المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (25) 2013
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي السادس لكلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص[257-274]

التقدير والاختبارات الإحصائية حول معلمات نموذج انحدار Bessel المحور المعمم الخطي المُتعدد

د. هيفاء عبد الجواد سعيد*　　　　سرمد عبد الخالق صالح**

المستخلص

تم في هذا البحث التقدير والاختبارات الإحصائية حول مَعلمات نموذج انحدار (Bessel) المحور المعمم باستخدام الأسلوب اللابيزي (الكلاسيكي) تحت افتراض إن مَعلمات الشكل $(\lambda, \psi, \upsilon)$ معلومة. إذ تم استخدام طريقة الإمكان الأعظم في التقدير واستخدام معيار نسبة الإمكان لتكوين الاختبارات الإحصائية حول معلمات نموذج الانحدار. واستنتجنا أن التوزيع الاحتمالي لمقدر متجه المعلمات $\underline{\beta}$ يتبع توزيع (Bessel) مُتعدد المُتغيرات المحور المعمم وان احصاءة الاختبار لمتجه المعلمات $\underline{\beta}$ تحت فرضيتي العدم والبديلة تتبع توزيع F المركزي وتوزيع (F-Bessel) اللامركزي على الترتيب.

Estimation and Statistical tests For the Parameters of Multiple Linear Generalized Modified Bessel Regression Model

Abstract

This paper is concerned with the estimation and statistical tests of hypothesises around parameters of generalized modified Bessel linear regression model by Non-Bayesian (classical) techniques under the assumption that the shape parameters $(\lambda, \psi, \upsilon)$ are known . We used the maximum likelihood method in estimation and using the likelihood ratio criterion for structure statistical hypothesis tests around parameters of the Regression model .Also we noted that probability distribution for estimator of the vector of parameters $\underline{\beta}$, is following the generalized multivariate modified Bessel distribution and the statistic test for the vector of parameters $\underline{\beta}$ under the null hypothesis and alternative hypothesis are following the central F distribution and the non-central F-Bessel distribution respectively. .

* أستاذ مساعد / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

** باحث/ قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2013/10/8 ـــــــــــــــــــــــ تأريخ القبول 2013/11/21

(1) المقدمة

اغلب الأحيان يتم تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد عندما يكون حد الخطأ يتوزع طبيعياً، ولكن هنالك عدد من الحالات يكون فيها حد الخطأ ينتمي الى التوزيعات الاحتمالية ذات الذيول أو النهايات الثخينة أي أثقل من الوضع الطبيعي، في مثل هذه الحالة تكون التوزيعات المختلطة أكثر ملائمة ومن هذه التوزيعات توزيع (Bessel) متعدد المتغيرات المحور المعمم (Generalized Multivariate Modified Bessel distribution)، إذ أن هذا التوزيع اكثر عمومية من النماذج الذي تتضمن كلا التوزيعين (الطبيعي متعدد المتغيرات و t متعدد المتغيرات) كحالات خاصة ، وأعتبر توزيع (Bessel) متعدد المتغيرات المحور المعمم كحاله خاصة من توزيعات متعدد المتغيرات المتماثلة الزائدية (Hyprebola symmetric multivariate distributions).((Barndorff-Nielsen, (1978))، ولهذا التوزيع تطبيقات عملية في تشكيلة المناطق التي تتضمن عرض بيانات سوق الاسهم المالية، بيانات مراقبة الجودة والترشيح، تحليل الاشارات العشوائية. ((Thabane and Drekic, (2003)) .

وقَدم ((Thabane and Drekic ,(2002)) تقريراً بين فيه استخدام توزيع (Bessel) مُتعدد المتغيرات المحور المعمم بوصفهِ توزيعاً للأخطاء في نموذج الانحدار الخطي المتعدد، وقد اختبرا فرضية خطية عامة في معلمات نموذج الانحدار واستنتاجا أن احصاءة الاختبار تحت فرضيتي العدم والبديلة تتبع توزيع F المركزي و(F-Bessel) اللامركزي على الترتيب.

اجرى ((Thabane and Drekic ,(2003)) اختبارات احصائية حول متوسط مجتمع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم واختبارات إحصائية أخرى تتعلق بتساوي متوسطي مجتمعي Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم عندما تكون لهما نفس مصفوفة التباين فقد استنتج التوزيع الاحتمالي للاحصاءة (Hotelling-T^2) و(Scheffe-T^2) للاختبارين أعلاه على الترتيب. (سعيد ،و العبيدي ،(2013)).

