# دراسة خصائص طريقة الانتروبي العظمى العامة عن طريق تقدير معلمات إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات

# Study the Properties of Generalized Maximum Entropy through of Estimate the Four-Parameter Weibull Growth Model

أ.م.د باسم شليبه مسلم
لجامعة العراقية / كلية الادارة والاقتصاد
drbasimstatistics@gmail.com

أ.م.د سيف الدين هاشم قمر
الجامعة العراقية / كلية الإدارة والاقتصاد
dr.saifhkamar@gmail.com

**الملخص**

جرى في هذا البحث دراسة خصائص طريقة الانتروبي العظمى العامة عند تقدير معلمات انموذج نمو ويبل ذي الأربع معلمات باستعمال المحاكاة وفقا لمتطلبات الطريقة (ابعاد موجه متغيرات الدعم وقيم الثابت C) فضلا عن (نوع توزيع الاخطاء العشوائية وحجم العينة) واعتمادا على مقياس المقارنة المتمثل بمتوسط مربعات الخطأ MSE لأنموذج الظاهرة المدروسة جرى تحديد الحالات المثلى في المحاكاة وقد جرى توليد البيانات وفقاً للتوزيع الطبيعي القياسي ولتوزيع t بدرجة حرية (3)، وتوزيع مربع كاي بدرجة حرية (4) بإحجام عينات (30, 20, 10) فضلا عن افتراض قيم للثابت C (9 ,7 ,5 ,3 ,1) ولموجه متغيرات الدعم M (5, 7) وأظهرت نتائج المحاكاة تأثر التوزيعان الطبيعي القياسي ومربع كاي بدرجة حرية (4) بتغيير قيمة بُعد موجه المتغيرات بين (5, 7) على اختيار قيمة الثابت C لإحجام العينات كافة، اذ عند M = 5 يفضل اختيارها من الفترة (3, 5) لإحجام العينات (10, 20) وتبدأ بالانخفاض كلما ازداد حجم العينة، اما عند M = 7 فيكون الاختيار معاكس لحالة M = 5 بالنسبة للتوزيع الطبيعي القياسي في حين لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية (4) يفضل اختيار قيمة كبيرة لحجم عينة (10) وقيمة من الفترة (3, 5) لإحجام العينات (20, 30)، اما في حالة توزيع t بدرجة حرية (3) فلا يوجد تأثير لاختيار قيمة الثابت C بتغير بُعد موجه متغيرات الدعم ويفضل اختيار القيمة من الفترة (5, 9) وترتفع هذه القيمة مع ازدياد حجم العينة.

**Abstract**

In this research, the characteristics of the Generalized Maximum Entropy method were studied when estimating the parameters of the four-parameter Weibull growth model using simulation according to the requirements of the method (the dimensions of the support variables vector, and the values of the constant C) as well as the type of random error distribution and the sample size. Depending on the comparison scale represented by the mean error squares MSE for the studied phenomenon model, optimal cases were simulated. The data were generated according to the standard normal distribution and t distribution with (3) degree of freedom, and Chi-square distribution with (4) degree of freedom, with the sample size (10, 20, 30), as well as assuming the constant C of (1, 3, 5, 7, 9) and the support variables vector M of (5, 7). The simulation results showed the effect of the normal distribution and the Chi-square distribution with degree of freedom of (4) by changing the dimension of the support variables vector between (5, 7) on choosing the value of the constant C for all sample sizes. As at M = 5 it is preferable to choose it from the period (3, 5) for the sample size (10, 20) and begins to decrease as the sample size increases, but at M = 7, the choice is opposite to the case of M = 5 in relation to the standard normal distribution, whereas for the Chi-square distribution with a degree of freedom (4) it is preferable to choose a large value for the sample

size (10) and a value from The period (3, 5) for the sample size (20, 30), but in the case of t distribution with a degree of freedom (3), there is no effect for choosing the value of the constant C by changing the dimension of support variables vector, and it is preferable to choose the value from the period (5, 9) and this value increases with increasing sample size.

