x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha\right) \;\; ; \;\; x > 0 \qquad \ldots(15)$$

وليكن $X = (X_1, \ldots \ldots, X_n)$ متجه عشوائي يمثل فضاء العينة ، فاذا كـــــان $x = (x_1, \ldots \ldots \ldots, x_n)$ من X يمثل متجع المشاهدات فانه يمكن الحصول على دالة الامكان الاعظم للبيانات الكاملة $Not\ Fuzzy$ كالاتي :

$$L(\alpha,\beta;x)=\prod_{i=1}^{n} f(x)=\alpha^{n}\beta^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right) \quad \ldots(16)$$

إذ أن x تكون مشاهدة بصورة واضحة ومتوفرة معلومات كاملة عنها ($Crisp\ Vector$).

والان لنعد مشكلة أن x غير مشاهدة بصورة واضحة ودقيقة ومتوفرة معلومات جزئية عنها في صيغة مجموعة ضبابية جزئية ($\boldsymbol{Fuzzy\ subset}$) بدالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ لها قياس بوريل. ، فان المشاهدة الضبابية $\tilde{x}$ يمكن ان تعبر عن المشاهدة الجزئية عن x من المتجه العشوائي X وان دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}$ تعد كتوزيع احتمالي يفسر القيود عن تلك المشاهدة الجزئية $\tilde{x}$.
ان المجموعة الضبابية $\tilde{x}$ يمكن وصفها بانها ناتجة عن خطوتين :

- ✓ x مسحوب من X
- ✓ المتجه المشاهد x بعد بمثل معلومات جزئية تشفر بصيغة $\mu_{\tilde{x}}(x)$

ويجب ان نلحظ في هذا الإنموذج ان الخطوة الاولى فقط تعد تجربة عشوائية ، اما الخطوة الثانية فتتضمن تجميع معلومات عن x ونمذجة تلك المعلومات كتوزيع احتمالي .
وان المعلومات عن x يمكن ان تتمثل بالتوزيع الاحتمالي الاتي :

$$\mu_{\tilde{x}}(x)=\mu_{\tilde{x}_1}(x)x\ldots\ldots\ldots\ldots x\mu_{\tilde{x}_n}(x) \quad \ldots(17)$$

فاذا كانت x معطاة ويفترض ان دالة انتماءها لها قياس بوريل فاننا يمكن ان نحسب احتمالها وفقاً الى تعريف الاحتمال الضبابي فيمكن الحصول على دالة الامكان الاعظم للبيانات الضبابية كالاتي:

$$L(\alpha,\beta;\tilde{x})=p(\tilde{x};\alpha,\beta)=\int f(\tilde{x};\alpha,\beta)\,\mu_{\tilde{x}}(x)dx \quad \ldots(18)$$

مادام متجه البيانات x هو تحويل من متجه عشوائي متماثل التوزيع ومستقل X ، ونفترض ان دالة الانتماء المشتركة قابلة للتحليل كما في (16) فان دالة الامكان الاعظم الضبابية لتوزيع فريچت الضبابي يمكن ان تكتب الصيغة الاتية :

$$L_0(\alpha,\beta;\tilde{x})=\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}\alpha\beta^{\alpha}x^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx$$

$$L_0(\alpha,\beta;\tilde{x})=\alpha^{n}\beta^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx$$

$$\boldsymbol{L^{*}=\log(L_0(\alpha,\beta;\tilde{x}))}$$

$$=nlog(\alpha)+n\alpha\log(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\log(\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx) \quad \ldots(19)$$

وان تقديرات الامكان الاعظم للمعالم α وβ يمكن ان نحصل عليها بتعظيم L^{*} والاشتقاق الجزئي بالنسبة للمعالم α وβ ومساواة النتيجة بالصفر كالاتي :

$$\frac{\partial L^{*}}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+nlog(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right).\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right).ln\left(\frac{\beta}{x}\right).(1).\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx+\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right).\mu_{\tilde{x}}(x)dx.(-1)\,ln(x)}{\int_0^{\infty}x^{-(\hat{\alpha}+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\hat{\alpha}}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}$$

$$=\frac{n}{\alpha}+nlog(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^{\infty}x^{-\alpha-1}\,x^{-1}(-\beta)^{\alpha}.ln\left(\frac{\beta}{x}\right)exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right).\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx-\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right).ln(x).\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx.}{\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}$$

$$=\frac{n}{\alpha}+nlog(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^{\infty}x^{-2\alpha-1}\,(-\beta)^{\alpha}.ln\left(\frac{\beta}{x}\right)exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right).\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx-\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right).ln(x).\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx.}{\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}$$

$$=\frac{n}{\boldsymbol{\alpha}}+nlog(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^{\infty}[(-x^{-2\alpha-1}(\beta)^{\alpha}.ln\left(\frac{\beta}{x}\right)-\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}.ln(x))exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right).\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx.]}{\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}$$

$$=\frac{n}{\hat{\alpha}}+nlog(\hat{\beta})-[\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^{\infty}\left[\left(x^{-(\hat{\alpha}+1)}.ln(x)+x^{-2\hat{\alpha}-1}(\hat{\beta})^{\hat{\alpha}}.ln\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)\right)exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}\right).\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx.\right]}{\int_0^{\infty}x^{-(\hat{\alpha}+1)}\,exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}]=0 \qquad ...(20)$$