تناول المبحث الثاني وصفاً لنموذج انحدار(Bessel) المحور المعمم الخطي المتعدد، وتضمن المبحث الثالث مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمات نموذج انحدار(Bessel) المحور المعمم ، واشتمل المبحث الرابع إيجاد التوزيعات الاحتمالية لمقدرات الإمكان الأعظم لمعلمات نموذج انحدار(Bessel) المحور المعمم، وبين المبحث الخامس على تكوين الاختبارات الاحصائية اللابيزية حول متجه معلمات الانحدار $\underline{\beta}$ ، أما المبحث الاخير فقد تم عرض أهم الاستنتاجات.

(2) وصف نموذج انحدار Bessel المحور المعمم الخطي المُتعدد

نعلم أن نموذج الانحدار الخطي المتعدد موصوفاً حسب المعادلة الخطية الآتية:

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{u} \qquad \dots(1)$$

إذ إن:

$\underline{Y}$: يمثل متجه مشاهدات متغير الاستجابة (Response variable) ، ذو سعة (n×1).

X: مصفوفة غير عشوائية تمثل مشاهدات المتغيرات التوضيحية (Explanatory variables) ذات سعة (n×p)، ويمثل p عدد المتغيرات التوضيحية.

$\underline{\beta}$: متجه معلمات نموذج الانحدار ذا سعة (p×1).

$\underline{u}$: متجه الاخطاء العشوائية ذا سعة (n×1)، الذي له توزيع (Bessel) متعدد المتغيرات المحور المعمم، وتكون دالة كثافة احتمال متجه الأخطاء العشوائية $\underline{u}$ معرفة حسب المعادلة الآتية:((Thabane and Drekic , (2002)).

$$f(\underline{u}) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{n}{4}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}} K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} \left[1 + \frac{\underline{u}'\underline{u}}{\psi\sigma^2}\right]^{\frac{2v-n}{4}}$$

$$\times \; K_{\frac{2v-n}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1 + \frac{\underline{u}'\underline{u}}{\psi\sigma^2}\right)}\right) \quad -\infty < \underline{u} < \infty, \sigma^2 > 0 \qquad \dots(2)$$

إذ أن (λ, ψ, v) تمثل معلمات الشكل(Shape parameters)، وأن مجال معلماته تعرف كالآتي: ((Butler, (1998))

$$\left.\begin{array}{lll} \psi > 0 & ,\lambda \geq 0 & if \;\; v < 0 \\ \psi > 0 & ,\lambda > 0 & if \;\; v = 0 \\ \psi \geq 0 & ,\lambda > 0 & if \;\; v > 0 \end{array}\right\} \qquad \dots(3)$$

$K_v(x)$: تمثل دالة (Bessel) المحورة من النوع الثالث ذات الرتبة v ، والمعرفة في المعادلة (4) الآتية: ((Hu , (2005)).

$$K_v(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{v-1} e^{\frac{-x}{2}(t+t^{-1})}\, dt \qquad \dots(4)$$

ويعبر عن التوزيع الاحتمالي لمتجه الأخطاء العشوائية $\underline{u}$ وصفياً بـ

$$\underline{u} \sim GMMB_n\left(\underline{0}, \sigma^2 I_n, \lambda, \psi, v\right) \qquad \dots(5)$$

يمثل النموذج المعرف في المعادلة (1) تركيبة خطية ويحتوي على المتجه العشوائي $\underline{u}$ الذي يتبع توزيع (Bessel) متعدد المتغيرات المحور المعمم لذا فقد استنتج كل من (سعيد ،و العبيدي (2013))، التوزيع الاحتمالي للمتجه العشوائي$\underline{Y}$ الذي يتبع توزيع (Bessel) المحور المعمم ، وتكون دالة كثافة الاحتمال للمتجه العشوائي $\underline{\boldsymbol{Y}}$ بالشكل الآتي:

$$f(\underline{Y})=\frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{n}{4}}}{(2\pi\,\sigma^2)^{\frac{n}{2}}K_v(\sqrt{\lambda\psi})}\left[1+\frac{\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)}{\psi\sigma^2}\right]^{\frac{2v-n}{4}}$$

$$\times K_{\frac{2v-n}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1+\frac{\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)}{\psi\sigma^2}\right)}\right)\qquad\ldots(6)$$

يوصف هذا التوزيع بـ $\underline{Y}\sim GMBD_n\left(X\underline{\beta}\,,\sigma^2 I_n\,,\lambda\,,\psi\,,v\right)$.

