اشتقاق صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى

رافد فياض حمدي *

استلام البحث 3، تشرين الاول ، 2011
قبول النشر 6، تشرين الثاني، 2012

الخلاصة :

تضمن هذا البحث اشتقاقاً لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوة الزوجية r للوصول إلى صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوة الزوجية r+2 كذلك تضمن اشتقاقاً لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوة الفردية r للوصول إلى صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوة الفردية r+2 وهذهِ الاشتقاقات تتمايز بإمكانية برمجتها على الحاسبة الالكترونية أو باستعمال البرامج المكتبية كبرنامج Excel. كذلك كشف هذا البحث عن وجود علاقة بين صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوة r وكل من صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوة نفسها من جهة وبين صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوة r من جهةٍ أخرى.

الكلمات المفتاحية : مجموع الأعداد الطبيعية للقوى , متسلسل القوى

المقدمة :

يتطرق هذا البحث إلى طريقة جديدة استطاع الباحث من خلالها التوصل لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى وذلك من خلال اشتقاق يتسم بالشمولية و يصلح للاستعمال مع جميع القوى و بعدد محدد من الخطوات كما يتمايز بتلاشي نصف الحدود ضمن عملية الاشتقاق بالإضافة إلى سهولة عمل الاشتقاق بشكل ألي باستخدام الحاسبة الالكترونية مما جعل هذا الاشتقاق الأسهل مقارنةً بالطرائق السابقة التي سنشير أليها لاحقاً في هذهِ الفقرة.

تمكن Johannes Faulhaber (1580 – 1635) من التوصل إلى صيغ لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى ولحد القوة 17 ولكن الطريقة تتسم بالتعقيد إذ أن اشتقاقاتها طويلة وغير قابلة للتعميم لقوى أعلى و لقد كشفت هذهِ الطريقة عن وجود صيغ مختلفة للقوى الفردية وأخرى للقوى الزوجية وفيما يأتي عرض لتلك الصيغ

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2s+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \left[\sum_{j=1}^{s} a_j \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^{s-j}\right]$$

وهذهِ الصيغة خاصة بالقوى الفردية ومن السهولة معرفة 2s + 1 عدد فردي و إن a_j معاملات الصيغة المستخرجة من الاشتقاق.

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2s} = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \left[\sum_{j=1}^{s} b_j \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^{s-j}\right]$$

وهذهِ الصيغة خاصة بالقوى الزوجية ومن السهولة معرفة 2 s عدد زوجي و إن b_j معاملات الصيغة المستخرجة من الاشتقاق.

لقد كان Jakob I Bernoulli [1] [2] من ابرز المهتمين بصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى وهو من مواليد Basel في سويسرا (1654 – 1705) إذ استطاع التوصل إلى أفضل صيغة عامة في حينها لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى فقد وضع أرقاماً تعرف باسمهِ كان لها الدور الأساسي في هذهِ الصيغة ويرمز لتلك الأرقام بـ B_j إذ أن $B_0 = 1$ وبقية الأرقام يمكن استخراجها من الصيغة الآتية

$$\sum_{j=0}^{n} C_j^{n+1} B_j = 0 \qquad n \geq 1$$

ونلاحظ أن قيمة B_1 تعتمد على B_0 و قيمة B_2 تعتمد على قيمتي B_0 و B_1 وهكذا فأن كل قيمة من قيم B_j تعتمد على أرقام Bernoulli التي سبقتها . و عن طريق تلك الأرقام تم وضع متسلسلة القوى وصيغتها

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} C_k^m B_k x^{m-k}$$

*الجامعة المستنصرية / كلية الإدارة والاقتصاد / قسم الإحصاء

إذ تشير الــ m إلى القوة و B_k تعني $B_k(0)$ أي عندما x = 0 ومن الفرق بين المتسلسلتين (مشتقة الصيغة بالنسبة لـ x) نحصل على الصيغة الآتية

$$x^m = \left(B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x)\right)/(m+1) \qquad m \geq 0$$

عند إدخال المجموع لقيم x من 1 إلى n نحصل على الصيغة الآتية

$$\sum_{x=1}^{n} x^m = \left(B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(0)\right)/(m+1) \qquad m \geq 0$$

ومن أهالي مدينة Bernoulli السويسري Leanhard Euler (1707 – 1783) [3] [4] الـذي اسـتطاع وضـع صيغة لمجموع الأعداد الطبيعيـة للقوى اعتمـاداً على أرقام قد وضعها تدعى بأرقام Euler ويرمز لها بـ E(m , n) إذ أن m تعني عدد عناصر المجموعة و n تعنـي عـدد عمليـات المقارنـة الناجحـة بـين كـل عـددين متتـاليين داخـل المجموعـة ومـن المعلـوم أن المجموعـة بحجم m يمكن ترتيب عناصرها بـ m! طريقة للترتيب : و في كل طريقة سوف نجري عملية مقارنة بين كل زوجين متتاليين من عناصر المجموعة فإذا كان الترتيب متزايداً فأن ذلك يعني إن المقارنة ناجحة و من ثم يمكن معرفة كم ترتيب فيهِ n مقارنة ناجحة في m! ترتيب ويرمز له بـ E(m , n) وهذا يعني أن مجموع أرقام Euler لمجموعة بحجم m فيها k = 0 ,1 , 2 , … , n-1 من المقارنات الناجحة تساوي m! .كما يمكن الحصول على أرقام Euler من خلال الصيغة الآتية

$$E(m,n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_j^{m+1} (n-j+1)^m \qquad m \geq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} E(m,k) = m! \qquad m \geq 1$$

و من هذهِ الصيغة التي تعد المفتاح لصيغة Euler الخاصة بمجموع الأعداد الطبيعية للقوى

$$x^m = \sum_{n=0}^{m-1} E(m,n)\, C_m^{x+n} \qquad m \geq 1$$

نستطيع الوصول إلى الصيغة النهائية الآتية لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى

$$\sum_{x=0}^{r} x^m = \sum_{n=0}^{m-1} E(m,n)\, C_{m+1}^{r+n+1} \qquad m \geq 1$$

