Comparing Between the method of Moments and The method of Maximum Likelihood For estimating the reliability function of Weibull distribution under observation data using simulation

مقارنة بين طريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم لتقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل في ظل بيانات مراقبة باستخدام المحاكاة

أ.د.عبد الحسين حسن حبيب الطائي اسامة عبد العزيز كاظم القريشي

قسم الاحصاء/كلية الادارة والاقتصاد

بحث مستل من رسالة ماجستير في الاحصاء

المستخلص:

يهدف البحث الى تقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل ($Weibull\ Distribution$) في ظل بيانات مراقبة من النوع الثاني ($Type - \mathrm{II} - Censord\ Data$) باستخدام طريقة الامكان الاعظم ($Maximum\ Likelihood\ Method$)وطريقة العزوم($Moments\ Method$) والمقارنة بينهما بغية التوصل الى افضل طريقة تقدير دالة المعولية بالاعتماد على المؤشر الاحصائي متوسط مربعات الخطا(MSE)،مستخدمين حجوم عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة) ،ووظف اسلوب المحاكاة ($Simulation$) بطريقة مونت كارلو ($Mont - Carlo$) لتوليد المشاهدات ،وتوصل الباحث الى افضلية طريقة الامكان الاعظم مقارنة مع طريقة العزوم .

Abstract

The Paper Deals With Comparing Method Of Moments and Method Of Maximum Likelihood , in Estimating Reliability Function Of Two Parameter Weibull Distribution, in Case Of Censored Type Two.All The Derivation Required are explained , and The estimators are explainend by Tabels as well as mean square error.

المقدمة- Introduction

نتيجة التطورالسريع في التكنولوجيا والانتشار الواسع للصناعة واستخدامها في مختلف مجالات الحياة كالطب وبحوث الفضاء والاتصالات ....وغيرها من المجالات الاخرى وكثرة تعقيداتها الالكترونية والميكانيكية والكهربائية جاء الاهتمام بالمعولية وظهرت فكرتها في نهاية الاربعينيات مع بداية الحرب العالمية الثانية بسبب ازدياد المعدات الحربية المعقدة وكمحاولة لحل مشكلة الفشل في المعدات ، وتاتي اهمية المعولية من خلال عدة سمات ومنها التنبؤ بالعد الكلي للمكائن العاطلة والعاملة في اي وقت الامر الذي يمكن لمتخذي القرار من وضع خطط مستقبلية لادارة العمل بصورة صحيحة وايجابية وتفادي المشاكل في العمل وبالتالي يؤدي ذلك الى تحقق السمعة الجيدة لاي مصنع او شركة وزيادة المبيعات وتحقيق ارباح اكثر.

يمكن تحقيق المعولية في المنتجات الصناعية من خلال مراعاة البساطة في تصميم منتجات الصناعية واستخدام مكونات عالية الموثوقية ،اتباع طرق تصنيعية تم التاكد منها مسبقا ، بناء نظام تحذيري للمنتج مثل اصدار اصوات الانذار وغيرها من الامور الاخرى.

وفي الاونة الاخيرة نشرت الكثير من البحوث عن تقديرات دالة المعولية وباستخدام طرائق مختلفة وتوزيعات فشل مختلفة.

2- مشكلة البحث Research Problem

تعاني الكثير من الالات (الاجهزة) بانواعها المختلفة ، من حالات الفشل ، نتيجة للعطلات المفاجئة والاسنادية ، مما يؤثر ذلك على معولية تلك الالات (الاجهزة) ولابد من تقديردقيق للمعولية ،من اجل تقدير متوسط وتباين وقت الاشتغال لحين الفشل لانها مؤشرات جيدة جدا على متابعة الاعمال في الورش والمصانع ،ومن هنا ارتأى الباحث العمل على تقدير المعولية لتوزيع الفشل في حالة بيانات مراقبة من النوع الثاني (والتي نقصد بها بيانات مراقبة سير الانتاج وتحديد عدد الوحدات الفاشلة).

3-هدف البحث Research Purpose

يهدف البحث الى دراسة وتقدير دالة المعولية لبيانات مراقبة من النوع الثاني تخضع لتوزيع ويبل عن طريق بعض طرائق التقدير،واختيار افضل طريقة من طرائق التقدير اعتمادا على متوسط مربعات الخطأ.

4-دالة المعولية Reliability function R(t) [3]،[5]

وهي احتمال ان الالة (الجهاز) يستمر في العمل بنجاح (بدون فشل) خلال مدة زمنية معينة (0,t) اي انه تبقى الالة فعالة بعد مرور الوقت t، (t≥ 0) والتعبير الرياضي لها هو :

$$R(t) = pr\,(T > t\,) = 1 - Pr(\mathrm{T} \leq \mathrm{t}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$= 1 - \int_0^t f(u)du$$

$$= 1 - F(t)$$

(t) : وقت الاشتغال وهو اكبر او يساوي صفر.

(T) : الزمن المتراكم لحياة جهاز معين خلال المدة $(0,t)$.

$F(t)$: دالة اللامعولية (دالة الكثافة التجميعية للاخفاق).