يُعبر عن توزيع (Bessel) المحور المعمم على شكل توزيع مختلط (Mixed distribution) من التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات وتو يع معكوس كَاوس المعمم (Generalized Inverse Gaussian) وكالآتي: ((Thabane and Drekic , (2003)).

$$f(\underline{Y})=\int_0^{\infty} f(\underline{Y}|\tau)\,f(\tau)\,d\tau\qquad\ldots(7)$$

إذ أن τ متغير عشوائي يتبع توزيع معكوس كَاوس المعمم (GIG) بالمَعلمات $(\lambda,\psi\,,v)$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية لـ τ معُرفة على وفق المُعادلة (8) الآتية:

((Lemonte and Cordeiro, (2011)) (Silva and Lopes, (2006))

$$f(\tau)=\frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{v}{2}}}{2K_v(\sqrt{\lambda\psi})}\tau^{v-1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\psi}{\tau}\right)+\lambda\tau\right\}\right]\quad,\qquad \tau>0\qquad\ldots(8)$$

إذ أن $K_v(x)$ تُمثل دالة (Bessel) المُحورة من النوع الثالث ذات الرتبة v والتي سُبق تَعريفها في المُعادلة (4).

يعبر عن التوزيع الاحتمالي لـ τ وصفياً بالآتي:

$$\tau\sim GIG(\lambda,\psi,v)\qquad\ldots(9)$$

فإذا توفرت عينة عشوائية ذات حجم (n) فإن دالة الإمكان التي تمثل التوزيع الاحتمالي المشترك للمتجه العشوائي $\underline{Y}$ المشروط بـ τ والذي يتبع التوزيع الطبيعي المُتعدد الموصوف بـ

$$\underline{Y}|\tau \sim N_n\left(X\underline{\beta}\ ,\sigma^2\tau\, \mathrm{I}_n\right) \qquad \dots(10)$$

تكون دالة كثافة احتمال $\underline{Y}$ المشروط بـ τ كالآتي:

$$f\left(\underline{Y}|\tau\right) = (2\pi\sigma^2\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)} \qquad \dots(11)$$

بعد اجراء التكامل للمُعادلة (7) نسبة الى المتغير العشوائي τ نحصل على دالة كثافة احتمال توزيع (Bessel) المحور المعمم للمتجه العشوائي $\underline{Y}$ والتي سبق تعريفها في المُعادلة (6).

(3) مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمات نموذج انحدار Bessel المحور المعمم

إذا توفرت n من مشاهدات متغير الاستجابة $\underline{Y}$ والمتغيرات التوضيحية $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ فإن دالة الإمكان لمُتجه مشاهدات متغير الاستجابة المشروط بـ τ لها توزيع طبيعي متعدد المتغيرات وقد وصف في المعادلة (11). أما دالة الإمكان للمتجه العشوائي $\underline{Y}$ غير الشرطي وباستخدام مفهوم التوزيعات المختلطة تكتب بالشكل الآتي:

$$L\left(\underline{\beta},\sigma^2\right) = \int_0^\infty f\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta},\sigma^2,\tau\right) f(\tau)\, d\tau \qquad \dots(12)$$

وبعد التعويض عن $f(\tau)$ التي سبق تعريفها في المعادلة (8) ودالة كثافة الاحتمال الشرطية $\underline{Y}|\tau$ المُعرفة في المعادلة (11) في دالة الإمكان أعلاه نحصل على:

$$L\left(\underline{\beta},\sigma^2\right) = \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi\sigma^2\tau)^{\frac{n}{2}}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{v}{2}}\tau^{v-1}}{2K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau}\left(\psi+\frac{\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)}{\sigma^2}\right)+\lambda\tau\right]} d\tau$$

$$\dots(13)$$

نظراً لصعوبة إيجاد مقدر الإمكان الأعظم لمُتجه المعلمات $\underline{\beta}$ من المعادلة (13) فقد استخدمنا مفهوم التوزيعات المختلطة وكالآتي:

$$\int_{\underline{Y}} f\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta}\right) d\underline{Y} = \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta},\tau\right) f(\tau) d\underline{Y}\, d\tau \qquad \dots(14)$$