## 1- المقدمة Introduction

عادة ما يقوم الباحثون بمحاولات اختيار الطريقة المناسبة لتقدير معلمات توزيع احصائي او أنموذج رياضي للظاهرة تحت الدراسة بعد التأكد من جودة تقديراتها من حيث تحيزها وامتلاكها اقل متوسط مربعات الخطأ ولان احتساب قيمة متوسط مربعات الخطأ للتوزيع الاحصائي بمختلف أنواعه او للأنموذج الرياضي (الخطي وغير الخطي) يعتمد على قيم مقدرات المعلمات لذا اصبح متوسط مربعات الخطأ مقياسا لتحديد الافضل عند المقارنة بحسب الحالات الافتراضية المقدمة من قبل الباحثين عند اجراء المحاكاة او اعتمادا على التطبيق العملي وهذه المحاولات تكون باتجاهين: الاول منها اجراء مقارنة بين عدة طرائق للوصول الى الأفضل والثاني دراسة خصائص طريقة التقدير على انفراد تبعا لحالات افتراضية مختلفة داخل الطريقة نفسها.

إنَّ لأهمية أنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات Four-Parameter Weibull Growth Model وتفضيله على انواع نماذج نمو ويبل الاخرى ذات المعلمة الواحدة والاثنتان والثلاث [5]، ادى أنْ يكون موضوعا لكثير من البحوث التي تناولت تقدير المعلمات والمقارنة بين طرائق التقدير التي اندرجت ضمن الطرائق التقليدية والبيزية وفق الاتجاه الاول من محاولات الباحثين منها: Catherine [2]، Fekedulegn, et al. [8]، Dimpal and Munindra [5]، Dimpal and Munindra [6] والباحثان مسلم وقمر[1]، وكذلك الباحثان Kamar and Msallam [9] نشرا بحثاً تطرقا فيه الى مقارنة تقديرات طريقة الانتروبي العظمى العامة وطريقة بيز لمعلمات انموذج نمو ويبل ذو الاربع معلمات بافتراض ابعاد لموجه متغيرات الدعم وقيمة للثابت C. اما محاولات الباحثين ضمن الاتجاه الثاني وخصوصاً مع طريقة الانتروبي العظمى العامة عند التقدير لأحد نماذج النمو فتتصف بالقلة والندرة وتحديداً مع أنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات، كون أنَّ من متطلباتها تحديد ابعاد موجه متغيرات الدعم(support variables vector) وتحديد القيمة العددية الافتراضية الموجبة للثابت C وهذه المتطلبات ليست ثابتة وتخضع للحالات الافتراضية من قبل الباحثين مما يستدعي البحث لتحديد الحالات المثلى لكل من ابعاد موجه الدعم وقيمة الثابت C بحسب نوع توزيع الظاهرة وحجم العينة قبل اجراء عملية التقدير بهذه الطريقة لأي ظاهرة تحت الدراسة بشكل عام وأنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات بشكل خاص.

إنَّ هدف البحث هو دراسة خصائص طريقة الانتروبي العظمى العامة لتحديد الحالات المثلى لمتطلباتها عند تقدير معلمات أنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات Four-Parameter Weibull Growth Model باستعمال المحاكاة بوجود ثلاثة توزيعات افتراضية (التوزيع الطبيعي القياسي توزيع t بثلاث درجات حرية، توزيع مربع كاي بأربع درجات حرية) وبإبعاد افتراضية لموجه الدعم M (5, 7) وبقيم افتراضية للثابت C (1, 3, 5, 7, 9) وباستعمال مقياس المقارنة لقيم متوسط مربعات الخطأ MSE للأنموذج تبعاً لجميع حالات المتطلبات التي جرى افتراضها في المحاكاة فضلا عن احجام العينة (10, 20, 30) سيجري تحديد الحالات المثلى لغرض تبنيها عند عملية التقدير. ولتحقيق هدف البحث فقد جرى تقسيمه على اربعة مباحث الاول تضمن المقدمة وهدف البحث والثاني الجانب النظري والثالث المحاكاة والنتائج وأخيرا الاستنتاجات

## 2- الجانب النظري

### 2-1 أنموذج نمو ويبل ذو الاربع معلمات Four-Parameter Weibull Growth Model

يأخذ أنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات الصيغة الآتية [8]:

$$\omega(t) = \beta_0 - \beta_1 \exp(-\beta_2 t^{\beta_3}) + \varepsilon \quad (1)$$

إذ إنَّ:

$\omega(t)$ تمثل حجم النمو عند الزمن $t$، $\beta_0$ تمثل حجم النمو الأعظم أي عند $t \to \infty$، $\beta_1$ معلمة المقياس scale وترتبط بالقيمة ألأولية $\beta_2$ تمثل معدل النمو النسبي $\beta_3$ تمثل معلمة الشكل shape، $\varepsilon$ يمثل حد الخطأ العشوائي.