والان نشتق بالنسبة للـ β وكالاتي:

$$L^{*}=\log(L_0(\alpha,\beta;\tilde{x}))$$
$$=nlog(\alpha)+n\alpha\log(\beta)+\sum\log(\int x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\beta^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx$$
$$\frac{\partial L^{*}}{\partial\beta}=\frac{n\alpha}{\beta}+\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\int x^{-\alpha-1}.(-x^{-\alpha})\,\alpha\beta^{\alpha-1}\exp(-\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\beta^{\alpha})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx+0}{\int x^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}$$

$$\frac{\partial L^{*}}{\partial\beta}=\frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^{\infty}x^{-\alpha-1}\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}exp(-\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\int_0^{\infty}x^{-(\hat{\alpha}+1)}\,exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}=0 \qquad ...(21)$$

ونلحظ من الصيغ (19) و (20) بانه ليس هنالك صيغة مغلقة للحل، لذلك سوف نبحث عن التكرار الرقمي لنحصل على مقدرات الامكان الاعظم وذلك باستخدام طريقة نيوتن رافسون $\boldsymbol{Newton\text{–}Raphson\ method}$ حتى نحصل على تقديرات الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha}_{fmle}$ و $\hat{\beta}_{fmle}$ وكالاتي :

ليكن $\theta=(\alpha,\beta)^{T}$ متجه المعالم ، فان عند الخطوة $(h+1)$ من عمليات التكرار يمكن الحصول على المعالم كالاتي :

$$\theta^{h+1}=\theta^{h}-\left[\frac{\partial^{2}L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\theta\partial\theta^{T}}\ \Big|_{\theta=\theta^{h}}\right]^{-1}.\left[\frac{\partial L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\theta}\ \Big|_{\theta=\theta^{h}}\right]$$

إذ أن :-

$$\frac{\partial L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}\frac{\partial L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\beta}\end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial^{2}L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\theta\partial\theta^{T}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\alpha^{2}} & \frac{\partial L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\alpha\partial\beta}\\ \frac{\partial L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\beta^{2}}\end{pmatrix}$$

أذ أن :

$$\frac{\partial L^{*2}}{\partial\alpha^{2}}=-\frac{n}{\alpha^{2}}-\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{\left(\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)}(\int_o^{\infty}\ln(x)^{2}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}+2\ln(x)\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)-ln\left(\frac{\beta}{x}\right)^{2}+$$
$$\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}ln\left(\frac{\beta}{x}\right)^{2}).(\,x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx)+$$
$$\frac{(\int_0^{\infty}\ln(x)+\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}ln\left(\frac{\beta}{x}\right)).(x^{-\alpha-1}\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx)^{2}}{\left(\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)^{2}}$$

$$\frac{\partial L^{*2}}{\partial\beta^{2}}=-\frac{n\alpha}{\beta^{2}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\alpha^{2}}{\beta^{2}}-\frac{\alpha}{\beta^{2}}-\frac{\alpha^{2}}{\beta^{2}}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}).(\,x^{-\alpha-1}\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right))\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}+\frac{\int_0^{\infty}x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\left(\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)^{2}})$$

$$\frac{\partial L^{*2}}{\partial\alpha\partial\beta} = -\frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-\ln(x)\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{\beta}-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln(x)\frac{\alpha}{\beta}).(x^{-\alpha-1}\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right))\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{(\int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx)} + \frac{\int_0^{\infty} x^{-\alpha-1}\ln(x)\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)+x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} ln\left(\frac{\beta}{x}\right) exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx.\int_0^{\infty} x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta} exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\left(\int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)^2}\right)$$

ونستمر بعملية التكرار $\boldsymbol{Replication}$ حتى التقارب ، اي حتى يكون $\left|\left|\theta^{h+1} - \theta^{h}\right|\right|$ اقل من ε بحيث ان $\varepsilon > 0$ وعدد صغير جدا .

طريقة العزوم الضبابية $\boldsymbol{Fuzzy\ Moments\ Method}$: [1,18 ، 14، 15، 12,13]

تعتمد طريقة العزوم على ايجاد k من عزوم المجتمع بدلالة k من المعلمات ، ثم مساواة عزم المجتمع بما يقابلها من عزوم العينة وبذلك نحصل على k معادلات (بعدد المعالم) وبحل المعادلات الناتجة نحصل على المقدرات المطلوبة .

ولكن لنعد مشكلة ان x غير مشاهدة بصورة واضحة ودقيقة ومتوفرة معلومات جزئية عنها في صيغة مجموعة ضبابية جزئية $(Fuzzy\ subset)$ بدالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ لها قياس بوريل $Borel\ measure$ فان طريقة العزوم يمكن ان تطبق كالاتي :

من المعروف ان العزم ذو المرتبة k لتوزيع فريجت $Frechet\ Distribution$ بدالة كثافة احتمالية كما في الصيغة رقم (4) كالاتي :

$$EX^{k} = \int_0^{\infty} X^{k} f(x)dx = \beta^{k}\,\Gamma(1 - \frac{k}{\alpha}) \quad ; k=1,2,3,\ldots \quad ; \alpha > k \qquad ..(22)$$

فان :

$$EX = \beta\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})$$

$$EX^{2} = \beta^{2}\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha})$$

تمثل عزوم المجتمع بعدد المعالم

وان :

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}_i)$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X^2/\tilde{x}_i)$$

تمثل عزوم العينة بعدد المعالم

وبمساواة عزوم المجتمع مع عزوم العينة نتتج لدينا المعادلتين الاتيتين :

$$\beta\Gamma(1\text{-}\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}_i) \qquad ...(23)$$

$$\beta^{2}\Gamma(1\text{-}\frac{2}{\alpha}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X^2/\tilde{x}_i) \qquad ...(24)$$