وعلى غرار صيغة Euler وضع الاسكتلندي James Stirling (1692 – 1770) [5] صـيغة أخـرى لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى تعتمد على أرقام تعرف باسمهِ وتسمى بالتحديد أرقام Stirling من النوع الثاني أو k – block partition ويرمز لها بـ S(m , n) فإذا كانت مجموعة مكونة من m عنصر وتم تقسيمها إلى n مجموعة غير خالية فأن عدد الطرائق الممكنة لتكوين n مجموعة من m عنصر هي S(m , n). وقد وضـع Stirling العلاقة الآتية والتي كانت المفتاح الأساسي لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى

$$k^{m}=\sum_{r=1}^{m} S(m,r)\ P(k,r) \qquad m\geq 1$$

إذ أن $P(k,r)$ عبارة عن تباديل r Permutation من k و من الصيغة السابقة نحصل على الصيغة الآتية

$$k^{m}=\sum_{r=1}^{m} r!S(m,r)\ C(k,r) \qquad m\geq 1$$

وبقلب الصيغة السابقة نحصل على الصيغة الآتية إذ أن C(r , t) عبارة عن توافيق t Combination من r

$$a_{rm}=r!\ S(m,r)=\sum_{t=1}^{m}(-1)^{r+t}\ C(r,t)\,t^{m} \qquad m\geq 1$$

وعند إدخال المجموع على الصيغة السابقة نحصل على الصيغة الآتية لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى.

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m}=\sum_{r=1}^{m}\ r!S(m,r)C(n+1,r+1) \qquad m\geq 1$$

و أما Leopold Kronecker (1891 – 1823) [3] استعمل تقنية أخرى اعتماداً على أرقام تأخذ القيم أما صفر أو واحد وتعرف بــ Kronecker delta إذ وضع معادلات في طرفها الأيمن تلك الأرقام وفي الطرف الأيسر متسلسلة قوى بدلالة المتغير n وهو أكبر رقم مراد أيجاد مجموع الأعداد الطبيعية للقوى لحد الرقم n وبحل تلك المعادلات سوف نحصل على معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى وبدلالة المتغير n ومن المعروف انهُ توجد عدة طرائق لحل تلك المعادلات. في القرنين التاسع عشر و القرن العشرين ظهر العديد من الباحثين الذين أسهموا في وضع أو وضعوا صيغاً لحساب مجموع الأعداد الطبيعية للقوى منها قابل للتطبيق بطريقة يدوية ومنها ما يمكن تطبيقهُ باستعمال برنامج على الحاسبة ومن أبرزهم Bernhard Riemann (1866 – 1826) [6] و Adolf Hurwitz (1919 – 1859)
ويوجد الكثير من الأسماء ويقابلها الكثير من الصيغ ولكن لم يتم التوصل قبل هذا لبحث إلى صيغة قابلة للاشتقاق بطريقة يدوية أو إلية وبخطوات محدودة وسهلة التطبيق كما سنبين في الفقرات الآتية .

يتكون البحث فضلاً عن المقدمة من هدف البحث و الجانب النظري ثم التطبيق وأخيراً الاستنتاجات. لقد توصل الباحث إلى ست مجاميع من الصيغ منها الخاص بمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية والأخرى بمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية وأخرى خاصة بمجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الفردية وأخرى بمجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الزوجية ومن تلك المجاميع تم التوصل إلى صيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية وصيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية وفي الفقرة الآتية سوف نوضح العلاقة بين تلك الصيغ إذ يمكن التوصل إلى احدهما بدلالة الأخر ولكون اشتقاق صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى أسهل من اشتقاق كل من صيغتي مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى و مجموع الأعداد الطبيعية للقوى لذلك تم التركيز في هذا البحث على الاشتقاق لصيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى وإهمال الاشتقاقات الأخرى.هنا لابد من الإشارة إلى بعض البديهيات الأساسية لهذا البحث لأنها تعد المنطلق للصيغ الشاملة فيما بعد .

عدد الأعداد الطبيعية الفردية لحد العدد n (n عدد فردي) هي $\dfrac{n+1}{2}$

عدد الأعداد الطبيعية الزوجية لحد العدد n (n عدد زوجي) هي $\dfrac{n}{2}$

مجموع الأعداد الطبيعية الفردية لحد العدد n (n عدد فردي) هي $\dfrac{(n+1)^{2}}{4}$

مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية لحد العدد n (n عدد زوجي) هي $\frac{n(n+2)}{4}$

مجموع مربعات الأعداد الطبيعية الفردية لحد العدد n (n عدد فردي) هي $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

مجموع مربعات الأعداد الطبيعية الزوجية لحد العدد n (n عدد زوجي) هي $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

وقد تم التوصل إلى صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية أو الفردية للقوى الفردية التي سوف تكون متسلسلة قوى بدلالة المتغير B=n(n+2) فقط بينما صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية أو الفردية للقوى الزوجية سوف تكون أيضا متسلسلة قوى بدلالة المتغير B=n(n+2) ولكن كل حد من حدود الصيغة مضروب بالمتغير A=n+1 مرفوع للقوة واحد وهذا يعني بان المتغير A يظهر في الصيغ للقوى الزوجية ويتحول إلى المتغير B في الصيغ للقوى الفردية.

الاهداف :

من المأخذ على اشتقاق Faulhaber لمجموع الأعداد الطبيعية للقوى الذي يعد نقطة الانطلاق لجميع الصيغ الآتية لهُ هو صعوبة تعميمهُ لجميع القوى مما دعا كل من Bernoulli و Euler و Stirling لوضع صيغ بدلالة أرقام وضعوها لصيغهم و هذا زاد الصيغ تعقيداً لذلك كان الهدف من هذا البحث هو إيجاد اشتقاق قابل للاستعمال مع جميع القوى و بالخطوات نفسها إذ يتم تكوين مصفوفة بمعاملات دالة ذي الحدين اعتماداً على القوة r ثم يتم ضرب تلك المصفوفة بمصفوفة المعاملات للقوى الفردية الأدنى إن كانت القوة r عدد فردي أو بمصفوفة المعاملات للقوى الزوجية الأدنى إن كانت r عدد زوجي و بذلك سيصبح الاشتقاق شاملاً لجميع القوى و نتخلص من الأرقام المعدة مسبقاً كأرقام Bernoulli كذلك سوف لن نحتاج إلى استعمال طرائق لحل المعادلات كما في طريقة Kronecker و تتمايز صيغة البحث بأنها أخذت البعد الهندسي بالحسبان وذلك بترتيب تلك الأعداد بأشكال هندسية مجسمة [7] [8] مما ساعد على وضع اشتقاق سهل وقابل للتطبيق يدوياً أو أليا من خلال عمل برنامج قصير على الحاسبة الالكترونية [9] وحتى من دون عمل برنامج فان الإمكانيات المتوافرة في البرنامج الجاهز Microsoft Office Excel تمكننا من عمل الاشتقاق بسهولة