ويُعد الانموذج من نماذج النمو الملتوية التماثل عندما تكون $\beta_3 > 1$ وفيما عدا ذلك فلا توجد نقطة انقلاب (pp 48-49 [11])، وكأي أنموذج نمو ملتوي يكون له جزء يتزايد فيه شكل منحنى الأنموذج بزيادة متزايدة ثم ينقلب عند نقطة محددة إلى الزيادة المتناقصة مما يولد شكلاً ملتوياً يتماثل فيه جزئي المنحنى بدرجة كبيرة ، أما في تحليلات النمو البيولوجي فتكون $\beta_2$ و $\beta_3$ موجبة دائما [5].

ويمكن إعادة صياغة أنموذج ويبل الموضح في المعادلة (1) بصيغة الانحدار كالآتي:

$$\omega(t_i) = f(t_i;\beta) + \varepsilon_i \quad (2)$$

إذ إنَّ $f(t_i;\beta) = \beta_0 - \beta_1 \exp(-\beta_2 t_i^{\beta_3})$ تمثل دالة الاستجابة غير الخطية الموضحة في الصيغة (1)، وأن $\omega(t_i)$ متغير الاستجابة للمشاهدة (i)، علماً أن $i = 1, 2, \ldots, n$.

وبافتراض أنَّ الأخطاء العشوائية غير مرتبطة وباستخدام مفكوك سلسلة تايلر للاستجابة غير الخطية $f(t_i;\beta)$ الموضحة في الصيغة (2) [10]، واختصار هذا المفكوك عند المشتقة الأولى ينتج:

$$f(t_i;\beta) = f(t_i;\beta^{(0)}) + \sum_{j=1}^{4}\left[\frac{\partial f(t_i;\beta)}{\partial \beta_j}\right]_{\beta=\beta^{(0)}} (\beta_j - \beta_j^{(0)}) \quad (3)$$

وبافتراض أن $f_i^{(0)} = f(t_i;\beta^{(0)})$ و $\theta_j^{(0)} = \beta_j - \beta_j^{(0)}$، وأن: $Z_{ij}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(t_i;\beta)}{\partial \beta_j}\right]_{\beta=\beta^{(0)}}$

والتعويض بها بالصيغة (3) ومن ثم في الأنموذج الموضح بالصيغة (2) نحصل على الآتي:

$$\omega(t_i) = f_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{4} Z_{ij}^{(0)}\theta_j^{(0)} + \varepsilon_i$$

ومنه يمكن الحصول على:

$$\omega(t_i) - f_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} Z_{ij}^{(0)}\theta_j^{(0)} + \varepsilon_i \quad (4)$$

والصيغة (4) هي صيغة خطية يمكن كتابتها بصيغة المصفوفات كالآتي:

$$\omega^*(t) = Z^{(0)}\theta^{(0)} + \varepsilon \quad (5)$$

إذ إنَّ:

$\omega^*(t)$ : موجه من مرتبة (n×1) لمتغير الاستجابة $(\omega^*(t) = \omega(t) - f^{(0)})$، $Z^{(0)}$ : مصفوفة من مرتبة (n×4) للمتغيرات التوضيحية $\theta^{(0)}$ : موجه المعلمات المجهولة من مرتبة (4×1)، $\varepsilon$ : موجه الأخطاء العشوائية من مرتبة (n×1).

ل

**2-2 طريقة الانتروبي العظمى Generalized Maximum Entropy Method**

تستند هذه الطريقة على فكرة اعادة نمذجة أنموذج الانحدار الخطي (5) (re-formulation) عن طريق اعادة كتابة معلماته واخطائه العشوائية(re-parameterization) بصيغة القيم المتوقعة (expected values) اذ تتم كتابة معلماته $\theta_j^{(0)}$ (j=1, 2, 3, 4) والأخطاء العشوائية فيه $\varepsilon_i$ (i=1,2,…,n) على شكل تركيبة محدبة (Convex combination) بعدد محدد من المتغيرات (نقاط) الداعمة (support variables) التي تُحدد عددها أو أبعادها ما بين (2-7)، وليس بالضرورة ان يتساوى عدد المتغيرات الداعمة للمعلمات مع الأخطاء العشوائية [3].