وتمتلك الدالة المعولية عدة خصائص منها:

- هي قيمة محصورة بين صفر(0)والواحد الصحيح(1) لكونها دالة احتمالية ، وبمعنى رياضي يمكن كتابتها بالشكل الاتي:

$$.(0 \leq R(t) \leq 1)$$

- دالة رتيبة متناقصة مع الزمن (تتناسب عكسيا مع الزمن) حيث كلما تقدم زمن عمل الالة قلت قيمة الدالة المعولية وبعبارة اخرى ان

$$R(t_1) > R(t_2) > R(t_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.R(t_\infty)$$

5- التقدير $\boldsymbol{Estimation}$ [2]

ان عملية التقدير (Estimation) لاي مجتمع قيد الدراسة تكون من خلال اخذ عينة من ذلك المجتمع بحيث تمثل نفس خصائص المجتمع او قريبة منه،وتعتبر عملية التقدير احدى الركائز الاساسية في الاستدلال الاحصائي (Statistical Inference) وبواسطته تتم عملية الاستنتاجات حول مجتمع الدراسة على اساس النتائج المستخرجة من العينة المختارة من المجتمع.

وان تقدير دالة المعولية لبيانات مراقبة من النوع الثاني يتطلب توضيح المفهوم الاتي:

6-بيانات مراقبة من النوع الثاني type -II-censored Data [8]

يسمى هذا النوع من البيانات ببيانات مراقبة الفشل($Failur\ censored\ Data$)،يتم في هذا النوع من البيانات بتحديد عدد معين مسبقا من وحدات العينة التي يتم مراقبتها (r) الوحدات الثابتة وعليه فان زمن هذه الوحدات (t_r) يكون متغير عشوائي لايمكن تحديده ، فعند البدء باختبار الحياة عند الزمن الصفري سوف نراقب (نشاهد) عمل الوحدات (r) ونوقف التجربة بعد الحصول على r من الوحدات الفاشلة التي حددت مسبقا ، اما الوحدات الباقية بعد الزمن t_r هي (n-r).

وان دالة الامكان الاعظم لهذا النوع من البيانات هو

$$L = \frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{m} f(t,\theta)[R(t_r)]^{n-r} \dots\dots\dots..(2\ )$$

اذ ان

$$0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \dots\dots. \le t_r$$

$f(t,\theta)$ دالة كثافة الفشل.

$R(t_r)$دالة المعولية عند الزمن t_r.

(n-r) عدد الوحدات المتبقية (غير الفاشلة) بعد توقف الاختبار عند الفشل للوحدة رقمr .

وهذه العينات غالبا ماتهتم بفحص الوحدات الغالية الثمن او تلك التي يكون فيها الفحص تدميري يؤدي الى تلف المشاهدة.

7-توزيع ويبل ذو المعلمتين للفشل [4]،[10]
Two-paramete Weibull Failure Distribution

يعتبر توزيع ويبل (Weibull distribution) من افضل نماذج الفشل الذي يمكن ان يصف مراحل الفشل ظهر عام 1939 وسمي بهذا الاسم نسبة الى العالم Weibull السويدي ،حيث ظهر هذا التوزيع بعد الحرب العالمية الثانية احد نماذج الفشل واكثرها استخداما وشيوعا في دراسات المعولية لكونه احد النماذج التي تصف حالات الفشل المختلفة لاي جهازاذ يستخدم توزيع ويبل لوصف عطلات الكثير من المكائن والمعدات ذات طبيعة العمل الميكانيكي.

ان الدالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للمتغير العشوائي T يتوزع توزيع ويبل

$$f(t,\theta,\beta)=\frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1}\ exp^{-\frac{t^{\beta}}{\theta}} \ ....(3)$$

$$t>0\ ;\ \ \beta,\theta>0$$

اذ ان :

θ معلمة القياس (Scale parameter).

β معلمة الشكل ($shape\ parameter$).

وان العزم الرائي لتوزيع ويبل هو :

$$E(t^r)=\int_0^{\infty}t^r\ \frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1}\ e^{\frac{-t^{\beta}}{\theta}}\,dt$$

$$E(t^r)=\ \theta^{\frac{r}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{r}{\beta}+1\right)\ ....(4)$$

وعندما $r=1$ نحصل على العزم الاول M_1 والذي يمثل(Et)

$$M_{1=}\ E(t)=\theta^{\frac{1}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

وعند التعويض عن $r=2$ نحصل على العزم الثاني (Et^2) والذي هو:

$$M_2=E(t^2)=\theta^{\frac{2}{\beta}}\ \Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)$$

والتباين هو:

$$Var(t\,)=E(t^2)-[E(t)]^2$$

$$=\theta^{\frac{2}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}\right)-\Gamma^2\ \left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)\right]$$

اما دالة التوزيع (التراكمي) لتوزيع ويبل فيكون بالصيغة الاتية:

$$F(t)=\int_0^t\frac{\beta}{\theta}u^{\beta-1}\ exp\left[-\frac{u^{\beta}}{\theta}\right]du$$

$$F(t)=1-\ exp\left[-\frac{t^{\beta}}{\theta}\right]\ ....(5)$$

ودالة المعولية لتوزيع ويبل يتم حسابها من الصيغه اعلاه وكالاتي:

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$R(t) = exp\left[-\frac{t^{\beta}}{\theta}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

8- طرائق التقدير (Methods of Estimation)