وطالما انه ليست هنالك صيغة مغلقة لحل المعادلتين (23) و (24) فاننا سوف نستعمل العمليات العددية التكرارية للحصول على تقديرات المعالم والتي يمكن ان توصف كالاتي :

1- لنفرض التقديرات الابتدائية لـ α و β ، هي α^{0} و β^{0} عندما $h = 0$
2- في التكرار رقم $(h + 1)$ نحسب اولاً :

$$E_{\alpha^{(h)},\beta^{(h)}}(X^r/\tilde{x}_i) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}\int x^{-(\alpha^{(h)}+1)+r}\exp(-\left(\frac{\beta^{(h)}}{x}\right)^{\alpha^{(h)}})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\alpha\beta^{\alpha}\int x^{-(\alpha^{(h)}+1)}\exp(-\left(\frac{\beta^{(h)}}{x}\right)^{\alpha^{(h)}})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}$$

$$E_{\alpha^{(h)},\beta^{(h)}}(X^r/\tilde{x}_i) = \frac{\int x^{-(\alpha^{(h)}+1)+r}\exp(-\left(\frac{\beta^{(h)}}{x}\right)^{\alpha^{(h)}})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\int x^{-(\alpha^{(h)}+1)}\exp(-\left(\frac{\beta^{(h)}}{x}\right)^{\alpha^{(h)}})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx} \;;\; r = 1,2 \qquad ...(25)$$

3- بالاستناد إلى المعادلات (22) و (23) ، نحل اولا بالنسبة للـ α لنحصل على المعادلة الاتية :

$$\frac{[\beta\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)]^2}{\beta^2\Gamma(1-\frac{2}{\alpha})} = \frac{[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}_i)]^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X^2/\tilde{x}_i)}$$

$$= \frac{\beta^2[\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)]^2}{\beta^2\Gamma(1-\frac{2}{\alpha})} = \frac{\frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}_i)]^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X^2/\tilde{x}_i)}$$

$$= \frac{[\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)]^2}{\Gamma(1-\frac{2}{\alpha})} = \frac{\frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}_i)]^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X^2/\tilde{x}_i)}$$

$$\alpha^{(h+1)} = \frac{[\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)]^2}{\Gamma(1-\frac{2}{\alpha})} = \frac{[\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha^{(h)},\beta^{(h)}}(X/\tilde{x}_i)]^2}{n\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha^{(h)},\beta^{(h)}}(X^2/\tilde{x}_i)} \qquad ...(26)$$

للحصول على الحل عند $\alpha^{(h+1)}$

4- نحل معادلة رقم (24) بالنسبة للـ β نحصل على :

$$\beta^{(h+1)} = \left[\frac{n[(\Gamma(1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(h+1)})}{\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha^{(h)},\beta^{(h)}}(X/\tilde{x}_i)}\right]^{\alpha^{(h+1)}} \qquad ...(27)$$

نضع $h = h + 1$ ، ونكرر الخطوة (2) و (4) الى ان يحصل التقارب بين التقديرات لنحصل على تقديرات طريقة العزوم $\hat{\alpha}_{MOM}$ و $\hat{\beta}_{MOM}$

الجانب التجريبي (المحاكاة): *Simulation*

وصف تجربة المحاكاة: *Describe of simulation experiment*

تم اعتماد اسلوب المحاكاة مونتي كارلو (*Simulation − Monte Carlo*) لغرض المقارنة بين طرائق التقدير لدالة المعولية لتوزيع فريجت *Frechet Distribution* وكذلك لتوضيح تأثير طرقة تقدير دالة المعولية الضبابية تجاه ما ياتي :

1- التغير في حجم العينة *Sample Size* .

2- التغيير في العلاقة بين معلمة الشـــــكل ($shape\ Parameter$) α و معلمة القياس ($Scale\ Parameter$) β.

وللحصول على تقديرات المعلوية الضبابية سيتم اولاً تقدير معالم توزيع فريجت α و β وفق الطرائق المذكورة في الفقرة (5.2) كالاتي :

- **اختيار احجام العينات *Sample Sizes*** :
  اختيرت عدة احجام عينات ($\boldsymbol{n = 10, 50, 100, 150, 500}$).
- **اختيار قيم افتراضية لمعلمات توزيع فريجت *Choosing Hypothesis Values of Parameters***:
  اختيرت عدة قيم افتراضية لمعلمة الشكل $\boldsymbol{\alpha}$ ومـــــعلمة القياس $\boldsymbol{\beta}$ لتوزيع فريجت وكما موضح في الجـــدول (1).

جدول (1) القيم الافتراضية(الاولية) لمعالم توزيع فريچت

$Parameter$	α	β	α	β	α	β
$value$	**0.50**	**0.50**	**0.5**	**0.1**	**3**	**1.5**

- توليد البيانات $\boldsymbol{Data\ generation}$:
- توليد متغير يتبع توزيعاً منتظماً $\mathbf{u\sim U(0,1)}$ بالاستعانة بالايعاز $Rand$
- توليد بيانات ضبابية تتبع توزيع فريچت بتطبيق طريقة التحويل المعكوس وباستعمال الصيغة الاتية:

$$t_i = \beta\left(Ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad ; \; i = 1,2,\dots\dots,n \qquad \dots(28)$$