ويمكن تعريف التركيبة المحدبة لمعلمات الأنموذج (5) لبعد M كالآتي:

$$\theta_j^{(0)} = d_{j1}\,P_{j1} + d_{j2}\,P_{j2} + d_{j3}\,P_{j3} + \cdots . + d_{jM}\,P_{jM} = \sum_{s=1}^{M} d_{js}\,P_{js} = \underline{d}_j\,P_j \quad (6)$$

j=1, 2, 3, 4

إذ إنَّ $P_{js}$ تمثل قيمة احتمالية (s=1, …, M) وأن $2 \le M \le 7$، كما أن $(0 \le P_{js} \le 1)$ و $(\sum_{s=1}^{M} P_{js} = 1)$.

يجري تقدير $P_{js}$ بالاعتماد على دالة الانتروبي شانون (Shannon's entropy function) وفي هذا البحث جرى اختيار حالتين من بعد موجه متغيرات الدعم M هي (5, 7) فعندما تكون M =5 تكتب المعادلة (6) كالآتي:

$$\theta_j^{(0)} = d_{j1}\,P_{j1} + d_{j2}\,P_{j2} + d_{j3}\,P_{j3} + d_{j4}\,P_{j4} + d_{j5}\,P_{j5} = \sum_{s=1}^{5} d_{js}\,P_{js} = \underline{d}_j\,P_j \quad (7)$$

j=1, 2, 3, 4

وبإعادة كتابة المعادلة (7) بدلالة المصفوفات لحالة M =5 كالآتي:

$$\theta^{(0)} = \begin{bmatrix} \theta_1^{(0)} \\ \theta_2^{(0)} \\ \theta_3^{(0)} \\ \theta_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 P_1 \\ \underline{d}_2 P_2 \\ \underline{d}_3 P_3 \\ \underline{d}_4 P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{d}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{d}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{d}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = D.P \quad (8)$$

إذ إنَّ:

D: مصفوفة قطرية من مرتبة (4×20) من موجه المتغيرات الداعمة المعرفة في المعادلة (7).

P: موجه من مرتبة (1×20) من القيم الاعتيادية المعرفة بالمعادلة (7).

وإنَّ $\acute{d}_j$ : موجه صفي لمتغيرات دعم المعلمة j من مرتبة (1x5) وعناصره كالآتي:

$$\acute{d}_j = [-c, -c/2, 0, c/2, c] \quad (9)$$

وان c: قيمة عددية افتراضية موجبة.

والخطوات السابقة نفسها يمكن تطبيقها على الاخطاء العشوائية عند بعد M =5 كالآتي:

$$\varepsilon_i = r_{i1}\,v_{i1} + r_{i2}\,v_{i2} + r_{i3}\,v_{i3} + r_{i4}\,v_{i4} + r_{i5}\,v_{i5} = \sum_{k=1}^{5} r_{ik}\,v_{ik} = \underline{r}_i'\,v_i \quad (10)$$

i=1, 2, 3,.., n

إذ إنّ:

$v_{ik}$ : يمثل قيمة احتمالية (k=1, 2, 3, 4, 5) وأن ($0 \le v_{ik} \le 1$) ($\sum_{k=1}^{5} v_{ik} = 1$) يجري تقديرها بالاعتماد على دالة الانتروبي شانون (Shannon's entropy function).

وبدلالة المصفوفات تكون:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}'_1 v_1 \\ \underline{r}'_2 v_2 \\ \vdots \\ \underline{r}'_n v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}'_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \underline{r}'_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \underline{r}'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = R.V \quad (11)$$

إذ إنَّ:

R: مصفوفة قطرية من مرتبة (n×5n) من المتغيرات الداعمة والمعرفة بالمعادلة (10).

V: موجه من مرتبة (5n×1) من القيم الاحتمالية المعرفة بالمعادلة (10).

وإنَّ: $\acute{r}_i$ موجه صفي لمتغيرات الدعم الخطا العشوائي i وعناصره كالآتي:

$$\underline{r}'_i = [-c, -c/2, 0, c/2, c] \quad (12)$$

نُعيد كتابة أنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات المعرف بالصيغة (5) بعد تعويض المعادلتين (8) و (11) كالآتي:

$$\omega^*_{(t)} = Z^{(0)}.D.P + R.V \quad (13)$$

ويلاحظ أنَّ متجهي القيم الاحتمالية للمعلمات والاخطاء العشوائية في الإنموذج (13) مجهولة يتطلب تقديرها (ليجري تقدير قيم $\theta_j^{(0)}$ بالاعتماد على قانون التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع $(E(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} Xp(x_i))$ ولتقدير المتجهين (V, P) نعظم دالة الانتروبي شانون باستخدام مضاعف لاكرانج بعد تحديد القيود كالآتي:

$$F(P,V) = -\acute{P} \ln P - \acute{V} \ln V \quad (14)$$

إذ إنَّ: $F(P,V)$ تمثل دالة انتروبي شانون.