يوجد العديد من طرائق تقدير معلمات ودالة المعولية له ، وسيتم توضيح بعض هذه الطرائق في حالة البيانات تحت المراقبة من النوع الثاني، ومن هذه الطرائق هي :

❖ **طريقة الامكان الاعظم(MLM) [7]،[9]**

(Maximum Likelihood Method)

تعتبر هذه الطريقة من طرائق التقدير المهمة والشائعة الاستخدام في التقدير ويعود سبب ذلك ان طريقة الامكان الاعظم تمتلك مجموعة من الخصائص الجيدة منها الكفاية والاتساق احيانا،والثبات ، وتكون اكثر دقة من الطرائق الاخرى خصوصا عند زيادة حجم العينة اذا انها تكون غير متحيزه عندما يكون حجم العينة كبيرا،وان هدف هذه الطريقة هو ايجاد قيم تقديرية للمعلمات التي نريد تقديرها بجعل دالة الامكان الاعظم للمتغيرات العشوائية اعظم مايمكن، ويرمز لدالة الامكان الاعظم بالرمز (L).

اذا كان المتغير العشوائي (T) يمتلك الدالة الكثافة الاحتمالية وكما في المعادلة رقم (5) فان دالة الامكان الاعظم للمتغيرات العشوائية المستقلة $T_1, T_2, \ldots .T_n$ هي :

$$L(T_1, T_2, \ldots, T_n, \beta, \theta) = f\left(t_1, \beta, \theta\right).\mathrm{f}(t_2, \beta, \theta) \ldots \mathrm{f}(t_n, \beta, \theta)$$

$$\therefore L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \beta, \theta)$$

وبما ان دالة الامكان الاعظم لبيانات مراقبة من النوع الثاني هي :

$$L = \frac{n!}{(n-r)} \prod_{i=1}^{r} f(t_i, \theta)\ \ [1 - F(t_r)]^{n-r}$$

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_r$$

(n) : حجم العينة

(r) : بيانات المراقبة الفاشلة

$(n-r)$: البيانات الباقية بعد الزمن t_r

t_i : زمن فشل الوحدة i

t_r : زمن فشل الوحدة الاخيرة (r)

وبما ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل هي :

$$f(t|\theta,\beta) = \frac{B}{\theta}\ t^{B-1}\, e^{\frac{-t^{B}}{\theta}} \qquad t > 0\,, \quad \mathrm{B} > 0 \quad ,\theta > 0$$

وبتعويض دالة الكثافة الاحتمالية ودالة المعولية لتوزيع ويبل في دالة الامكان الاعظم نحصل على المعادلة *(7)*:

$$L = \frac{n!}{(n-r)}\prod_{i=1}^{r}\frac{B}{\theta}\ {t_i}^{B-1}\, e^{\frac{-{t_i}^{B}}{\theta}} \quad [R(t_r)]^{n-r}. \dots\dots\dots (7)$$

وبتعويض عن الدالة المعولية وبفرض $k = \frac{n!}{(n-r)}$ نحصل على الاتي :

$$= K\left[(\tfrac{B}{\theta})^{r}\ \prod_{i=1}^{r}{t_i}^{B-1} \quad e^{\frac{-\sum_{i=1}^{r}{t_i}^{B}}{\theta}}\right]\left[e^{\frac{-{t_i}^{B}}{\theta}}\right]^{n-r}$$

$$L = K(\tfrac{B}{\theta})^{r}\prod_{i=1}^{r}{t_i}^{B-1}\ e^{\frac{-1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{r}{t_i}^{B} + (n-r){t_r}^{B}\right]} \dots\dots\dots\dots (8)$$

وباخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة نحصل على .

$$LogL = logK + rLog\beta - rLog\theta + (\beta-1)\ \sum_{i=1}^{r}Logt_i\ - \frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{r}{t_i}^{\beta} + (n-r){t_r}^{\beta}\right]$$

وباشتقاق المعادلة اعلاه اشتقاقا جزيئا بالنسبة لمعلمة القياس (θ) ومعلمة الشكل (β) وبمساواة المشتقة مع الصفر نحصل على مقدرات الامكان الاعظم لهما وكالاتي:

$$\frac{\partial LogL}{\partial\theta} = \frac{-r}{\theta} + \frac{1}{\theta^{2}}\left[\sum_{i=1}^{r}{t_i}^{B} + (n-r){t_r}^{B}\right] \dots\dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial B} = \frac{r}{B} + \sum_{i=1}^{r}Logt_i \quad - \frac{\sum_{i=1}^{r}{t_i}^{B}(1)Logt_i\ + (n-r){t_r}^{B}Logt_r}{\theta} \dots\dots (10)$$

نساوي كل مشتقة الى صفر وكالاتي:

$$\frac{\partial LogL}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial B} = 0$$

فان قيمة $(\hat{\theta})$ ستكون :

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{B}} + (n-r)t_r^{\hat{B}}}{r} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \;. \dots (11)$$

اما قيمة B ستكون :

$$0 = \frac{r}{\hat{B}} + \sum_{i=1}^{r} Logt_i - \frac{\sum_{i=1\; t_i^{\hat{B}}}^{r} Logt_i + (n-r)t_r^{\hat{B}}\, Logt_r}{\hat{\theta}}$$