نأخذ الطرف الأيمن من المُعادلة (14) أعلاه ونساويه بالواحد الصحيح وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى نسبة لمتجه المعلمات $\underline{\beta}$ وحسب شرط الانتظام (Regularity condition) فإن:

$$\int_{0}^{\infty} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta},\tau\right)}{f\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta},\tau\right)} f\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta},\tau\right) d\underline{Y}\, d\tau = 0 \qquad \dots(15)$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\, lnf\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta},\tau\right)}{\partial \underline{\beta}} f\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta},\tau\right) d\underline{Y}\, d\tau = 0 \qquad \dots(16)$$

$$\Rightarrow E_{\tau} E_{(\underline{Y}|\tau)} \left(\frac{\partial\, lnf\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta},\tau\right)}{\partial \underline{\beta}} \right) = 0 \qquad \dots(17)$$

وبذات الطريقة نأخذ الطرف الأيسر من المعادلة (14) ونساويه بالواحد الصحيح واتباع ذات الخطوات أعلاه نحصل على:

$$E_{\underline{Y}} \left(\frac{\partial\, lnf\left(\underline{Y}\middle|\underline{\beta}\right)}{\partial \underline{\beta}} \right) = 0 \qquad \dots(18)$$

لذلك نستنتج بأن توقع الدرجة غير المشروطة بـ τ مساوية للقيمة المتوقعة للدرجة المشروطة بـ τ و مساوية للصفر.

نفرض أن $(\hat{\underline{\beta}})$ و$(\hat{\sigma}^2)$ هما مقدرا الإمكان الأعظم لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ والمعلمة (σ^2) على الترتيب، وبعد استبدال كل من $\underline{\beta}$ و σ^2 بـ $\hat{\underline{\beta}}$ و $\hat{\sigma}^2$ في دالة الإمكان لـ $\underline{Y}$ المشروطة بـ τ نحصل على المعادلة (19) الآتية:

$$L\left(\hat{\underline{\beta}},\hat{\sigma}^2\middle|\tau\right) = (2\pi\,\hat{\sigma}^2\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(- \frac{\left(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}\right)}{2\hat{\sigma}^2\tau} \right) \qquad \dots(19)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (19) وأخذ المشتقة الجزئية الأولى نسبة الى المتجه $\hat{\underline{\beta}}$ نحصل على:

$$\frac{\partial \ln L\left(\underline{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2 \middle| \tau\right)}{\partial \underline{\beta}} = \frac{\left(X'\underline{Y} - X'X\underline{\hat{\beta}}\right)}{\hat{\sigma}^2 \tau} \qquad \dots(20)$$

بعد إجراء التكامل للمعادلة (20) أعلاه نسبة للمتغير العشوائي τ نحصل على:

$$\frac{\partial \ln L(\underline{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2)}{\partial \underline{\beta}} = \frac{\left(X'\underline{Y} - X'X\underline{\hat{\beta}}\right) K_{v-1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{\hat{\sigma}^2 K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{-1}{2}}} \qquad \dots(21)$$

وعند مساواة المعادلة (21) بمتجه صفري نحصل على الآتي:

$$\left(X'\underline{Y} - X'X\underline{\hat{\beta}}\right) K_{v-1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right) = \underline{0} \qquad \dots(22)$$

وقسمة طرفي المعادلة (22) أعلاه على المقدار $K_{v-1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)$ نحصل على أن مقدر الإمكان الأعظم لمتجه المعلمات $\underline{\beta}$ يكون كالآتي:

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(X'X\right)^{-1} X'\underline{Y} \qquad \dots(23)$$

وأن المقدر أعلاه هو ذات المقدر في حالة نموذج الانحدار الاعتيادي.

للتأكد من أن $\underline{\hat{\beta}}$ المعرف في المعادلة (23) هو مقدر الإمكان الأعظم للمتجه $\underline{\beta}$ نأخذ المشتقة الجزئية الثانية للمعادلة (21) نسبة الى $\underline{\hat{\beta}}$ وكالآتي:

$$\frac{\partial^2 Ln\, L\left(\underline{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2\right)}{\partial \underline{\hat{\beta}}\ \partial \underline{\hat{\beta}}'} = \frac{\partial}{\partial \underline{\hat{\beta}}'}\left[\frac{\partial Ln\, L\left(\underline{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2\right)}{\partial \underline{\hat{\beta}}}\right] \qquad \dots(24)$$