والعينة العشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع $(i.i.d)$ متمثلة بالمتجه t من توزيع فريچت وتم تحويل متجه العينة t الى الضبابية باستعمال نظام المعلومات الضبابية الافتراضي $Fuzzy\ Hypothetical\ information\, system$ المبين في الشكل (5) المقابل لدوال الانتماء الاتية:

$$\mu_{\tilde{t}_1}(t) = \begin{cases} 1 & t \le 0.05 \\ \frac{0.25-t}{0.2} & 0.05 \le t \le 0.25 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_2}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.05}{0.2} & 0.05 \le t \le 0.25 \\ \frac{0.5-t}{0.25} & 0.25 \le t \le 0.5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_3}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.25}{0.25} & 0.25 \le t \le 0.5 \\ \frac{0.75-t}{0.25} & 0.5 \le t \le 0.75 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_4}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.5}{0.25} & 0.5 \le t \le 0.75 \\ \frac{1-t}{0.25} & 0.75 \le t \le 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

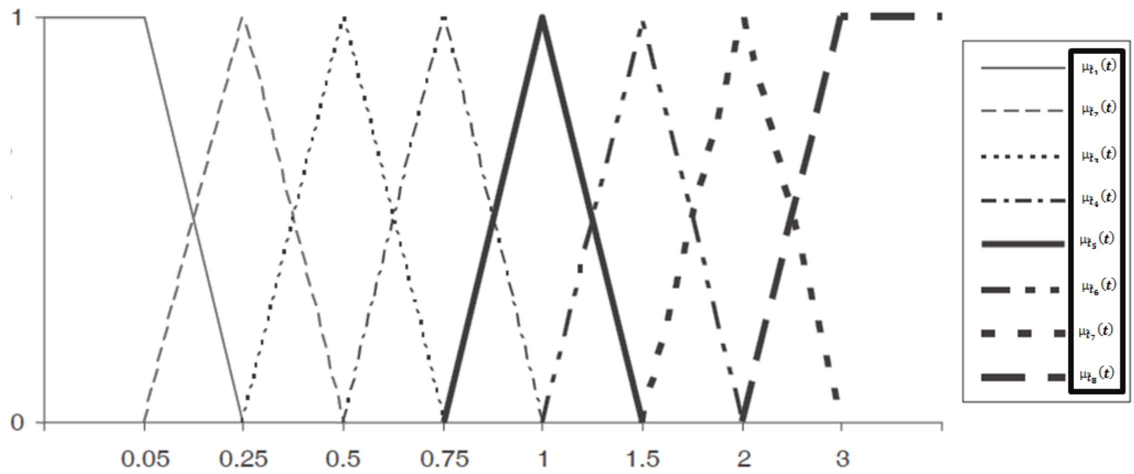
$$\mu_{\tilde{t}_5}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.75}{0.25} & 0.75 \le t \le 1 \\ \frac{1.5-t}{0.5} & 1 \le t \le 1.5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_6}(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{0.5} & 1 \le t \le 1.5 \\ \frac{2-t}{0.5} & 1.5 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$0 \qquad o.w$$

$$\mu_{\tilde{t}_7}(t) = \begin{cases} \frac{t-1.5}{0.5} & 1 \le t \le 1.5 \\ 3-t & 2 \le t \le 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_8}(t) = \begin{cases} t-2 & 2 \le t \le 3 \\ 1 & t \ge 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$



شكل (5) نظام المعلومات الضبابية الافتراضي المستخدم في تضبيب بيانات المحاكاة

- اســــــتخدمت خـــــــوارزمية تكرارية تعتمد عـــلى طــــــــريقة $(Tierney\ and\ Kandane's\ approximation\ T\&k)$ للحصول على تقديرات بيز ، ولحســـاب مقدرات بيز ، سنفترض بان α و β لها توزيع اولي كاما $\alpha \sim gamma(a,b), \beta \sim gamma(c,d)$ ، وسنفترض بان التوزيعات الاولية للمعالم غير كاملة المعلومات $(Non\ Informative)$ ، اقترح $Press(2011)$ استعمال قيم غير سالبة صغيرة جدا للمعالم الفوقية في التوزيع الاولي ، لذلك ســنفترض $a=b=c=d=0.0001$ وبحجوم العينات المفترضة، و بتكرار (1000) مرة لكل تجربة محاكاة لغرض الحصول على اكبر تجانس $Homogenous$ في تقدير دالة المعولية لتوزيع فريچت وقد نفذت تجارب المحاكاة باستعمال لغة البرمجة $Matlab$.
- تم توليد قيم دالة المعولية الضبابية باستعمال الصيغة الاتية :

$$\tilde{R}(t_i) = 1 - exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}}{\tilde{t}_i}\right)^{\hat{\alpha}}\right) \; ; i = 1,2, \dots \dots , n \qquad \dots(29)$$

- بعد توليد القيم العشوائية الضبابية $(\tilde{t}_i)$ من دالة CDF طبقاً الى احجام عينات معلومة وقيم افتراضية للمعلمات(اولية) حسب الصيغة (27)، تم تعويض قيم $(\tilde{t}_i)$ والمعلمات الاولية حسب دوال الانتماء $\mu_{\tilde{t}_i}(t)$ المقابلة لكل مشاهدة عشوائية $(\tilde{t}_i)$ في دالة المعولية الضبابية في الصيغة (28) لاستخراج $\tilde{R}(t_i)$ لكل مشاهدة ضبابية ومن ثم استخراج التوقع لكل الـ $\tilde{R}(t_i)$ كما يأتي :

$$\tilde{R}(t) = \hat{E}(\tilde{R}(t_i)/\tilde{x}_i) = \frac{1}{K}\sum_{h=1}^{K} R^{(h)}(t) \qquad \dots(30)$$

اذا ان :

K يمثل عدد مرات تكرار التجربة

h القيمة الاولية للتكرار ($Initial\ Value$) ، بحيث ان $h = 0,1,2, \ldots .. K$

- مقارنة نتائج المحاكاة : تتم مقارنة نتائج المحاكاة باستعمال المقاييس الاحصائية الاتية :
- متوسط مربعات الخطأ $\boldsymbol{Mean\ Square\ error}$:

$$\mathrm{MSE}(\tilde{\mathrm{R}}) = \frac{1}{\mathrm{K}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{K}}(\tilde{\mathrm{R}} - \mathrm{R})^2 \qquad \ldots(31)$$

تمثل $\mathbf{K}$ عدد التكرارات $\boldsymbol{Replication}$ لكل تجربة .