وسوف تكون الاشتقاقات في هذا البحث للقوى الزوجية فقط لاستطاعتنا التوصل إلى صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الفردية التي تكون أكثر تعقيداً من حيث الاشتقاقات من خلال صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية و تعد أقل تعقيداً من حيث الاشتقاقات والفرق بين الصيغتين وللقوة نفسها هو إضافة ثابت إلى بسط صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية للحصول على صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الفردية ومن السهولة تحديد قيمة الثابت وذلك بأخذ المجموع لحد العدد واحد (ناتج عملية الجمع سيكون واحداً) أي هي عبارة عن معادلة بمجهول واحد. في الجدول رقم 1 قيم المعالم لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية. ومن الممكن التعبير عن صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية بالصيغة الآتية إذ أن r هي القوة واكبر عدد زوجي هو n و q = (r+1)/2 و m_0 معامل المقام وتختلف قيمتهُ باختلاف القوة r و B=n(n+2) ودائماً أشارة m_1 تكون موجبة و أشارة m_2 تكون سالبة وهكذا بالتناوب

$$\sum_{k=2}^{n} k^r = \sum_{i=2}^{q} m_{q-i+1} B^i / m_0 \quad i = 2,3,\ldots,q \qquad k = 2,4,6,\ldots,n$$

إما صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الزوجية فلا تختلف عن صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية أي الصيغة نفسها تُستعمل لإيجاد مجموع الأعداد الطبيعية الفردية وكذلك للأعداد الطبيعية الزوجية وللقوة نفسها إذ أن لكل قوة صيغتها الخاصة .بها كما ذكرنا سابقاً فأن اشتقاقات صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى الزوجية كذلك أكثر تعقيداً من اشتقاقات صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية ولذلك سوف نكتفي بالتطرق إلى اشتقاقات صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية ولمختلف القوى و في الجدول رقم 2 قيم المعالم لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية. أما الصيغة الآتية فهي لمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية إذ أن r هي القوة واكبر عدد زوجي هو n و q = r /2 و m_0 معامل المقام وتختلف قيمتهُ باختلاف القوة r و B=n(n+2) و A=n+1 ودائماً أشارة m_1 تكون موجبة و أشارة m_2 تكون سالبة وهكذا بالتناوب

$$\sum_{k=2}^{n} k^r = \sum_{i=1}^{q} m_{q-i+1} A B^i / m_0 \quad i = 1,2,3,\ldots,q \qquad k = 2,4,6,\ldots,n$$

من خلال الصيغة الخاصة بمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى يمكن التوصل إلى الصيغة الخاصة بمجموع الأعداد الطبيعية (أي الأعداد الكلية الفردية و الزوجية) للقوي و ذلك باستبدال المتغير B=n(n+2) في صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية بالمتغير B=n(n+1) في صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية كذلك نضرب جميع معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية بـ 2 ونقسم المعاملات على المتوالية الهندسية للأساس 4 للحصول على معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية أي $\frac{m_1}{4^0}\times 2$ قيمة المعامل الأول من معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية و $\frac{m_2}{4^1}\times 2$ قيمة المعامل الثاني من معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية و $\frac{m_3}{4^2}\times 2$ قيمة المعامل الثالث من معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الفردية وهكذا وصولاً إلى أخر معامل في الصيغة.

كذلك من خلال صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية نستطيع الوصول إلى صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية و ذلك باستبدال المتغيرين B=n(n+2) و A=n+1 في صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية بالمتغيرين B=n(n+1) و A=2n+1 في صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية كذلك نقسم جميع معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية على المتوالية الهندسية للأساس 4 للحصول على معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية أي $\frac{m_1}{4^0}$ قيمة المعامل الأول من معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية و $\frac{m_2}{4^1}$ قيمة المعامل الثاني من معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية و $\frac{m_3}{4^2}$ قيمة المعامل الثالث من معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية للقوى الزوجية وهكذا وصولاً إلى أخر معامل في الصيغة.

الجدول رقم 1 صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية

Calculate sums of power 3 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 3 B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator		Denominator
m0			8
m1	1	B^2	

Calculate sums of power 5 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 5 B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator		Denominator
m0			12
m1	1	B^3	
m2	-2	B^2	

Calculate sums of power 7 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 7 B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator		Denominator
m0			48
m1	3	B^4	
m2	-16	B^3	
m3	32	B^2	

Calculate sums of power 9 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 9 B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator		Denominator
m0			20
m1	1	B^5	
m2	-10	B^4	
m3	48	B^3	
m4	-96	B^2	

تكملة الجدول رقم 1 في الصفحة أللاحقة

الجدول رقم 2 صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية

Calculate sums of power 2 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 2 A = n+1 , B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		6
m1	1 A*B^1	

Calculate sums of power 4 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 4 A = n+1 , B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		30
m1	3 A*B^2	
m2	-4 A*B^1	

Calculate sums of power 6 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 6 A = n+1 , B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		42
m1	3 A*B^3	
m2	-12 A*B^2	
m3	16 A*B^1	

Calculate sums of power 8 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 8 A = n+1 , B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		90
m1	5 A*B^4	
m2	-40 A*B^3	
m3	144 A*B^2	
m4	-192 A*B^1	

تكملة الجدول رقم 2 في الصفحة أللاحقة

الجدول رقم 1 صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية

Calculate sums of power 11 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 11   B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		24
m1	1 B^6	
m2	-16 B^5	
m3	136 B^4	
m4	-640 B^3	
m5	1280 B^2	

Calculate sums of power 13 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 13   B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		420
m1	15 B^7	
m2	-350 B^6	
m3	4592 B^5	
m4	-37760 B^4	
m5	176896 B^3	
m6	-353792 B^2	

Calculate sums of power 15 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 15   B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		96
m1	3 B^8	
m2	-96 B^7	
m3	1792 B^6	
m4	-22528 B^5	
m5	183808 B^4	
m6	-860160 B^3	
m7	1720320 B^2	

Calculate sums of power 17 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 17   B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		180
m1	5 B^9	
m2	-210 B^8	
m3	5280 B^7	
m4	-93760 B^6	
m5	1166592 B^5	
m6	-9500160 B^4	
m7	44445696 B^3	
m8	-88891392 B^2	