إنَّ قيود Normalization ضرورية [4]، اذ يجب ان يكون مجموع عناصر موجه الاحتمالات لكل معلمة فيه والأخطاء العشوائية في الانموذج (13) مساوية الى الواحد الصحيح ويجري صياغة القيود كل المعلمات كالآتي:

$$\begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{5} P_{1s} \\ \sum_{s=1}^{5} P_{2s} \\ \sum_{s=1}^{5} P_{3s} \\ \sum_{s=1}^{5} P_{4s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \acute{1}.P_1 \\ \acute{1}.P_2 \\ \acute{1}.P_3 \\ \acute{1}.P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \acute{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \acute{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \acute{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \acute{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$= I^*_{4,20} . P_{20,1} = 1_{4,1} \quad (16)$$

إذ إنَّ:

$\acute{1}$: موجه صفي عناصره (1 1 1 1) وأن $P_j$ موجه الاحتمالات الخاصة بالمعلمة j عناصره :

$(p_{j1} \quad p_{j2} \quad p_{j3} \quad p_{j4} \quad p_{j5})$ , j= 1,2,3,4

وان المصفوفة $I^*_{4,20}$ في الصيغة (16) تكون:

$$I^*_{4,20} = I_4 \otimes \underline{\acute{1}}_{1,5} \quad (17)$$

$I_4$ مصفوفة الوحدة (Identity Matrix) من مرتبة (4×4)، وان $\otimes$ تمثل خاصية الضرب المباشر (kronecker product).

وبإتباع الخطوات السابقة نفسها نحصل على القيمة النهائية لقيود الاخطاء العشوائية كالآتي:

$$J^{*}_{n,5n}\cdot V = \underline{1}_{n,1} \quad , \quad J^{*}_{n,5n} = I_n \otimes \acute{1}_{1,5}$$
(18)

والصيغ (16) ،(18) تمثل قيود Normalization لأنموذج نمو ويبل ذو الاربع معلمات المعرف بالصيغة (13).

وعليه فان دالة لاكرانج لدالة الانتروبي شانون تكون كالآتي:

$$L = F(P,V) + \acute{\lambda}\left[\omega^{*}_{(t)} - Z^{(0)}.D.P - R.V\right] + \acute{\Theta}\left[\left(1_4 - I_4 \otimes \underline{\acute{1}}_{1,5}\right)P\right] + \acute{\Gamma}\left[\left(\underline{1}_n - I_n \otimes \underline{\acute{1}}_{1,5}\right)V\right]$$
(19)

إذ إنَّ λ و Θ و Γ معاملات لاكرانج.

وبأخذ المشتقات الجزئية لكل من (Γ, Θ, λ, V, P) ومساواتها للصفر واستخدام الطرق العددية نحصل على المقدرات [4]، ويلاحظ أنَّ هذا الطريق تكتنفه الصعوبة وكثير من التعقيد في عملية الاشتقاق الجزئي لذا عرض الباحث Ciavolino( [3] في وقت سابق فكرة للتعامل مع الدالة (14) مباشرة بعد إعادة كتابتها وقد جرى تبنيها في هذا البحث كما يأتي:

$$F(P,V) = -\left[\acute{P}_{1,20} \quad \acute{V}_{1,5n}\right]\begin{bmatrix}\ln P_{20,1}\\ \ln V_{5n,1}\end{bmatrix}$$
$$F(P^{*}) = -\acute{P}^{*}_{1,20+5n} \cdot \ln P^{*}_{20+5n,1}$$
(20)

وبالاعتماد على الدالة المعرفة في لغة MATLAB الآتية:

$$[P^{*}, fval] = fmincon(f, p_0, [\,], [\,], A, b, lb, ub, [\,])$$
(21)

$$A = \begin{bmatrix} I^{*}_{4,20} & 0_{4,5n} \\ 0_{n,20} & J^{*}_{n,5n} \\ \left(Z^{(0)}.D\right)_{n,20} & V_{n,5n}\end{bmatrix} \qquad b_{(4+2n),1} = \begin{bmatrix} 1_{n+4,1} \\ \omega^{*}_{(t)}\end{bmatrix}$$

إذ إنَّ:

يمكن الحصول على تقديرات لموجه الاحتمالات (V, P) دفعة واحدة، اذ إنَّ الدالة (21) تعتمد على اجراء تكراري لحين الوصول الى القيم التي تعتمد عندما تتساوى قيمتين متتاليتين ويتطلب توفر موجه اولي $p_0$ (initial vector) الذي تكون قيمه بين الصفر والواحد الصحيح وبتقدير موجهي (V, P) يجري تعويضهما في الصيغة (13).