- متوسط الخطأ النسبي المطلق($\boldsymbol{Mean\ Absolut\ Proportional\ Error}$) :

$$MAPE(\tilde{R}) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\tilde{R}-R}{R}\right| \qquad \ldots(32)$$

تمثل $\mathbf{K}$ عدد التكرارات ($\boldsymbol{Replication}$) لكل تجربة.

وقد تم الحصول على نتائج المحاكاة باستخدام برنامج (Matlab 2015) وكما هو مبين في الملحق (برنامج المحاكاة) وعرضت جميع النتائج في جداول خاصة سنبينها لاحقاً.

تحليل نتائج المحاكاة: $\boldsymbol{Analysis\ of\ Simulation\ Result}$

ان الطريقة المستعملة في ايجاد تقدير للمعولية الضبابية هي طريقة بيز الضبابية $Fuzzy\ Bays\ Method$

وسيتم عرض وتحليل نتائج تجارب المحاكاة وفق الجداول(2) الى (4)

جدول (2)

يبين متوسط مربعات الخطا $\boldsymbol{MSE}$ ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $\boldsymbol{MAPE}$ لمعالم توزيع فريچت $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ والمعولية الضبابية $\tilde{\mathbf{R}}$ المقدرة بطريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم عند حجوم عينات $\mathbf{n} = (\mathbf{10, 50, 100, 150, 500})$ وللقيم الحقيقية للمعولية المقابلة لكل حجم عينة (0.652 ,0.612,0.644,0.635,0.600) ولقيم اولية لمعالم توزيع فريچت $\boldsymbol{\alpha} = 0.5$, $\boldsymbol{\beta} = 0.5$

n	$Meth$	Results				Best
			$Estimate$	MSE	$MAPE$	
10	FML	$\hat{\alpha}$	0.665352	0.004675	0.330703	$FMom$
		$\hat{\beta}$	0.351727	0.004442	0.297344	
		$\tilde{R}$	0.602032	0.026839	1.395128	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.307211	0.505339	8.072106	
		$\hat{\beta}$	1.077277	0.201901	5.772765	
		$\tilde{R}$	0.838539	0.025090	2.159822	
50	FML	$\hat{\alpha}$	0.717622	0.001013	0.087049	FML
		$\hat{\beta}$	0.413690	0.000185	0.034524	
		$\tilde{R}$	0.660551	0.001221	0.449476	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.319632	0.091154	1.639264	
		$\hat{\beta}$	0.915648	0.024820	0.831296	
		$\tilde{R}$	0.826963	0.019814	1.818289	
100	FML	$\hat{\alpha}$	0.687524	0.000386	0.037505	FML
		$\hat{\beta}$	0.401543	0.000126	0.019691	
		$\tilde{R}$	0.674039	0.001568	0.459365	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.288222	0.051476	0.788222	
		$\hat{\beta}$	0.909963	0.013227	0.409963	
		$\tilde{R}$	0.817459	0.017843	1.554985	
150	FML	$\hat{\alpha}$	0.696143	0.000264	0.026152	FML
		$\hat{\beta}$	0.417060	0.000047	0.011059	
		$\tilde{R}$	0.675177	0.000671	0.363850	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.396835	0.036644	0.597890	
		$\hat{\beta}$	1.010780	0.010984	0.340520	
		$\tilde{R}$	0.842062	0.024414	2.055108	
500	FML	$\hat{\alpha}$	0.693670	0.000076	0.007747	FML
		$\hat{\beta}$	0.407790	0.000018	0.003688	
		$\tilde{R}$	0.675183	0.000887	0.408905	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.251825	0.009561	0.150365	
		$\hat{\beta}$	0.988779	0.003042	0.097756	
		$\tilde{R}$	0.832662	0.018518	1.829297	

يتضح من الجدول (2) وللقيم الاولية $\alpha = 0.5 , \beta = 0.5$ من خلال المقارنة بمقياس متوسط مربعات الخطأ MSE ومعيار متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ ولاحجام عينات مختلفة كما يلي :

- عند حجم عينة $n = 10$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.838539$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة العزوم الضبابية $\hat{\alpha} = 0.838539$ و $\hat{\beta} = 1.077277$ عند مقياس متوسط مربعات الخـــــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.025090$ ومتوسط مربعات الخــــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 2.159822$.
- عند حجم عينة $n = 50$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.660551$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha} = 0.717622$ و $\hat{\beta} = 0.413690$ عند مقياس متوسط مربعات الخطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.001221$ ومتوسط مربعات الخــــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.449476$.
- عند حجم عينة $n = 100$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.674039$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha} = 0.687524$ و $\hat{\beta} = 0.401543$ عند مقياس متوسط مربعات الخــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.001568$ ومتوسط مربعات الخــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.459365$.