Calculate sums of power 19 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 19   B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		840
m1	21 B^10	
m2	-1120 B^9	
m3	36456 B^8	
m4	-867072 B^7	
m5	15208704 B^6	
m6	-188747776 B^5	
m7	1536342016 B^4	
m8	-7187169280 B^3	
m9	14374338560 B^2	

الجدول رقم 2 صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية

Calculate sums of power 10 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 10 A = n+1 , B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		66
m1	3 A*B^5	
m2	-40 A*B^4	
m3	272 A*B^3	
m4	-960 A*B^2	
m5	1280 A*B^1	

Calculate sums of power 12 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 12 A = n+1 , B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		2730
m1	105 A*B^6	
m2	-2100 A*B^5	
m3	22960 A*B^4	
m4	-151040 A*B^3	
m5	530688 A*B^2	
m6	-707584 A*B^1	

Calculate sums of power 14 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 14 A = n+1 , B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		90
m1	3 A*B^7	
m2	-84 A*B^6	
m3	1344 A*B^5	
m4	-14080 A*B^4	
m5	91904 A*B^3	
m6	-322560 A*B^2	
m7	430080 A*B^1	

Calculate sums of power 16 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 16 A = n+1 , B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		510
m1	15 A* B^8	
m2	-560 A*B^7	
m3	12320 A*B^6	
m4	-187520 A*B^5	
m5	1944320 A*B^4	
m6	-12666880 A*B^3	
m7	44445696 A*B^2	
m8	-59260928 A*B^1	

Calculate sums of power 18 of even natural numbers

Coefficient of sums of power 18 A = n+1 , B = n*(n+2)

Coefficient	Numerator	Denominator
m0		3990
m1	105 A* B^9	
m2	-5040 A* B^8	
m3	145824 A*B^7	
m4	-3034752 A*B^6	
m5	45626112 A*B^5	
m6	-471869440 A*B^4	
m7	3072684032 A*B^3	
m8	-10780753920 A*B^2	
m9	14374338560 A*B^1	

الجانب النظري :

تمكن الباحث من ترجمة الأشكال الهندسية المجسمة والخاصة بصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوى والأشكال الأخرى الخاصة بصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى إلى صيغ شاملة تنطبق على جميع القوى و بحسب الصيغ الآتية:

الصيغة الشاملة لمجموع الأعداد الطبيعية الفردية للقوة r عندما n عدد فردي هي

$$\sum_{k=1}^{n} k^{r} = n^{2}\sum_{k=1}^{n} k^{r-2} - 4\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)\sum_{j=1}^{k} j^{r-2} \quad k = 1,3,5,\ldots,n \quad j = 1,3,5,\ldots,k \quad \ldots 1$$

الصيغة الشاملة لمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوة r عندما n عدد زوجي هي

$$\sum_{k=2}^{n} k^{r} = n^{2}\sum_{k=2}^{n} k^{r-2} - 4\sum_{k=2}^{n-2}(k+1)\sum_{j=2}^{k} j^{r-2} \quad k = 2,4,6,\ldots,n \quad j = 2,4,6,\ldots,k \quad \ldots 2$$

بطرح n^{r} من طرفي المعادلة فعند طرح n^{r} من الطرف الأيمن سوف يطرح من الجزء القريب إلى علامة المساواة حيث ستتحول الصيغتان 1 إلى الصيغة 3 و 2 إلى الصيغة 4 على التوالي

$$\sum_{k=1}^{n-2} k^{r} = n^{2}\sum_{k=1}^{n-2} k^{r-2} - 4\sum_{k=1}^{n-2}(k+1)\sum_{j=1}^{k} j^{r-2} \quad k = 1,3,5,\ldots,n \quad j = 1,3,5,\ldots,k \quad \ldots 3$$

$$\sum_{k=2}^{n-2} k^{r} = n^{2}\sum_{k=2}^{n-2} k^{r-2} - 4\sum_{k=2}^{n-2}(k+1)\sum_{j=2}^{k} j^{r-2} \quad k = 2,4,6,\ldots,n \quad j = 2,4,6,\ldots,k \quad \ldots 4$$

كما نلاحظ التشابه بين صيغتي مجموع الأعداد الطبيعية الفردية مع مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية ولكن سوف نجري الاشتقاق على صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية فقط لان اشتقاق صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الفردية أصعب قليلاً. ومن الملاحظ اعتماد الصيغة للقوة r على الصيغ للقوى السابقة لها أي القوة r-2 و r-4 ... الخ فإذا كانت r فردية ستعتمد على الصيغ للقوى r-2 و r-4 ... الخ و من الواضح هي قوى فردية أيضاً أما أذا كانت r زوجية فسوف تعتمد على الصيغ للقوى r-2 و r-4 ... الخ و من المؤكد انها قوى زوجية . الصيغ 5 الخاصة بالقوى r الفردية تتألف من $\frac{r-1}{2}$ معامل في البسط فضلاً عن معامل المقام والصيغة عبارة عن متسلسلة قوى يكون فيها المتغير B=n(n-2) خلال عملية الاشتقاق لان بعد طرح n^{r} سيصبح المجموع إلى العدد n–2 بدل n أي سيكون أكبر عدد طبيعي يدخل عملية الجمع هو n–2 وخارج الاشتقاق سيكون الجمع لحد العدد n وهذا سيؤثر في المتغير B إذ سيعدل من B=n(n-2) خلال الاشتقاق إلى B=n(n+2) للصيغة النهائية التي نطلق عليها خارج الاشتقاق بصيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية. في الجدول رقم 1 قيم المعاملات الخاصة بصيغ بمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية .

$$\sum_{k=2}^{n} k^{r} = \frac{m_1 B^{r+1/2} + m_2 B^{r-1/2} + m_3 B^{r-3/2} + \ldots + m_{r-1/2} B^{2}}{m_0} \qquad \ldots\ldots 5$$

$$k = 2,4,6,\ldots,n \qquad B = n(n+2)$$

أما الصيغ 6 الخاصة بمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية فتتألف من $\frac{r}{2}$ معامل في البسط فضلاً عن معامل المقام الصيغة عبارة عن متسلسلة قوى يكون فيها المتغيران A=n-1 و B=n(n-2) خلال عملية الاشتقاق لان بعد طرح n^r سيصبح المجموع إلى العدد n–2 بدل n أي سيكون أكبر عدد طبيعي يدخل عملية الجمع هو n–2 وخارج الاشتقاق سيكون الجمع لحد العدد n وهذا سيؤثر في المتغيرين A و B إذ سيعدلان من A=n-1 و B=n(n-2) خلال الاشتقاق إلى A=n+1 و B=n(n+2) على التوالي. للصيغة النهائية التي نطلق عليها خارج الاشتقاق بصيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية.في الجدول رقم 2 قيم المعاملات الخاصة بصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية.