وتجدر الاشارة الى أنَّ ما تقدم جرى الوصول اليه عندما يكون بُعدي موجه المتغيرات الداعمة للمعلمات والأخطاء العشوائية (M) مساويا الى 5، ويمكن اتباع الخطوات نفسها عندما تكون M=7 لذا يجري كتابة المعادلة (20) وما بعدها كالآتي:

$$F(P^{*}) = -\acute{P}^{*}_{1,28+7n} \cdot \ln P^{*}_{28+7n,1}$$
(22)

$$A = \begin{bmatrix} I^{*}_{4,28} & 0_{4,7n} \\ 0_{n,28} & J^{*}_{n,7n} \\ \left(Z^{(0)}.D\right)_{n,28} & V_{n,7n}\end{bmatrix} \qquad b_{(4+2n),1} = \begin{bmatrix} 1_{n+4,1} \\ \omega^{*}_{(t)}\end{bmatrix}$$

إذ إنَّ:

## 3- المحاكاة والنتائج Simulation and results

عند اجراء المحاكاة لدراسة خصائص انموذج نمو ويبل ذو الاربع معلمات جرى افتراض ثلاثة توزيعات للأخطاء العشوائية وهي (التوزيع الطبيعي القياسي، توزيع t بثلاث درجات حرية، توزيع مربع كاي بأربع درجات حرية) بإحجام عينات (30 ,10 ,20) وبُعدين لموجه متغيرات الدعم (5, 7) وكذلك افتراض قيم الثابت C هي (1, 3, 5, 7, 9) وتحديد متوسط مربعات الخطأ MSE للأنموذج لكل حالة مقياساً للمقارنة لتحديد الحالات المثلى. ولتحقيق مصداقية المحاكاة، تم توليد البيانات اعتماداً على بيانات إنتاج النفط العراقي للمدة 2003-2015 وفقاً لمنظمة البلدان العربية المصدرة للنفط [9]،

واعتمدت طريقة توليد القيم الأولية المقترحة من قبل Dimpal و Munindra [5]، وباستعمال برنامج MATLAB اجريت المحاكاة بتكرار 1000 مرة وظهرت النتائج كالأتي:

جدول (1)

قيم متوسط مربعات الخطأ للأنموذج بحسب نوع التوزيع وبعد موجه متغيرات الدعم وقيم الثابت C وأحجام العينات

| مقياس المقارنة | | MSE when M=5 | | | MSE when M=7 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التوزيع | قيمة C | n=10 | n=20 | n=30 | n=10 | n=20 | n=30 |
| $N^{\sim}(0,1)$ | **1** | 0.2975 | 1147.892 | 32.2719 | 0.3644 | 0.5084 | 121.8225 |
| | **3** | 0.2845 | 122.0057 | 1178.2866 | 0.4539 | 0.8909 | 0.3036 |
| | **5** | 0.3001 | 0.2458 | 15878.1483 | 1.8344 | 0.8241 | 0.3862 |
| | **7** | 0.2923 | 0.2887 | 135.9636 | 0.9436 | 1.4124 | 0.5515 |
| | **9** | 0.2975 | 1147.892 | 32.2719 | 0.4064 | 2.2699 | 27.7847 |
| $t_{\delta=3}$ | **1** | 0.0683 | 0.0948 | 120.9805 | 0.0675 | 0.1162 | 0.003 |
| | **3** | 0.0424 | 0.0069 | 834.4449 | 0.8616 | 0.0617 | 25.5765 |
| | **5** | 0.1183 | 0.0805 | 1750.0182 | 0.0142 | 0.3992 | 0.0716 |
| | **7** | 0.9926 | 0.3106 | 6315.0916 | 0.166 | 0.008 | 0.0189 |
| | **9** | 0.018 | 616.606 | 60.3958 | 0.7544 | 0.5207 | 0.0029 |
| $x^2_{\delta=4}$ | **1** | 0.0938 | 0.0052 | 120.1544 | 0.1081 | 49.0643 | 0.0761 |
| | **3** | 0.1215 | 0.0261 | 1192.1652 | 0.6937 | 0.0023 | 0.0233 |
| | **5** | 0.059 | 0.005 | 1775.8381 | 0.6392 | 0.0184 | 0.01 |
| | **7** | 0.2101 | 0.0759 | 6160.3116 | 0.3496 | 0.1087 | 0.1084 |
| | **9** | 0.4298 | 605.0835 | 851.6876 | 0.9843 | 0.0335 | 0.0231 |