إن نتيجة المشتقة الجزئية الثانية سوف تكون مصفوفة ذات سعة (p×p) وحسب قاعدة مشتقة حاصل قسمة دالتين فإن المعادلة (24) تصبح بالشكل الآتي:

$$\frac{\partial^2 Ln\, L(\underline{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2)}{\partial \underline{\hat{\beta}}\ \partial \underline{\hat{\beta}}'} = -C\, X'X \qquad \dots(25)$$

إذ أن:

$$C = \frac{K_{v-1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{\hat{\sigma}^2 K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{-1}{2}}}$$

وبما أن $\left(X'X\right)$ مصفوفة أكيدة الايجابية (Positive definite) فإن $\left(-C\, X'X\right)$ أكيدة السالبية (Negative definite) لذلك فإن

$$\frac{\partial^2 Ln\left[L\left(\underline{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2\right)\right]}{\partial\underline{\hat{\beta}}\;\partial\underline{\hat{\beta}}'} < 0 \qquad \dots(26)$$

لذلك فإن $\underline{\hat{\beta}}$ الذي سبق تعريفه في المعادلة (23) هو مقدر الإمكان الأعظم للمتجه $\underline{\beta}$.

وأن مقدر الإمكان الأعظم لمُتجه المعلمات $\underline{\beta}$ هو مقدر غير متحيز (unbiased) أي أن:

$$E\left(\underline{\hat{\beta}}\right) = \underline{\beta} \qquad \dots(27)$$

لذا فإن مصفوفة متوسط مربعات الخطأ (Mean Square Error) لهذا المقدر تكون بالصيغة الآتية:

$$M\left(\underline{\hat{\beta}}\right) = E\left(\underline{\hat{\beta}} - E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\hat{\beta}} - E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)\right)'$$

$$= \sigma^2\left(X'X\right)^{-1}\frac{K_{v+1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{1}{2}}K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} \qquad \dots(28)$$

وإن متوسط مربعات الخطأ لـ $\underline{\hat{\beta}}$ هو:

$$MSE\left(\underline{\hat{\beta}}\right) = tr\,M\left(\underline{\hat{\beta}}\right) \qquad \dots(29)$$

ولتقدير المعلمة σ^2 نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (19) وأخذ المشتقة الجزئية الأولى نسبة لـ $\hat{\sigma}^2$ نحصل على:

$$\frac{\partial\, ln\, L\left(\underline{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2\middle|\tau\right)}{\partial\hat{\sigma}^2} = \frac{-n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)}{2(\hat{\sigma}^2)^2\tau} \qquad \dots(30)$$

بعد إجراء التكامل للمعادلة (30) أعلاه نسبة للمتغير العشوائي τ نحصل على:

$$\frac{\partial\, ln\, L(\underline{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2)}{\partial\hat{\sigma}^2} = \frac{-n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)}{2(\hat{\sigma}^2)^2}\,\frac{K_{v-1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{-1}{2}}} \qquad \dots(31)$$

وبعد مساواة المعادلة (31) أعلاه بالصفر وإجراء بعض التبسيطات نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لـ σ^2 وكالآتي:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underline{Y} - X\hat{\beta}\right)'\left(\underline{Y} - X\hat{\beta}\right)\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{1}{2}} K_{v-1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{n\ K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} \qquad \dots(32)$$

وأن مقدر الإمكان الأعظم لـ σ^2 هو مقدر متحيز لأن:

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = h \times E_\tau E_{(\underline{Y}|\tau)}\left(\underline{Y} - X\hat{\beta}\right)'\left(\underline{Y} - X\hat{\beta}\right)$$

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = h \times (n - P)\sigma^2 \frac{K_{v+1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{1}{2}} K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} \qquad \dots(33)$$

إذ أن

$$h = \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{1}{2}} K_{v-1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{n\ K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} \qquad \dots(34)$$

وأن مقدار التحيز مساوٍ لـ

$$bias_{(\hat{\sigma}^2)} = \frac{\sigma^2\left[(n - P)\frac{K_{v+1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} K_{v-1}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right) - n\, K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)\right]}{n\ K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} \qquad \dots(35)$$

وأن معيار متوسط مربعات الخطأ لهذا المقدر يكون بالصيغة الآتية:

$$MSE(\hat{\sigma}^2) = var(\hat{\sigma}^2) + \left(bias_{(\hat{\sigma}^2)}\right)^2 \qquad \dots(36)$$