$$\sum_{k=2}^{n} k^r = \frac{m_1 AB^{r/2} + m_2 AB^{r-2/2} + m_3 AB^{r-4/2} + \dots + m_{r/2} AB}{m_0} \qquad \dots\dots 6$$

$$k = 2,4,6,\dots,n \qquad A = n+1 \qquad B = n(n+2)$$

الفكرة الجوهرية التي أدت إلى تبسيط هذا الاشتقاق هو جعل الاشتقاق بدلالة المتغير B لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية وبدلالة المتغيرين A وB لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية بدلاً عن المتغير n . و للتخلص من n^2 في الجزء الأيمن من 4 نحولهُ بدلالة A وB وكما مبين في العلاقة الآتية:

$$n^2 = B + 2A + 2 = (n(n-2)) + (2n-2) + 2$$

عند تعويض 5 عندما r عدد فردي بدل الجزء $\sum_{j=2}^{k} j^{r-2}$ في الصيغة 4 نحصل على 7

$$\sum_{k=2}^{n-2} k^r = (B+2A+2)\sum_{k=2}^{n-2} k^{r-2} - 4\sum_{k=2}^{n-2}(k+1)\left(\frac{m_1 b^{r-1/2} + m_2 b^{r-3/2} + \dots + m_{r-3/2} b^2}{m_0}\right) \qquad \dots 7$$

$$k = 2,4,6,\dots,n-2 \qquad b = k(k+2)$$

أما عند تعويض 6 عندما r عدد زوجي بدل الجزء $\sum_{j=2}^{k} j^{r-2}$ في الصيغة 4 فنحصل على 8

$$\sum_{k=2}^{n-2} k^r = (B+2A+2)\sum_{k=2}^{n-2} k^{r-2} - 4\sum_{k=2}^{n-2}(k+1)^2\left(\frac{m_1 b^{r-2/2} + m_2 b^{r-4/2} + \dots + m_{r-2/2} b^2}{m_0}\right) \qquad \dots 8$$

$$k = 2,4,6,\dots,n-2 \quad a = k+1 \quad b = k(k+2)$$

من الملاحظ أن a=k+1 لم تظهر في الصيغة 8 لأنه تم تعويضها بشكل مباشر إذ رفعت k+1 إلى القوة 2

في كلتا الحالتين عندما r فردي أو زوجي سوف تتلاشى الحدود كافة التي تحمل القوى الزوجية عندما r فردي و تتلاشى الحدود كافة التي تحمل القوى الفردية عندما r زوجي . فعندما تكون القوة r فردية سوف تتلاشى من الجزء الأيسر من 7 $(2A)\sum_{k=2}^{n-2} k^{r-2}$ الحدود التي تحمل القوى الزوجية بعد تحليل الصيغة 9 وجعلها بدلالة k مع الحد

$$-4\sum_{k=2}^{n-2}(k+1)\left(\frac{m_1\left(k(k+2)\right)^{r-1/2}+m_2\left(k(k+2)\right)^{r-3/2}+\ldots+m_{r-3/2}\left(k(k+2)\right)^{2}}{m_0}\right) \quad \ldots 9$$

وبقية الحدود ستحدد صيغة $\sum_{k=2}^{n-2} k^r$ أما الفرق بين المجموعين $\sum_{k=2}^{n} k^r$ و $\sum_{k=2}^{n-2} k^r$ فهو باستبدال المتغير B=n(n-2) بالمتغير B=n(n+2) على التوالي . أما عند القوة r الزوجية فسوف تتلاشى من الجزء الأيسر من 8 الحدود التي تحمل القوى الفردية بعد تحليل الصيغة 10 وجعلها بدلالة k مع الحد $(2A)\sum_{k=2}^{n-2} k^{r-2}$ وهنا ستكون صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية خالية من المتغير A و لإتمام حالة التلاشي نحول A^2 إلى B+1 الناتج من الجزء $(2A)\sum_{k=2}^{n-2} k^{r-2}$ إذ أن صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية تحوي المتغير A

$$-4\sum_{k=2}^{n-2}(k+1)^2\left(\frac{m_1\left(k(k+2)\right)^{r-2/2}+m_2\left(k(k+2)\right)^{r-4/2}+\ldots+m_{r-2/2}\left(k(k+2)\right)^{2}}{m_0}\right) \quad \ldots 10$$

وبقية الحدود ستحدد صيغة $\sum_{k=2}^{n-2} k^r$ أما الفرق بين المجموعين $\sum_{k=2}^{n} k^r$ و $\sum_{k=2}^{n-2} k^r$ فهو باستبدال المتغيرين A=n-1 بالمتغير A=n+1 و B=n(n-2) بالمتغير B=n(n+2) على التوالي .

التطبيق :

توجد عدة أساليب لتحويل الصيغ التي ذكرناها في الجانب النظري إلى عمليات حسابية تؤدي إلى تحديد قيم المعاملات للصيغتين الخاصتين بمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الفردية (الصيغة رقم 5) و بمجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى الزوجية (الصيغة رقم 6) و تعد الجداول من ابسط الطرائق إذ تقل فيها العمليات الحسابية مقارنةً بالأساليب الأخرى إلا إن استعمال لغة المصفوفات [10] [11] أكثر وضوحاً لدى المتخصصين في مجال الرياضيات والمبرمجين مع إمكانية ترجمتها بسهولة على الحاسبة. وهناك نقاط تشابه بين الصيغتين في مواضع معينة وهناك اختلاف في مواضع أخرى سنبينها في هذهِ الفقرة.