وبتعويض قيمة $(\hat{\theta})$ في المعادلة اعلاه نحصل على

$$\sum_{i=1}^{r} Logt_i = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}} Logti + (n-r)t_r^{\hat{\beta}}\, Logt_r}{\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{B}} + (n-r)t_r^{\hat{B}}}{r}} - \frac{r}{\hat{B}}$$

وبتبسيط المعادلة اعلاه نحصل على

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} Logt_i = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{\beta}} Logti + (n-r)t_r^{\hat{\beta}}\, Logt_r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\hat{B}} + (n-r)t_r^{\hat{B}}} - \frac{1}{\hat{B}} \dots\dots\dots\dots\dots (12)$$

وعند حل المعادلة رقم *(12)* باحدى الطرق التكرارية مثل طريقة نيوتن رافسن او اي طريقة تكرارية مناسبة نستخرج قيمة $(\hat{\beta}_{MLE})$ ،ثم تعتمد قيمة $\hat{\beta}_{MLE}$ في المعادلة رقم *(11*) للحصول على $(\hat{\theta}_{MLE})$.

❖ طريقة العزوم (*MO*) (*Method of Moments*) [1]

تتصف هذه الطريقة بسهولتها فلذلك تعتبر من الطرائق الشائعة الاستخدام في حقل تقدير المعلمات ، وتتلخص فكرتها بتقدير عزوم المجتمع (*Mj*) المجهولة بواسطة العينة $(\widehat{M})$ المعلومة.

وبما ان معامل الاختلاف مستقل عن المعلمة (θ) اي انه يعتمد على المعلمة (β) وبذلك يمكن الاستفادة من معامل الاختلاف في تقدير المعلمة (β) وكالاتي :

بما ان العزم الاول لتوزيع ويبل هو:

$$M_1 = E(t^1) = \theta^{\frac{1}{B}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

والعزم المركزي الثاني لتوزيع ويبل هوحالة خاصة من العزم اللامركزي ،واذا كانت r=2 نحصل على العزم المركزي الثاني الذي يسمى التباين،

$$M_2 = E(t - Et)^2 = V(t) = \theta^{\frac{2}{\beta}}\left[\Gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}\right) - \Gamma^2\ \left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)\right]$$

وكذلك عزم العينة الاول هو :

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i}{r}$$

وعزم العينة الثاني هو :

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{r} {t_i}^2}{r}$$

ان معامل الاختلاف هو:

$$\because c.v = \frac{s}{\bar{t}}$$

وباخذ الجذر التربيعي

$$c.v = \sqrt[2]{\frac{s^2}{\bar{t}^2}} = \sqrt[2]{\frac{M_2}{{M_1}^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

وعلية يمكن الاستفادة من معامل الاختلاف بمساواة عزوم المجتمع لعزوم العينه بالشكل الاتي :

$$\sqrt[2]{\frac{\Gamma\left[\frac{\beta+2}{\rho}\right] - \Gamma^2\left[\frac{\beta+1}{\beta}\right]}{\Gamma^2\left[\frac{\beta+1}{\beta}\right]}} = \sqrt[2]{\frac{\frac{\sum_{i=1}^{r} t_i}{r}}{\frac{\sum_{i=1}^{r} {t_i}^2}{r}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

يمكن اعتماد المعادلة (14) في تقدير المعلمة $(\hat{\beta}_{MOM})$ بواسطة العزوم والاستفادة منها في تقدير معلمة θ وذلك بتعويض عن قيمة المعلمة $(\hat{\beta}_{MOM})$ والتي تم تقديرها بواسطة العزوم في المعادلة رقم (15)،

$$\hat{\theta}_{MOM} = \left[\frac{\bar{t}}{\Gamma\left(\frac{\hat{\beta}+1}{\hat{\beta}}\right)}\right]^{\hat{\beta}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 15\ )$$

9-المحاكاة $(Simulaion)$ [6]

تعتبر طريقة مونت كارلو $(Mont-carlo)$ والتي تستخدم في توليد المشاهدات لمعظم التوزيعات الاحصائية المعروفة من اهم طرائق المحاكاة واكثرها شيوعا.

ان الية طريقة مونت كارلو تتم بحسب الخطوات الاتية :-

1- توليد الاعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم على الفترة (0,1) وذلك باستخدام دالة الكثافة التجميعية التي تصف النموذج (التوزيع تحت الدراسة)

2- استخدام اسلوب رياضي احصائي لتحويل العدد العشوائي المنتظم الذي تم توليده للحصول على متغير عشوائي الذي يصف الانموذج تحت التجربة، وكما مبين في المعادلتيين ادناه :

$$y = F(X) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(16)$$
$$x = F^{-1}(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(17)$$

ومن الممكن وصف تجارب المحاكاة الخاصة بالبحث من خلال الاتي:-

- تعيين قيم افتراضية لمعالم التوزيع $(\theta),(\beta)$ وكما معرف ادناه

$\theta = 25\,,50 \qquad ,\beta = 1.7$

اذ ان :

θ تمثل معلمة القياس ،β تمثل معلمة الشكل .

وتعتبر عملية تعيين قيم افتراضية لمعالم التوزيع من الخطوات الاساسية والمهمة التي تعتمد عليها الخطوات اللاحقة.