- عند حجم عينة $n = 150$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.675177$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha} = 0.696143$ و $\hat{\beta} = 0.417060$ عند مقياس متوسط مربعات الخـــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000671$ ومتوسط مربعات الخـطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.363850$.
- عند حجم عينة $n = 500$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.675183$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة الامكان الاعـــظم الضبابية $\hat{\alpha} = 0.693670$ و $\hat{\beta} = 0.407790$ عند مقياس متوسط مربعات الخـطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000887$ ومتوسط مربعات الخـطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.408905$.

يتضح من ذلك ان افضل قيمة تقديرية للمعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.675183$ عند المـــعالم و $\hat{\beta} = 0.407790$ المقدرة بطـــريقة الامكان الاعـــظم الضبابية عند مقياس متوسط مربعات الخـطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000887$ ومتوسط مربعات الخـطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.408905$ عند حجم عينة $n = 500$ ، حيث نلحظ ان القيم التقديرية للمعالم متوافقة مع القيم الافتراضية وكذلك المعولية الضبابية المقدرة متوافقة مع المعولية الحقيقية.

جدول (3)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ لمعالم توزيع فريچت α وβ والمعولية الضبابية $\tilde{R}$ المقدرة بطريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم عند حجوم عينات $\mathbf{n} = (10, 50, 100, 150, 500)$ وللقيم الحقيقية للمعولية المقابلة لكل حجم عينة (0.635، 0.606، 0.611,0.600,0.602) ولقيم اولية لمعالم توزيع فريچت $\alpha = 0.5 , \beta = 1$

n	$Meth$	Results				$Best$
			$Estimate$	MSE	$MAPE$	
10	FML	$\hat{\alpha}$	**0.480387**	0.000066	0.039764	FML
		$\hat{\beta}$	**0.948387**	0.000290	0.051613	
		$\tilde{R}$	**0.680231**	**0.000084**	**0.124583**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.307211	0.505339	8.072106	
		$\hat{\beta}$	1.577277	0.201901	2.886383	
		$\tilde{R}$	0.777886	0.010014	1.319991	
50	FML	$\hat{\alpha}$	0.497147	0.000001	0.001169	FML
		$\hat{\beta}$	0.948844	0.000058	0.010231	
		$\tilde{R}$	0.696751	0.000075	0.115406	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.319632	0.091154	1.639264	
		$\hat{\beta}$	1.415648	0.024820	0.415648	
		$\tilde{R}$	0.781298	0.008514	1.163879	
100	FML	$\hat{\alpha}$	0.497423	0.000001	0.000526	FML
		$\hat{\beta}$	0.953799	0.000023	0.004620	
		$\tilde{R}$	0.690411	0.000060	0.105657	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.288222	0.051476	0.788222	
		$\hat{\beta}$	1.409963	0.013227	0.204982	
		$\tilde{R}$	0.778478	0.008130	1.005377	
150	FML	$\hat{\alpha}$	0.497686	0.000001	0.000309	FML
		$\hat{\beta}$	0.954672	0.000014	0.003022	
		$\tilde{R}$	0.691585	0.000055	0.103434	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.396835	0.036644	0.597890	
		$\hat{\beta}$	1.510780	0.010984	0.170260	
		$\tilde{R}$	0.791016	0.010385	1.323943	
500	FML	$\hat{\alpha}$	0.498290	0.000001	0.000068	FML
		$\hat{\beta}$	0.953149	0.000004	0.000937	
		$\tilde{R}$	0.694683	0.000055	0.105597	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.433729	0.011676	0.186746	
		$\hat{\beta}$	1.631410	0.004452	0.063141	
		$\tilde{R}$	0.812374	0.013517	1.582401	

يتضح من الجدول (3) وللقيم الاولية $\alpha = 0.5 , \beta = 1$ من خلال المقارنة بمقياس متوسط مربعات الخطأ MSE ومعيار متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ ولاحجام عينات مختلفة كما يلي :

- عند حجم عينة $n = 10$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.680231$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة الامكان الاعـــظم الضبابية $\hat{\alpha} = 0.480387$ و $\hat{\beta} = 0.948387$ عند مقياس متوســـــط مربعات الخــــــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000084$ ومتوسط مربعات الخطأ النســــبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.124583$.
- عند حجم عينة $n = 50$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.709575$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة بيز الضبابية $\hat{\alpha} = 0.522001$ و $\hat{\beta} = 1.017313$ عند مقياس متوسط مربعات الخـــــــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000019$ ومتوسط مربعات الخـــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.055026$.
- عند حجم عينة $n = 100$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.690411$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha} = 0.497423$ و $\hat{\beta} = 0.953799$ عند مقياس متوسط مربعات الخـــــــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000060$ ومتوسط مربعات الخـــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.105657$.
- عند حجم عينة $n = 150$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.691585$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha} = 0.497686$ و $\hat{\beta} = 0.954672$ عند مقياس متوســـــط مربعات الخــــــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000055$ ومتوسط مربعات الخــــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.103434$.
- عند حجم عينة $n = 500$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.694683$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة الامكان الاعـــظم الضبابية $\hat{\alpha} = 0.498290$ و $\hat{\beta} = 0.953149$ عند مقياس متوسط مربعات الخــــــــــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000055$ ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.1055$

يتضح من ذلك ان افضل قيمة تقديرية للمعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.694683$ عند المعالم $\hat{\alpha} = 0.498290$ و $\hat{\beta} = 0.953149$ المقدرة بطريقة الامكان الاعـــظم الضبابية عند مقياس متوسط مربعات الخطأ $MSE(\tilde{R}) =$ ومتوسط مربعات الخــــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.105597$ عند حجم عينة $n = 500$ ، حيث نلحظ ان القيم التقديرية للمعالم متوافقة جدا مع القيم الافتراضية وكذلك المعولية الضبابية المقدرة متوافقة جداً مع المعولية الحقيقية.