الخطوة الأولى تبدأ بتحديد مصفوفة الثوابت التي سوف نرمز إليها بـ F_{odd} للقوى الفردية و إن قيم عناصرها القطرية 4- وتتألف من قطرين رئيسين إما بقية العناصر فتحمل القيمة صفر و يكون حجم المصفوفة الداخلة في استخراج قيم المعاملات للقوة r بحجم $(r-1)X(r-2)$ و مصفوفة الثوابت الخاصة بالقوى الزوجية التي نرمز لها بـ وتتألف من ثلاثة أقطار وان قيم عناصرها القطرية 4- و 8- و 4- على التوالي وبقية قيم المصفوفة عبارة عن أصفار يكون حجم المصفوفة الداخلة في استخراج قيم المعاملات للقوة r بحجم $(r)X(r-2)$ وفي الأتي شكل المصفوفتين

كما تعد مصفوفة التوافيق Combination [13] الأكثر أهمية في حساب صيغ مجموع [12] الأعداد الطبيعية

$$F_{even}=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ -8 & -4 & 0 & 0 & . & . & . \\ -4 & -8 & -4 & 0 & . & . & . \\ 0 & -4 & -8 & -4 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & -4 & -8 & -4 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & -4 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & -4 & . & . \\ . & . & . & & & & \\ . & . & . & & & & \end{pmatrix}$$

$$F_{odd}=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ -4 & -4 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & -4 & -4 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & . \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & & & & \\ . & . & . & & & & \end{pmatrix}$$

الزوجية للقوى وتكون المصفوفة الداخلة في اشتقاق الصيغة للقوة الفردية r بحجم $(r-2)X\left(\frac{r-3}{2}\right)$ ويحتوي العمود الأول ابتداءً من الصف الأول على معاملات $(k(k+2))^{\frac{r-1}{2}}$ ويحتوي العمود الثاني ابتداءً من الصف الثالث على معاملات $(k(k+2))^{\frac{r-3}{2}}$ ويحتوي العمود الثالث ابتداءً من الصف الخامس على معاملات $(k(k+2))^{\frac{r-5}{2}}$ وصولاً إلى العمود الأخير الذي يحتوي على معاملات $(k(k+2))^{\frac{4}{2}}$ ونرمز للمصفوفة الخاصة باشتقاق القوة الفردية r بالرمز C_{odd}.

أما المصفوفة الداخلة في اشتقاق الصيغة للقوة الزوجية r بحجم $(r-2)X\left(\frac{r-2}{2}\right)$ ويحتوي العمود الأول ابتداءً من الصف الأول على معاملات $(k(k+2))^{\frac{r-2}{2}}$ ويحتوي العمود الثاني ابتداءً من الصف الثالث على معاملات $(k(k+2))^{\frac{r-4}{2}}$ ويحتوي العمود الثالث ابتداءً من الصف الخامس على معاملات $(k(k+2))^{\frac{r-6}{2}}$ وصولاً إلى العمود الأخير الذي يحتوي على معاملات $(k(k+2))^{\frac{2}{2}}$ ونرمز للمصفوفة الخاصة باشتقاق القوة الزوجية r بالرمز C_{even} وفي الأتي شكل المصفوفتين.

$$
C_{odd}=\begin{pmatrix}
C_0^{(r-1)/2}2^0 & 0 & 0 & . & . & . \\
C_1^{(r-1)/2}2^1 & 0 & 0 & . & . & . \\
C_2^{(r-1)/2}2^2 & C_0^{(r-3)/2}2^0 & 0 & . & . & . \\
C_3^{(r-1)/2}2^3 & C_1^{(r-3)/2}2^1 & 0 & . & . & . \\
C_4^{(r-1)/2}2^4 & C_2^{(r-3)/2}2^2 & C_0^{(r-5)/2}2^0 & 0 & . & . \\
C_5^{(r-1)/2}2^5 & C_3^{(r-3)/2}2^3 & C_1^{(r-5)/2}2^1 & 0 & . & . \\
C_6^{(r-1)/2}2^6 & C_4^{(r-3)/2}2^4 & C_2^{(r-5)/2}2^2 & . & . & . \\
. & C_5^{(r-3)/2}2^5 & C_3^{(r-5)/2}2^3 & . & . & . \\
. & . & C_4^{(r-5)/2}2^4 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
C_{(r-3)/2}^{(r-1)/2}2^{(r-3)/2} & . & . & . & . & . \\
2^{(r-1)/2} & C_{(r-5)/2}^{(r-3)/2}2^{(r-5)/2} & . & . & . & . \\
0 & 2^{(r-3)/2} & C_{(r-7)/2}^{(r-5)/2}2^{(r-7)/2} & . & . & . \\
0 & 0 & 2^{(r-5)/2} & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . \\
. & . & 0 & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & 4 \\
. & . & . & . & . & 4
\end{pmatrix}
$$

$$C_{even}=\begin{pmatrix}
C_0^{(r-2)/2}2^0 & 0 & 0 & . & . & . \\
C_1^{(r-2)/2}2^1 & 0 & 0 & . & . & . \\
C_2^{(r-2)/2}2^2 & C_0^{(r-4)/2}2^0 & 0 & . & . & . \\
C_3^{(r-2)/2}2^3 & C_1^{(r-4)/2}2^1 & 0 & . & . & . \\
C_4^{(r-2)/2}2^4 & C_2^{(r-4)/2}2^2 & C_0^{(r-6)/2}2^0 & 0 & . & . \\
C_5^{(r-2)/2}2^5 & C_3^{(r-4)/2}2^3 & C_1^{(r-6)/2}2^1 & 0 & . & . \\
C_6^{(r-2)/2}2^6 & C_4^{(r-4)/2}2^4 & C_2^{(r-6)/2}2^2 & . & . & . \\
. & C_5^{(r-4)/2}2^5 & C_3^{(r-6)/2}2^3 & . & . & . \\
. & . & C_4^{(r-6)/2}2^4 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
C_{(r-4)/2}^{(r-2)/2}2^{(r-4)/2} & . & . & . & . & . \\
2^{(r-2)/2} & C_{(r-6)/2}^{(r-4)/2}2^{(r-6)/2} & . & . & . & . \\
0 & 2^{(r-4)/2} & C_{(r-8)/2}^{(r-6)/2}2^{(r-8)/2} & . & . & . \\
0 & 0 & 2^{(r-6)/2} & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . \\
. & . & 0 & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & 2
\end{pmatrix}$$

ثم نحدد مصفوفة المعاملات للقوة الفردية الأدنى وهي r-2 ونرمز لها بـ M_{odd} وحجمها عمود واحد و $\frac{(r-3)}{2}$ صف وتحتوي على معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوة الفردية r-2 و بالطريقة نفسها نحدد مصفوفة المعاملات للقوة الزوجية الأدنى وهي r-2 ونرمز لها بـ M_{even} وحجمها عمود واحد و $\frac{(r-2)}{2}$ صف وتحتوي على معاملات صيغة مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوة الزوجية r-2 وفي الأتي الشكل العام لتلك المصفوفتين.