وبملاحظة الجدول (1) يمكن التوصل الى ما يأتي:

- فيما يتعلق بالبيانات التي توزعت وفق التوزيع الطبيعي:

أ) عندما M=5 ولحجم عينة 10 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل كانت عند قيمة C=3 تليها C=7، في حين لحجم عينة 20 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل ظهرت عند قيمة C=5 تليها C=7، ولحجم عينة 30 فإنه تبين أن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل عند قيمة C=1 و C=9 تليها C=7 وبفارق كبير.

ب) عندما M=7 ولحجم عينة 10 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل كانت عند قيمة C=1 تليها C=9، في حين لحجم عينة 20 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل ظهرت عند قيمة C=1 تليها C=5، ولحجم عينة 30 فإنه تبين أن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل عند قيمة C=3 تليها C=5 وبفارق كبير.

- فيما يتعلق بالبيانات التي توزعت وفق توزيع t بدرجة حرية (3):

أ) عندما M=5 ولحجم عينة 10 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل كانت عند قيمة C=9 تليها C=3، في حين لحجم عينة 20 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل ظهرت عند قيمة C=3 تليها C=5، ولحجم عينة 30 فإنه تبين أن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل عند قيمة C=9 تليها C=1 وبفارق كبير.

ب) عندما M=7 ولحجم عينة 10 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل كانت عند قيمة C=5 تليها C=1، في حين لحجم عينة 20 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل ظهرت عند قيمة C=7 تليها C=3، ولحجم عينة 30 فإنه تبين أن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل عند قيمة C=9 تليها C=1 وبفارق كبير.

- فيما يتعلق بالبيانات التي توزعت وفق توزيع مربع كاي بدرجة حرية (4) :

أ) عندما M=5 ولحجم عينة 10 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل كانت عند قيمة C=5 تليها C=1، في حين لحجم عينة 20 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل ظهرت عند قيمة C=5 تليها C=1، ولحجم عينة 30 فإنه تبين أن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل عند قيمة C=1 تليها C=9 وبفارق كبير.

ب) عندما M=7 ولحجم عينة 10 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل كانت عند قيمة C=9 تليها C=1، في حين لحجم عينة 20 فإن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل ظهرت عند قيمة C=3 تليها C=5، ولحجم عينة 30 فإنه تبين أن أقل قيمة متوسط مربعات خطأ لأنموذج نمو ويبل عند قيمة C=5 تليها C=9 .

وخلاصة ما تقدم يمكن توضيح القيم المثلى بحسب كل توزيع وبعد موجه متغيرات الدعم وأحجام العينات كما في الجدول الآتي:

جدول (2)يوضح القيم المثلى لـ C في التقدير بحسب نوع التوزيع وقيمة مرتبة موجه متغيرات الدعمM

| التوزيع | N | قيمة C المثلى في التقدير حالة M=5 | قيمة C المثلى في التقدير حالة M=7 |
|---|---|---|---|
| $N^{\sim}(0,1)$ | 10 | 3 | 1 |
| | 20 | 5 | 1 |
| | 30 | 1 | 3 |
| $t_{\delta=3}$ | 10 | 5 | 5 |
| | 20 | 7 | 7 |
| | 30 | 9 | 9 |
| $x^2_{\delta=4}$ | 10 | 5 | 9 |
| | 20 | 5 | 3 |
| | 30 | 1 | 5 |

**4- الاستنتاجات Conclusions**

اعتماداً على خلاصة النتائج الموضحة في جدول (2) نستنتج ما يأتي:

1) لتقدير معلمات انموذج نمو ويبل ذو الاربع معلمات الذي تتوزع اخطاءه توزيعاً طبيعياً قياسياً بطريقة الانتروبي العظمى العامة عند بُعد موجه متغيرات الدعم M=5 يجري اختيار قيمة C ما بين القيمتين (3, 5) ولإحجام العينات (10, 20) وتنخفض قيمة C المختارة عن القيمة 3 مع ازدياد حجم العينة عن 20 ووصوله الى حجم 30، في حين عند M=7 يجري اختيار قيمة C المساوية الى الواحد الصحيح لإحجام العينات (10, 20) وترتفع قيمة C المختارة عن الواحد الصحيح مع ازدياد حجم العينة عن 20 ووصوله الى حجم 30.