جدول (4)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ لمعالم توزيع فريچت α و β والمعولية الضبابية $\widetilde{\mathrm{R}}$ المقدرة بطريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز عند حجوم عينات $\mathbf{n} = (\mathbf{10}, \mathbf{50}, \mathbf{100}, \mathbf{150}, \mathbf{500})$ وللقيم الحقيقية للمعولية المقابلة لكل حجم عينة (0.625، 0.615، 0.610,0.621,0.611) على التوالي ولقيم اولية لمعالم توزيع فريچت $\boldsymbol{\alpha} = 3$, $\boldsymbol{\beta} = 1.5$

n	$Meth$	Results				$Best$
			$Estimate$	MSE	$MAPE$	
10	FML	$\hat{\alpha}$	**4.126603**	1.901033	0.715382	FML
		$\hat{\beta}$	**1.516144**	0.000408	0.021045	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	**0.720009**	**0.006451**	**0.572082**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	4.237250	1.198007	2.062084	
		$\hat{\beta}$	2.021419	0.187580	1.738063	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	0.894863	0.051628	2.982200	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	0.763099	0.005826	0.944809	
50	FML	$\hat{\alpha}$	**1.737244**	0.045941	0.084184	FML
		$\hat{\beta}$	**1.485000**	0.000007	0.002000	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	**0.661024**	**0.000807**	**0.315486**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	5.049752	0.498408	0.683251	
		$\hat{\beta}$	1.771227	0.009867	0.180818	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	0.873842	0.031590	2.327212	
100	FML	$\hat{\alpha}$	**1.365807**	0.027679	0.054473	FML
		$\hat{\beta}$	**1.480702**	0.000004	0.001287	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	**0.662719**	**0.001325**	**0.487208**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	5.943141	0.455618	0.490523	
		$\hat{\beta}$	2.143616	0.022732	0.214539	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	0.975926	0.077244	3.939874	
150	FML	$\hat{\alpha}$	**1.594286**	0.013480	0.031238	FML
		$\hat{\beta}$	**1.483521**	0.000002	0.000732	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	**0.669127**	**0.000913**	**0.426236**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	5.124926	0.206088	0.236103	
		$\hat{\beta}$	1.939811	0.009890	0.097736	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	0.900454	0.045900	2.732092	
500	FML	$\hat{\alpha}$	**2.679334**	0.000206	0.002138	FML
		$\hat{\beta}$	**1.499752**	0.0000011	0.0000011	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	**0.699173**	**0.000019**	**0.061746**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	4.951076	0.050466	0.065036	
		$\hat{\beta}$	1.884368	0.002012	0.025625	
		$\widetilde{\mathrm{R}}$	0.898887	0.044794	2.809520	

يتضح من الجدول (4) وللقيم الاولية $\alpha = 3, \beta = 1.5$ من خلال المقارنة بمقياس متوسط مربعات الخطأ MSE ومعيار متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ ولاحجام عينات مختلفة كما يلي :

- عند حجم عينة $n = 10$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.720009$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــــريقة الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha} = 4.126603$ و $\hat{\beta} = 1.516144$ عند مقياس متوسط مربعات الخطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.006451$ ومتوســـط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.572082$.
- عند حجم عينة $n = 50$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.661024$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــــــريقة الامكان الاعظم الضـــــبابية $\hat{\alpha} = 1.737244$ و $\hat{\beta} = 1.485000$ عند مقياس متوسط مربعات الخـــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000807$ ومتوسط مربعات الخـــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.315486$.
- عند حجم عينة $n = 100$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.662719$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطريقة الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha} = 1.365807$ و $\hat{\beta} = 1.483521$ عند مقياس متوسط مربعات الخــــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.001325$ ومتوسط مربعات الخــــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.487208$.
- عند حجم عينة $n = 150$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.669127$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطريقة الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha} = 1.594286$ و $\hat{\beta} = 1.507026$ عند مقياس متوسط مربعات الخــــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000913$ ومتوسط مربعات الخـــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.426236$.
- عند حجم عينة $n = 500$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.699173$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطريقة الامكان الاعظم الضبابية $\hat{\alpha} = 2.679334$ و $\hat{\beta} = 1.499752$ عند مقياس متوسط مربعات الخــــطأ $MSE(\tilde{R}) = 0.000002$ ومتوسط مربعات الخـــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.061746$.

يتضح من ذلك ان افضل قيمة تقديرية للمعولية الضبابية $\tilde{R} = 0.699173$ عند المعالم $\hat{\alpha} = 2.679334$ و $\hat{\beta} = 1.499752$ المقدرة بطريقة الامكان الاعظم الضبابية عند مقياس متوسط مربعات الخـــطأ $MSE(\tilde{R}) =$ ومتوسط مربعات الخـــطأ النسبي المطلق $MAPE(\tilde{R}) = 0.061746$ عند حجم عينة $n = 500$ ، حيث نلحظ ان القيم التقديرية للمعالم متوافقة مع القيم الافتراضية وكذلك المعولية الضبابية المقدرة متوافقةً مع المعولية الحقيقية.

الاستنتاجات: *Conclusions*

1- طريقة الامكان الاعظم الضبابية تتفوق على طريقة العزوم الضبابية لكون مقدرات الامكان الاعظم تعطي اقل متوسط مربعات خطأ واقل متوسط مربعات خطأ نسبي.
2- ان قيمة المعولية الضبابية المقدرة بطريقة الامكان الاعظم افضل من قيمة المعولية الحقيقية.