عندما نقوم بضرب المصفوفات الثلاث $F_{odd}\times C_{odd}\times M_{odd}=P_{odd}$ سوف نحصل على المصفوفة P_{odd} حجمها r-1 صف وعمود واحد وهذهِ المصفوفة هي ناتج تحليل الصيغة 9 إلى عواملها الأولية من دون إدخال المجموع $\sum_{k=2}^{n-2}$ عليها. أما عندما نضرب المصفوفات الثلاث $F_{even}\times C_{even}\times M_{even}=P_{even}$ فسوف نحصل على المصفوفة P_{even} حجمها r صف وعمود واحد وهذهِ

$$M_{even}=\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ . \\ . \\ . \\ m_{(r-4)/2} \\ m_{(r-2)/2} \end{pmatrix} \qquad M_{odd}=\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ . \\ . \\ . \\ m_{(r-5)/2} \\ m_{(r-3)/2} \end{pmatrix}$$

المصفوفة هي ناتج تحليل الصيغة 10 إلى عواملها الأولية من دون إدخال المجموع $\sum_{k=2}^{n-2}$ عليها. من الواضح أن المصفوفتين P_{odd} و P_{even} هما نتيجة الخطوة الأولى من اشتقاق الصيغة للقوة r.

الخطوة الثانية وهي إدخال $\sum_{k=2}^{n-2}$ على الصيغتين 7 و 8 للقوى الفردية والزوجية على التوالي وتتشابه العمليات الحسابية في هذهِ الخطوة بين القوى الفردية والزوجية إذ تكون إشارة أول عنصر في المصفوفتين P_{odd} و P_{even} سالبة وبطرحها من معامل المقام m_0 للقوة r-2 سوف نحصل على معامل المقام m_0 للقوة r ثم ننقل نصف عناصر المصفوفتين اللتين تحملان التسلسلات الفردية ابتداءً من التسلسل 3 في المصفوفتين P_{odd} و P_{even} إلى أخر تسلسل فردي للعنصر ونضعها في المصفوفتين Q_{odd} و Q_{even} على التوالي فالعنصر الذي يحمل التسلسل I في المصفوفتين P_{odd} و P_{even} (I>3) سوف يتم وضعهُ في الموقع $\frac{(I+1)}{2}$ في المصفوفتين Q_{odd} و Q_{even} على التوالي و دائماً قيمة العنصر الأول تكون واحداً في المصفوفتين Q_{odd} و Q_{even} علماً بان حجم المصفوفة Q_{odd} هو عمود واحد و $\frac{(r-1)}{2}$ صف وحجم المصفوفة Q_{even} هو عمود واحد و $\frac{r}{2}$ صف ويعود السبب في حذف نصف عناصر المصفوفتين P_{odd} و P_{even} إلى حالة التلاشي التي ذكرناها في الجانب النظري للحدود التي تحمل القوى الزوجية في الصيغة 7 مع الحد $(2A)\sum_{k=2}^{n-2} k^{r-2}$ وكذلك تلاشي الحدود التي تحمل القوى الفردية في الصيغة 8 مع الحد $(2A)\sum_{k=2}^{n-2} k^{r-2}$ وقد توصل الباحث إلى حالة التلاشي خلال عمليات الاشتقاق اليدوي وتم عكسها على الاشتقاق الآلي.

ثم نقوم بقسمة عناصر المصفوفتين Q_{odd} و Q_{even} ابتداءً من العنصر الثاني والذي نقسمهُ على المعامل m_0 للقوة r-2 و نقسم العنصر الثالث على المعامل m_0 للقوة r-4 ونقسم العنصر الرابع على المعامل m_0 للقوة r-6 وصولاً إلى أخر عنصر في المصفوفتين Q_{odd} و Q_{even} إذ نقوم بقسمة أخر عنصر في المصفوفة Q_{odd} على المعامل $m_0 = 8$ للقوة الفردية $r = 3$ و نقوم بقسمة أخر عنصر في المصفوفة Q_{even} على المعامل $m_0 = 6$ للقوة الزوجية $r = 2$ ويمكن أجراء عملية القسمة تلك باستعمال المصفوفات إذ نضرب معكوس Inverse المصفوفة R_{odd}^{-1} بالمصفوفة Q_{odd} للحصول على S_{odd} وكما يأتي $R_{odd}^{-1} \times Q_{odd} = S_{odd}$ و يكون حجم المصفوفة الناتجة S_{odd} بحجم المصفوفة Q_{odd} هذا للقوى الفردية أما للقوى الزوجية فنضرب معكوس المصفوفة R_{even}^{-1} بالمصفوفة Q_{even} للحصول على S_{even} وكما يأتي $R_{even}^{-1} \times Q_{even} = S_{even}$ و يكون حجم المصفوفة الناتجة S_{even} بحجم المصفوفة Q_{even} والمصفوفتان R_{odd} و R_{even} مصفوفتان قطريتان مربعتان حجمهما $\frac{(r-1)}{2} \times \frac{(r-1)}{2}$ و $\frac{r}{2} \times \frac{r}{2}$ على التوالي وعناصرهما

$$R_{even} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & m_0^{(r-2)} & 0 & . & . \\ 0 & 0 & m_0^{(r-4)} & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & m_0^{(r-6)} & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad R_{odd} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & m_0^{(r-2)} & 0 & . & . \\ 0 & 0 & m_0^{(r-4)} & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & m_0^{(r-6)} & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

القطرية هي معاملات المقام للقوى r-2 و r-4 و r-6 .. الخ وفي الأتي شكل تلك المصفوفتين
ومن ثم نضيف القيمة 2+ إلى العنصر الثاني فقط في المصفوفتين S_{odd} و S_{even} بحسب الصيغتين 7 و 8.
ونجري أخر عملية ضرب مصفوفات وهي ضرب مصفوفة المعاملات T_{odd} و T_{even} وهما مصفوفتان مربعتان حجمهما $\frac{(r-1)}{2}\times\frac{(r-1)}{2}$ و $\frac{r}{2}\times\frac{r}{2}$ على التولي بالمصفوفة S_{odd} و S_{even} للقوى الفردية و الزوجية على التوالي وينتج من عملية الضرب تلك المصفوفة U_{odd} و حجم تلك المصفوفة هو عمود واحد و $\frac{(r-1)}{2}$ صف أي أن $T_{odd}\times S_{odd}=U_{odd}$ تحتوي المصفوفة الناتجة على معامل البسط للقوة الفردية r . و المصفوفة U_{even} و حجم تلك المصفوفة هو عمود واحد و $\frac{r}{2}$ صف أي أن $T_{even}\times S_{even}=U_{even}$ تحتوي المصفوفة الناتجة على معامل البسط للقوة الزوجية r . وفي الأتي شكل مصفوفتي المعاملات T_{odd} و T_{even}