- توليد حجم عينة(100 , 50 , 25) واخذ نسبة مراقبة(r)30% من كل حجم عينة.

ومن خلال تغيير قيم معالم النموذج الافتراضية وحجم العينة (صغير ,متوسط, كبير)ممكن معرفة مدى تاثير التغير في تلك القيم على سلوك مقدرات دالة المعولية، اذ يمكن تكوين ثلاث نماذج تمثل حجم العينة ومعلمتي التوزيع والبتر(r)الذي يمثل 30% من حجم كل عينة وكالاتي :

نموذج رقم (A) يبين القيم افتراضية لمعلمتي الشكل والقياس وحجم العينة والبتر

Model	n	θ	β	r
1	25	25	1.7	8
2	25	50	1.7	8

نموذج رقم (B) يبين القيم افتراضية لمعلمتي الشكل والقياس وحجم العينة والبتر

Model	n	θ	β	r
1	50	25	1.7	15
2	50	50	1.7	15

نموذج رقم (C) يبين القيم افتراضية لمعلمتي الشكل والقياس وحجم العينة والبتر

Model	n	θ	β	r
1	100	25	1.7	30
2	100	50	1.7	30

- تكرار التجربة (1000) مرة للحصول على تجانس اكثر.

❖ ولدت ارقام عشوائية خاضعة لتوزيع ويبل ذي المعلمتيين من خلال الصيغة الاتية:

$$F(t_i) = 1 - exp\left(-\frac{{t_i}^{\beta}}{\theta}\right)$$

$$exp\left(-\frac{{t_i}^{\beta}}{\theta}\right) = 1 - F(t_i)$$

$$= 1 - U_i$$

وعلى فرض $Ui=F(t_i)$

$$-\frac{{t_i}^{\beta}}{\theta} = \text{Ln}(1 - U_i)$$

$${t_i}^{\beta} = -\theta\, Ln(1 - U_i)$$

$$t_i = (-\text{Ln}(1 - U_i))^{\frac{1}{\beta}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(18)$$

اذ ان U_i متغير عشوائي منتظم مستمر على الفترة (0,1)

❖ حساب القيم التقديرية لدالة المعولية ولجميع طرائق التقدير المذكورة في الجانب النظري بعد حساب تقدير المعلمات لكل طريقة .

❖ اعتماد المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطا (MSE) لمقارنة بين القيم التقديرية لدالة المعولية مع العلم ان MSE يمكن ايجاده من خلال الصيغة ادناه :

$$MSE\left[\hat{R}(t_i)\right] = \frac{\sum_{i=1}^{R}\left[R(t_i) - \hat{R}(t_i)\right]^2}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

اذ ان:

R تمثل عدد تكرارات التجربة ،

$\hat{R}(t_i)$ تمثل دالة المعولية التقديرية بحسب الطريقة المستخدمة في التقدير.

10-نتائج المحاكاة

سيتم في هذا الجزء عرض وتحليل ومقارنة نتائج المحاكاة لطرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل باستخدام بيانات مراقبة من النوع الثاني متمثلة بالنماذج الثلاثة المرقمة (A) و(B) و(C) بالاعتماد على المقياس الاحصائي MSE لغرض المقارنة بينها ، والوصول الى افضل طريقة لتقدير دالة المعولية.ولقد تم الحصول على نتائج التحليل باستخدام برنامج لغة (Matlab) وفيما يلي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها حسب تسلسل الجداول.

جدول رقم (1) قيم دالة المعولية $Reliability$ الحقيقية والتقديرية والـــــMSE

	t_i	$R(t_i)$	$\hat{R}_{ML(t_i)}$	$\hat{R}_{Mo(t_i)}$	$MSE[\hat{R}_{ML(}$	$MSE[\hat{R}_{Mo(t}$	BEST
n_1=25	1.5328	0.9576	0.9222	0.8393	0.0117	0.0171	ML
r_1=8	1.7689	0.9205	0.8306	0.7670	0.0317	0.0280	MO
θ_1=25	1.8112	0.8824	0.7389	0.7107	0.0565	0.0366	MO
β_1=1.7	2.3204	0.8473	0.6540	0.6674	0.0873	0.0424	MO
	3.1538	0.8070	0.5681	0.6257	0.1186	0.0460	MO
	3.8495	0.7687	0.5013	0.5903	0.1377	0.0483	MO
	4.0471	0.7289	0.4368	0.5560	0.1572	0.0497	MO
	4.1800	0.6923	0.3835	0.5274	0.1698	0.0498	MO

وبالنظر الى الجدول اعلاه المرقم (1) نلاحظ ان قيم عمود(t_i) تمثل اوقات الاشتغال لحين الفشل وهي قيم احدى التجارب الـ1000 وهي في تزايد، اما قيمة الاعمدة الاخرى والتي تمثل قيم دالة المعولية الحقيقية (الافتراضية) والتقديرية هي عبارة عن الوسط الحسابي لقيم دالة المعولية لجميع التجارب الـ (1000)وهي في تناقص ،ونلاحظ انه كلما يزداد وقت الاشتغال تقل دالة المعولية ، ونلاحظ ان قيم دالة المعولية محصورة بين (0,1) ويمكن معرفة طريقة التقدير الافضل من خلال ايجاد قيم الـــ (MSE) لمقدر دالة المعولية وان قيم اعمدة MSE في الجدول اعلاه هي عبارة عن الوسط الحسابي لقيم MSE لجميع التجارب الـ(1000) .