التوصيات: *Recommendations*

في ضوء ما توصل اليه الباحث في هذا البحث من استنتاجات نوصي بالاتي:

1. لوجود الكثير من الظواهر في العالم المادي الحقيقي تمتلك عدم دقة، لذلك نوصي بالتوسع باستعمال المنطق الضبابي لانه يعد كحل لمشكلة عدم الدقة في القياسات ويعطي نتائج ادق فيما لو كانت البيانات ضبابية.
2. التوسع في استعمال طرائق اخرى للتقدير مثل طريقة العزوم الكـــمية الخطية **LQ – Moment** وطريقة المربعات الصغرى ***Least square method*** وطريقة المقدرات التجزيئية ***Method of Percentiles Estimators*** وطرائق اخرى في ايجاد تقديرات لمعالم التوزيع الاحتمالي في حالة كون بيانات الحياة ضبابية.
3. استعمال طرائق التقدير الضبابية في توزيع ازمنة حياة اخرى غير توزيع فريچت الاحتمالي.
4. الاعتماد على مؤشرات اخرى لتقليل او تخفيض حالة عدم الدقة مثل مقياس ***Renyi entropy*** او ***Shann entropy*** وغيرها.

References المصادر

1 A. Ibrahim, Nathier & A. Mohammed, Hussein, (2017), "Parameters and Reliability Estimation for the Fuzzy Exponential Distribution", American Journal of Mathematics and Statistics, 7(4): 143-151

2 Abbas, Kamran & Yincai, Tang, (2012), "Comparison of Estimation Methods for Frechet Distribution with Known Shape", Caspian Journal of Applied Sciences Research, 1(10), pp. 58-64, ISSN: 2251-9114, CJASR

3 Al-nasser.Abdul majeed hamza, (2009),"An introduction to statistical reliability", Ithraa publishing and distribution

4 Buckley, James J., (2006), "Fuzzy Probability and Statistics", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 1-49

5 Chen, Guanrong; Tat, Trung, (2000), "Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems", Boca Raton London New York Washington, D.C.CRC Press

6 Denoeux, Thierry, (2011), "Maximum likelihood estimation from fuzzy data using the EM algorithm", Fuzzy Sets and Systems, 183, pp. 72–91

7 Felipe R. S. de Gusmão ; Edwin M. M. Ortega ; Gauss M. Cordeiro, (2011), " The generalized inverse Weibull distribution" , Stat Papers (Springer 2011 52, pp. 591–619

8 Harish Garg, S.P. Sharma and Monica Rani, (2013)," Weibull fuzzy probability distribution for analyzing the behaviour of pulping unit in a paper industry" . Int. J. Industrial and Systems Engineering, Vol. 14, No. 4 , pp 395-413

9 Huang , Hong-Zhong; Zuo Ming J.; and Sun Zhan-Quan, (2006), "Bayesian reliability analysis for fuzzy lifetime data", Fuzzy Sets and Systems 157, 1674 – 1686

10 Kwang H. Lee, (2004) , " First Course on Fuzzy Theory and Applications" , ISSN 16-15-3871, ISBN 3-540-22988-4 Springer ,Berlin Heidelberg NewYork, ppt:1-20

11 M. SHUAIB KHAN; PASHA G.R; AHMED HESHAM PASHA, (2008), "Theoretical Analysis of Inverse Weibull Distribution", WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS, Issue 2, Volume 7, pp. 30-38

12 Pak ,Abbas ; (2016)," Inference for the Shape Parameter of Lognormal Distribution in Presence of Fuzzy Data " Pak.j.stat.oper.res. Vol.XII No.1, pp. 89-99

13 Pak ,Abbas ; (2017)," Statistical inference for the parameter of Lindley distribution based on fuzzy data" Brazilian Journal of Probability and Statistics, Vol. 31, No. 3, 502–515

14 Pak, Abbas; Ali, Gholam & Saraj, Mansour, (2013), "Inference for the Weibull Distribution Based on Fuzzy Data", Int J Syst Assur Eng Manag, vol.: 36, no. 2, pp. 339 - 358

15 Pak, Abbas; Ali, Gholam & Saraj, Mansour, (2013), "Reliability estimation in Rayleigh distribution based on fuzzy lifetime data", Int J Syst Assur Eng Manag, springer , DOI 10.1007/s13198-013-0190-5

16 Peter ter Berg, (2009) , " Unification of Frechet and Weibull Distribution " , DNB Working Paper, No.198/pp. 1-13

17 Tao ,Terence ,(2011), "An Introduction to Measure Theory", the American Mathematical Society (AMS), pp. 77-89

18 Torabi, H. & Mirhosseini S. M., (2009), " The Most Powerful Tests for Fuzzy Hypotheses Testing with Vague Data" , Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, 2009, no. 33,pp. 1619 – 1633

19 Wu, Hsien-Chung, (2004), "Fuzzy reliability estimation using Bayesian approach", Computers & Industrial Engineering, 46, pp. 467–493

20 Zadeh L. A. (1972),"A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges" , Journal of Cybernetics, 2:3, 4-34.

21 Zadeh L. A. (1975), " The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approxirqate Reasoning-III*", NFORMATIONSCIENCES9, 43-80.

22 Zadeh, L. A., (1965), "Fuzzy Sets", Information and control, Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley ,California ,8, 338-353

23 Zadeh, L. A., (1968), "Fuzzy Algorithms", Information and control, 12, 94-102

24 Zadeh, L., A., (1968), "Probability Measures of Fuzzy Events", Journal of Mathematical analysis and applications 23, 421-428.