$$T_{even}=\begin{pmatrix} m_1^{(r-2)} & 0 & 0 & . & . & . & . \\ m_2^{(r-2)} & m_1^{(r-2)} & 0 & . & . & . & . \\ m_3^{(r-2)} & m_2^{(r-2)} & m_1^{(r-4)} & 0 & . & . \\ m_4^{(r-2)} & m_3^{(r-2)} & m_2^{(r-4)} & m_1^{(r-6)} & . \\ . & . & . & . & . & . \\ m_{(r-2)/2}^{(r-2)} & m_{(r-4)/2}^{(r-2)} & . & . & 3 & . \\ 0 & m_{(r-2)/2}^{(r-2)} & m_{(r-4)/2}^{(r-4)} & . & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{odd}=\begin{pmatrix} m_1^{(r-2)} & 0 & 0 & . & . & . & . \\ m_2^{(r-2)} & m_1^{(r-2)} & 0 & . & . & . & . \\ m_3^{(r-2)} & m_2^{(r-2)} & m_1^{(r-4)} & 0 & . & . \\ m_4^{(r-2)} & m_3^{(r-2)} & m_2^{(r-4)} & m_1^{(r-6)} & . \\ . & . & . & . & . & . \\ m_{(r-3)/2}^{(r-2)} & m_{(r-5)/2}^{(r-2)} & . & . & 1 & . \\ 0 & m_{(r-3)/2}^{(r-2)} & m_{(r-5)/2}^{(r-4)} & . & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة وهي خارج الاشتقاق إذ بعد الحصول على معاملات البسط في المصفوفة U_{odd} و U_{even} وتكون قيم المعاملات مرتبة من المعلمة الأولى m_1 في الصف الأول إلى المعامل الأخيرة في الصف $\frac{(r-1)}{2}$ و $\frac{r}{2}$ على التوالي ولكن بعض تلك القيم عبارة عن كسور عشرية rational number ولتحويلها إلى أعداد صحيحة نستخرج المضاعف المشترك الأصغر ونضرب جميع معاملات المصفوفة U_{odd} و U_{even} بهذا المضاعف فضلاً عن معامل المقام وأحيانا نستخرج العامل المشترك الأعظم بعد ذلك للتقليل من قيم المعاملات بقسمة جميع معاملات البسط ومعامل المقام عليهِ.

النتائج والمناقشة :

في هذا البحث تم التوصل لعدة نتائج منها استعمال المتغيرين A وB وكليهما بدلالة المتغير البسيط n أديا إلى أيجاد الاشتقاق الشامل لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى التي لم تكن ممكنة مع استعمال المتغير البسيط n بصورة مباشرة. ونلاحظ ظهور المتغير A مع الصيغ ذات القوى الزوجية وتغيرهُ من A إلى B مع الصيغ ذات القوى الفردية. لقد وجد الباحث بأن الاشتقاق المباشر لصيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى بصورة مباشرة صعب ومعقد ويتطلب عشرات الصفحات للصيغة الواحدة و ذلك لان الأعداد الطبيعية الفردية لها سلوك خاص يختلف عن سلوك الأعداد الطبيعية الزوجية ومن الأفضل عدم جمعهما في صيغة واحدة و لكن من خلال ألتوصل إلى العلاقة المبينة في هدف البحث بين صيغ مجموع الأعداد الطبيعية للقوى و صيغ مجموع الأعداد الطبيعية الزوجية للقوى وهذهِ الأخيرة

يكون اشتقاقها أكثر سهولة مقارنةً بالأولى. لذلك تمت الاستفادة من تلك العلاقة.

و على غرار هذهِ العلاقات يمكن التوسع في أيجاد علاقات بين الصيغ للمجموع المزدوج للأعداد الطبيعية الزوجية للقوى مع صيغ المجموع المزدوج للأعداد الطبيعية الفردية للقوى مع صيغ المجموع المزدوج للأعداد الطبيعية للقوى كذلك يمكن التوسع في هذا المجال لإيجاد اشتقاق شامل لصيغ المجاميع الثلاثية والرباعية ... الخ للقوى.

المصادر:

1. Rosen, H.K. and Michaels, J.G. and Gross, J.L. and Grossman , J.W. and Shier, D.R. , 2000 , "Discrete And Combinatorial Mathematics". New York. CPC press. P1183.

2.Conway, J.H. , 1996 , "The Book of Numbers". New York. Springer-Verlag. P 106.

3.Grattan-Guinness, I. , 2005 , "Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940". New York. ELSEVIER. P 1022.

4.Bruldi, A.R. , 1997 , "Introduction Combinatorics". Third Edition. New York. Elsevier. P 119.

5.Merris, R. , 2003 , "Combinatorics". Second Edition. New York. John Wiley & Sons. P 556.

6.Weil, A. , 1974 , "Basic Number Theory". Third Edition. New York. Springer-Verlag. P 325.

7.Gilbert , William J and Keith, Nicholson W. ,2004, " Modern Algebra With Applications " . Second Edition . New Jersey . John Wiley & Sons . P 347.

8.Villegas, F.R. , 2007 , "Experimental Number Theory". London. Oxford University Press. P 214.

9.Garnier, R. and Taylor, J. , 2002 , "Discrete Mathematics for New Technology". second Edition. London. Institute of Physics Publishing. P 749.

10.Gathen, Joachim Von Zur and JÜrgen Gerhard . ,1999, "Modern Computer Algebra" . United Kingdom . Cambridge University Press . P 753.

11.Houpis, C.H. and D'Azzo, J.J. and Sheldon, S.N. , 2003 , "Linear Control System Analysis and Design with Matlab". Fifth Edition. New York. Marcel Dekker, Inc. P 822.

12.Kisacanin, B. , 2002 , "Mathematical Problems and Proofs Combinatorics, Number Theory, and Geometry". New York. Kluwer Academic Publishers. P 220.

13.Shoup , V. , 2005 , "A Computational Introduction to Number Theory and Algebra". London. Cambridge University Press. P 517.

Derivation Power Sums of Even Integer Number Formula

Rafid Fayadh Hamdi *

- Al-mustansuriah University /

Abstract :

This paper included derivative method for the even r power sums of even integer numbers formula to approach high even (r+2) power sums of even integer numbers formula so on we can approach from derivative odd r power sums of even integer numbers formula to high odd (r+2) power sums of even integer numbers formula this derivative excellence have ability to used by computer programming language or any application like Microsoft Office Excel. Also this research discovered the relationship between r power sums of even integer numbers formula and both formulas for same power sums of odd integer numbers formula and for r power sums of all integer numbers formula in another way.