اظهرت نتائج الجدول اعلاه المرقم(1)ان طريقة العزوم ($Moments\ Method$) هي الافضل لكونها تمتلك اقل MSEوالنسب المئوية بحسب تسلسل الافضلية هي.

BEST	Method	Precentage
$1'st$	**MO**	**%87.5**
2'nd	**ML**	**%12.5**

جدول رقم (2) قيم دالة المعولية $Reliability$ الحقيقية والتقديرية والـــــMSE

	t_i	$R(t_i)$	$\widehat{R}_{ML(t_i)}$	$\widehat{R}_{Mo(t_i)}$	$MSE[\widehat{R}_{ML(t_i)}]$	$MSE[\widehat{R}_{Mo(t_i)}]$	BEST
n_1=25	1.1929	0.9621	0.8828	0.8805	0.0387	0.0083	MO
r_1=8	2.1088	0.9291	0.7738	0.8252	0.0839	0.0138	MO
θ_2=50	2.2740	0.8900	0.6739	0.7765	0.1208	0.0184	MO
β_1=1.7	2.7127	0.8525	0.5972	0.7373	0.1428	0.0215	MO
	3.5233	0.8149	0.5255	0.7019	0.1649	0.0242	MO
	3.8481	0.7783	0.4694	0.6716	0.1768	0.0254	MO
	3.9478	0.7419	0.4173	0.6433	0.1905	0.0260	MO
	4.1770	0.7048	0.3681	0.6158	0.1996	0.0265	MO

اظهرت نتائج الجدول اعلاه المرقم (2) ان طريقةالعزوم ($Moments\ Method$)هي افضل طرائق التقدير وبنسبة 100%

جدول رقم (3) قيم دالة المعولية $Reliability$ الحقيقية والتقديرية والـــــــMSE

	t_i	$R(t_i)$	$\widehat{R}_{ML(t_i)}$	$\widehat{R}_{Mo(t_i)}$	$MSE[\widehat{R}_{ML(t_i)}]$	$MSE[\widehat{R}_{Mo(t_i)}]$	BEST
n_2=50	0.2292	0.9811	0.9784	0.8885	0.0005	0.0106	ML
$r_2 = 15$	0.2931	0.9618	0.9485	0.8251	0.0022	0.0207	ML
θ_1=25	0.3297	0.9408	0.9118	0.7747	0.0054	0.0302	ML
β_1=1.7	1.1321	0.9207	0.8775	0.7369	0.0095	0.0370	MO
	1.4326	0.9021	0.8462	0.7078	0.0134	0.0418	ML
	2.3262	0.8826	0.8121	0.6803	0.0191	0.0460	ML
	2.5299	0.8621	0.7778	0.6539	0.0248	0.0495	ML
	2.7342	0.8434	0.7447	0.6316	0.0316	0.0521	ML
	2.8073	0.8223	0.7115	0.6083	0.0379	0.0543	ML
	3.5575	0.8020	0.6785	0.5868	0.0450	0.0561	ML
	3.5661	0.7841	0.6496	0.5695	0.0514	0.0568	ML
	3.6847	0.7639	0.6196	0.5508	0.0577	0.0572	MO
	3.7586	0.7449	0.5914	0.5340	0.0635	0.0575	MO
	3.8525	0.7252	0.5636	0.5175	0.0691	0.0569	MO
	3.9274	0.7046	0.5348	0.5009	0.0751	0.0562	MO

اظهــــرت نتــــائج الجـــدول اعــــلاه المــــرقم (3)ان طريقــــة الامكــــان الاعظــــم ($Maximum\ Likelihood\ Method$) هــــي افضــــل طريقة والنسب المئوية بحسب تسلسل الافضلية هي.

BEST	Method	Precentage
$1'st$	**ML**	**%66.6**
2'nd	**MO**	**%33.4**

جدول رقم (4) قيم دالة المعولية $Reliability$ الحقيقية والتقديرية

	t_i	$R(t_i)$	$\widehat{R}_{ML(t_i)}$	$\widehat{R}_{Mo(t_i)}$	$MSE[\widehat{R}_{ML(t_i)}$	$MSE[\widehat{R}_{Mo(t_i)}$	BEST
n_2=50	0.4016	0.9797	0.9688	0.9082	1.053E-03	0.006158	ML
r_2=15	1.1354	0.9627	0.9298	0.8657	7.234E-03	0.010503	ML
θ_2=50	1.7610	0.9417	0.8792	0.8280	1.757E-02	0.014279	MO
β_1=1.7	2.2863	0.9229	0.8389	0.7995	2.681E-02	0.017091	MO
	2.3498	0.9037	0.7981	0.7732	3.698E-02	0.019695	MO
	2.7606	0.8856	0.7578	0.7516	4.865E-02	0.021371	MO
	3.0204	0.8654	0.7153	0.7297	6.195E-02	0.022700	MO
	3.7991	0.8469	0.6798	0.7109	7.168E-02	0.023510	MO
	4.1430	0.8291	0.6479	0.6946	8.149E-02	0.023847	MO
	4.1760	0.8104	0.6142	0.6783	9.155E-02	0.024000	MO
	4.5856	0.7908	0.5815	0.6615	1.004E-01	0.024022	ML
	4.6365	0.7700	0.5502	0.6448	1.093E-01	0.023924	ML
	4.6537	0.7510	0.5211	0.6300	1.171E-01	0.023629	ML
	4.7004	0.7312	0.4933	0.6156	1.241E-01	0.023138	ML
	4.8062	0.7114	0.4653	0.6012	1.313E-01	0.022565	ML