2) لتقدير معلمات انموذج نمو ويبل ذو الاربع معلمات الذي تتوزع اخطاءه توزيع $t_{\delta=3}$ بطريقة الانتروبي العظمى العامة ولكلاً بُعدي موجه متغيرات الدعم (5, 7) اختيار قيمة C ما بين القيمتين (5, 9) ولجميع احجام العينات وترتفع قيمة C المختارة عن القيمة 5 مع ازدياد حجم العينة ولا يؤثر تغير قيمة بُعد موجه متغيرات الدعم على جودة التقدير.

3) لتقدير معلمات انموذج نمو ويبل ذو الاربع معلمات الذي تتوزع اخطاءه توزيع مربع كاي بدرجة حرية 4 بطريقة الانتروبي العظمى العامة عند بُعد موجه متغيرات الدعم M=5 يجري اختيار قيمة C تساوي (5) ولإحجام العينات (10, 20) وتنخفض قيمة C المختارة عن القيمة 3 مع ازدياد حجم العينة عن 20 ووصوله الى حجم 30. في حين عند M=7 يتم اختيار قيمة C التي تبتعد عن القيمة 3 لإحجام العينات (10, 30) ويجري اختيار قيمة C تساوي القيمة 3 لحجم العينة 20.

**المصادر (References)**


1- مسلم، باسم شليبه وقمر، سيف الدين هاشم، (2019)، "دراسة مقارنة بين طريقة بيز وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق لتقدير معلمات إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات"، *مجلة واسط للعلوم الانسانية*، الاصدار 15، العدد 43، الصفحات 73-88.

2- Catherine S. Berkey, (1982), "Bayesian Approach for a Nonlinear Growth Model", *Biometrics*, Vol. 38, No. 4, pp. 953-961.

3- Ciavolino, E., (2007), "Modelling GME and PLS estimation methods for evaluating the Job Satisfaction in the Public Sector", *In: QMod 07, University of Helsingborg, Sweden, 18-20 June, Linköping University Electronic Press*, ISSN number: 1650-3740.

4- Ciavolino, E., Al-Nasser,A. D.(2010), "Information Theoretic Estimation Improvement to the Nonlinear Gompertz's Model Based on Ranked Set Sampling", *journal of applied quantitative methods*, Vol. 5, No. 2, pp. 317-330.

5- Dimpal Jyoti Mahanta and Munindra Borah, (2014), "Parameter Estimation of Weibull Growth Models in Forestry", *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, Vol. 8 No. 3, pp. 157-163.

6- Dimpal Jyoti Mahanta and Munindra Borah, (2017), "A Comparative Study of Nonlinear Growth Models on Teak (Tectonagrandis L.) in India", *Journal of Plant Science & Research*, Vol. 4, Issue 1, pp. 11-21.

7- Eruygur, H. Ozan, (2005), "Generalized maximum entropy (GME) estimator: formulation and a monte carlo study", *National Symposium on Econometrics and Statistics, Istanbul, Turkey*, May 26-27, Accessed: 15-10-2018, https://mpra.ub.uni-muenchen.de/12459/1/MPRA_paper_12459.pdf.

8- Fekedulegn, D., Mac Siurtain, M. P. and Colbert, J. J., (1999), "Parameter estimation of nonlinear growth models in forestry", *Silva Fennica*, Vol. 33, No. 4, pp. 327–336.

9- Kamar, S. H. and Msallam, B. SH., (2020), "Comparative study between Generalized Maximurn Entropy and Bayes Methods to Estimate the Four Parameter Weibull Growth Model", *Journal of Probability and Statistics*, Vol. 2020, pp. 1-7.

10- Organization of Arab Petroleum Exporting Countries OAPEC (2015), "Annual Statistical Report", http://oapecdbsys.oapecorg.org:8080/apex/f?p=101:4:943634539090::NO::P4_COUNTRY:106.

11- Sohn, J. K. and Kang, S. G., (1996), "Bayesian Estimation Procedure in Multiprocessor Non–Linear Dynamic Generalized Model", Communications in Statistics: Theory and Method, Taylor & Francis Group, London, 25, 2281–2296.

12- Grosjean, U. P, (2001), "Growth model of the reared sea urchin Paracentrotus lividus (Lamarck, 1816)", Thesis submitted in fulfilment of the degree of Doctor, Agronomic Sciences and Biological Engineering.