اظهــــرت نتــــائج الجـــدول اعــــلاه المــــرقم (4) ان طريقــــة العــــزوم ($Moments\ Method$) هــــي الافضــــل التقدير ، والنسب المئوية بحسب تسلسل الافضلية هي :

BEST	Method	Precentage
$1'st$	**MO**	**%53**
2'nd	**MI**	**%47**

جدول رقم (5) قيم دالة المعولية $Reliability$ الحقيقية والتقديرية والـــــMSE

	t_i	$R(t_i)$	$\widehat{R}_{ML(t_i)}$	$\widehat{R}_{Mo(t_i)}$	$MSE[\widehat{R}_{ML(t_i)}]$	$MSE[\widehat{R}_{Mo(t_i)}]$	BEST
n_3=100	0.5813	0.9903	0.9920	0.9159	0.0000	0.0066	ML
r_3=30	0.7965	0.9818	0.9831	0.8784	0.0000	0.0117	ML
θ_1=25	1.0957	0.9715	0.9707	0.8432	0.0001	0.0173	ML
β_1=1.7	1.5737	0.9604	0.9562	0.8142	0.0002	0.0223	ML
	1.7035	0.9503	0.9424	0.7902	0.0003	0.0267	ML
	1.8792	0.9408	0.9294	0.7697	0.0006	0.0305	ML
	1.9680	0.9307	0.9149	0.7499	0.0001	0.0340	ML
	2.1676	0.9204	0.9005	0.7314	0.0013	0.0373	ML
	2.1784	0.9104	0.8861	0.7151	0.0019	0.0399	ML
	2.2165	0.9006	0.8704	0.7003	0.0030	0.0422	ML
	2.3322	0.8894	0.8540	0.6839	0.0039	0.0446	ML
	2.4270	0.8799	0.8388	0.6710	0.0053	0.0462	ML
	2.4449	0.8705	0.8250	0.6588	0.0063	0.0477	ML
	2.5343	0.8597	0.8084	0.6457	0.0077	0.0490	ML
	2.6224	0.8494	0.7927	0.6334	0.0091	0.0501	ML
	2.9357	0.8401	0.7785	0.6229	0.0104	0.0501	ML
	2.9521	0.8301	0.7643	0.6119	0.0115	0.0516	ML
	3.0918	0.8200	0.7489	0.6013	0.0133	0.0522	ML
	3.2141	0.8106	0.7345	0.5917	0.0151	0.0526	ML
	3.3333	0.8010	0.7201	0.5820	0.0169	0.0528	ML
	3.6446	0.7915	0.7061	0.5729	0.0185	0.0521	ML
	3.7904	0.7816	0.6912	0.5635	0.0205	0.0530	ML
	3.8602	0.7711	0.6763	0.5540	0.0224	0.0529	ML
	3.8646	0.7609	0.6616	0.5449	0.0241	0.0527	ML
	3.9315	0.7513	0.6474	0.5365	0.0265	0.0524	ML
	3.9872	0.7423	0.6345	0.5290	0.0282	0.0511	ML
	4.0871	0.7318	0.6192	0.5202	0.0305	0.0515	ML
	4.1473	0.7219	0.6048	0.5122	0.0326	0.0501	ML
	4.2031	0.7128	0.5921	0.5049	0.0344	0.0504	ML
	4.3095	0.7028	0.5789	0.4972	0.0360	0.0496	ML

اظهرت نتائج الجدول اعلاه المرقم (5) ان طريقة الامكان الاعظم ($Maximum\ Likelihood\ Method$) هي الافضل وبنسبة 100%.

جدول رقم (6) قيم دالة المعولية $Reliability$ الحقيقية والتقديرية والـــــــMSE

	t_i	$R(t_i)$	$\hat{R}_{ML(t_i)}$	$\hat{R}_{Mo(t_i)}$	$MSE[\hat{R}_{ML(t}$	$MSE[\hat{R}_{Mo(t_i)}$	BEST
n_3=100	0.6013	0.9906	0.9898	0.9413	0.0001	0.0021	ML
r_3=30	0.6637	0.9806	0.9771	0.9074	0.0001	0.0059	ML
θ_2=50	0.7206	0.9700	0.9616	0.8800	0.0005	0.0087	ML
β_1=1.7	1.2798	0.9607	0.9475	0.8607	0.0008	0.0106	ML
	1.3763	0.9506	0.9316	0.8421	0.0014	0.0125	ML
	1.4796	0.9406	0.9155	0.8254	0.0022	0.0141	ML
	2.2775	0.9308	0.8995	0.8107	0.0031	0.0154	ML
	2.3885	0.9195	0.8803	0.7951	0.0047	0.0166	ML
	2.4024	0.9102	0.8631	0.7833	0.0068	0.0175	ML
	3.3230	0.8998	0.8445	0.7705	0.0081	0.0183	ML
	3.4005	0.8904	0.8280	0.7597	0.0109	0.0189	ML
	3.8304	0.8806	0.8118	0.7486	0.0129	0.0195	ML
	3.9349	0.8705	0.7941	0.7383	0.0156	0.0198	ML
	3.9880	0.8599	0.7767	0.7274	0.0178	0.0202	ML
	3.9966	0.8496	0.7585	0.7175	0.0207	0.0203	M0
	4.2304	0.8394	0.7425	0.7080	0.0233	0.0204	MO
	4.2794	0.8306	0.7281	0.6998	0.0254	0.0205	M0
	4.5144	0.8204	0.7111	0.6905	0.0281	0.0206	MO
	4.5350	0.8108	0.6959	0.6821	0.0306	0.0204	MO
	4.7039	0.8002	0.6792	0.6733	0.0332	0.0202	MO
	4.8600	0.7899	0.6629	0.6651	0.0363	0.0199	MO
	5.3509	0.7805	0.6481	0.6574	0.0381	0.0197	MO
	5.4089	0.7707	0.6331	0.6498	0.0419	0.0194	MO
	5.4139	0.7617	0.6192	0.6427	0.0444	0.0192	MO
	5.5388	0.7521	0.6048	0.6356	0.0461	0.0188	MO
	5.5590	0.7416	0.5888	0.6276	0.0498	0.0184	MO
	5.5822	0.7327	0.5755	0.6211	0.0523	0.0180	MO
	5.5904	0.7237	0.5628	0.6147	0.0545	0.0177	MO
	5.6691	0.7139	0.5486	0.6076	0.0571	0.0172	MO
	6.0004	0.7037	0.5344	0.6005	0.0595	0.0167	MO

اظهـــرت نتـــائج الجـــدول اعـــلاه المـــرقم (6) ان الطريقـــة العـــزوم ($Moments\ \ Method$) هـــي الافضل والنسب المئوية بحسب تسلسل الافضلية هي :

BEST	Method	Precentage
$1'st$	**MO**	**%53.3**
2'nd	**ML**	**%46.7**

10-الاستنتاجات

بعد تنفيذ تجارب المحاكاة لحجوم عينات مختلفة صغيرة ، متوسطة، كبيرة (25،50،100) على التوالي ، ومعلمتي قياس (25، 50) ، ومعلمة شكل (1.7) لتقدير دالة المعولية توصل الباحث الى الاستنتاجات التالية:

- في حالة العينة الصغيرة فان طريقة العزوم هي الافضل مع اختلاف معلمة القياس مستخدمين نسبة قطع 30% من حجم العينة.
- في حالة العينة المتوسطة ظهور افضلية الامكان الاعظم مقارنة مع العزوم وبمعلة قياس (25)، وعند معلمة القياس (50) فان طريقة العزوم سوف تكون هي الافضل .
- اما في حالة العينة بحجم (100) فان قيمة البتر سوف تصبح (30) مشاهدة ، وعندها يكون الاستنتاج مشابها الى الفقره اعلاه.
- افضلية طريقة الامكان الاعظم بصورة عامة وبنسبة (52%).

11- المصادر

1- بدر، دريد حسين (2012) "مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الاول باستخدام المحاكاة"مجلة العلوم الاقتصادية ،المجلد 8 ، العدد31 .

2- البياتي ، هلال عبود (1995) "طريقة بيز التجريبية للتوزيع ثنائي الحدين"مجلة وقائع المؤتمر العلمي السابع للجمعية العراقية للعلوم الاحصائية المنعقد خلال المدة (4-3) ص (8-1)

3- الجاسم ، صباح هادي، والصراف ، زكي جواد(1992)"نظرية القرارات الاحصائية"دار الحكمة للطباعة والنشر-جامعة بغداد.

4- جعفر ، صادق مولى ،واخرون ،(2009)"افضل تقدير لمعولية ويبل ذي المعلمتين" مجلة بغداد للعلوم ،مجلد 6، العدد4.

5- الجميلي ،صبا صباح احمد (2007)،"مقارنة بعض طرائق تقدير المعلمة والمعولية لانموذج ريلي للفشل لبيانات تامة وبيانات تحت المراقبة من النوع الاول باستخدام المحاكاة "رسالة ماجستير،علوم في الاحصاء -كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد .

6- حسن ،ضوية سلمان ، واخرون(2011) "معولية خطط معاينة القبول لتوزيع كاما لاوقات الفشل تحت اسلوب المراقبة الهجينة"المجلة العراقية للعلوم الاحصائية،العدد 20.

7- حسن، ضوية سلمان ، واخرون (2008) "استخدام المقدر المقلص في تقدير معلمة الشكل لتوزيع ويبل"مجلة جامعة النهرين المجلد11(3)

8-AL-Nasser, Abdul Majeed H., (2009), "An Introduction to Statistical Reliability", ITHRAA Publishing and Distribution, University book shop.

9-Haniyeh P. & Saeid A. (2011)"Estimation Of The Weibull Distribution Based On Type-II-Censored Samles"Applied Mathematical Sciences, Vol. 5,No.52,PP.2549-2558.

10- Jayant V. D& Sudha, G. P.**(2009) "Life Time Data: Statistical Models and Methods"**. University of Pune, India.