لإيجاد معيار متوسط مربعات الخطأ لـ $\hat{\sigma}^2$ لأبد من إيجاد تباين المقدر $\hat{\sigma}^2$ وحسب خصائص التوقع الرياضي: (هرمز، (1990))

$$var(\hat{\sigma}^2) = E\left(var(\hat{\sigma}^2|\tau)\right) + var\left(E(\hat{\sigma}^2|\tau)\right) \qquad \dots(37)$$

الحد الأول من الطرف الأيمن للمعادلة (37) يكون كالآتي:

$$E\left(var(\hat{\sigma}^2|\tau)\right) = 2(n - P) \times (\sigma^2 h)^2 \frac{K_{v+2}\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}{K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)} \left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{-1}$$

إذ أن h سبق تعريفها في المعادلة (34).

والحد الثاني من الطرف الأيمن للمعادلة (37) يكون كالآتي:

$$var\left(E(\hat{\sigma}^2|\tau)\right) = (\sigma^2 h)^2 \times (n-P)^2 var(\tau)$$

وأن $var(\tau)$ معرفة على وفق المعادلة الأتية:

$$var(\tau) = \frac{1}{K_v(\sqrt{\lambda\psi})\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)}\left[K_{v+2}(\sqrt{\lambda\psi}) - \frac{\left(K_{v+1}(\sqrt{\lambda\psi})\right)^2}{K_v(\sqrt{\lambda\psi})}\right] \quad ...(38)$$

$$\therefore var(\hat{\sigma}^2) = 2(n-P) \times (\sigma^2 h)^2 \frac{K_{v+2}(\sqrt{\lambda\psi})}{K_v(\sqrt{\lambda\psi})}\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{-1} + (\sigma^2 h)^2 \times (n-P)^2 var(\tau)$$

$...(39)$

بعد تعويض المعادلتين (39) و(35) على الترتيب في المعادلة (36) نحصل على معيار متوسط مربعات الخطأ لـ $\hat{\sigma}^2$.

(4) التوزيعات الاحتمالية لمقدرات الإمكان الأعظم لمَعلمات نموذج انحدار Bessel المحور المعمم

(4-1) التوزيع الاحتمالي لمقدر مُتجه المعلمات $\underline{\boldsymbol{\beta}}$

إن $\hat{\underline{\beta}}$ التي سبق تعريفها في المعادلة (23) عبارة عن تركيبة خطية في المتجه $\underline{Y}$.

وطالما أن التوزيع الاحتمالي لـ $\underline{\boldsymbol{Y}}$ المشروط بـ $\boldsymbol{\tau}$ وصفَ حسب المعادلة (11) لذا فأن التوزيع الاحتمالي لـ $\hat{\underline{\beta}}$ المشروط بـ τ و σ^2 هو ايضاً توزيع طبيعي مُتعدد المُتغيرات والذي يوصف بالشكل الآتي:

$$\left(\hat{\underline{\beta}}\middle|\tau,\sigma^2\right) \sim N_P\left(\underline{\beta}, \sigma^2\tau\left(X'X\right)^{-1}\right) \quad ...(40)$$

ودالة كثافة الاحتمال لـ $\hat{\underline{\beta}}$ المشروطة بـ τ تكون بالصيغة الآتية:

$$f\left(\hat{\underline{\beta}}\middle|\tau,\sigma^2\right) = (2\pi\sigma^2\tau)^{-\frac{P}{2}}\left|X'X\right|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\left[\left(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta}\right)' X'X\left(\hat{\underline{\beta}}-\underline{\beta}\right)\right]} \quad ...(41)$$

وعليه فإن التوزيع الاحتمالي غير الشرطي لـ $\hat{\underline{\beta}}$ يتم إيجاده باستخدام التوزيعات المختلطة و بالصيغة الآتية:

$$f\left(\underline{\hat{\beta}}\right)=\int_0^{\infty} f\left(\underline{\hat{\beta}}\middle|\tau,\sigma^2\right) f(\tau)\, d\tau \qquad \dots(42)$$

بعد تعويض $f(\tau)$ و $f\left(\underline{\hat{\beta}}\middle|\tau,\sigma^2\right)$ المعرفتين في المعادلتين (8) و(41) على الترتيب في المعادلة (42) وإجراء بعض العمليات الجبرية نحصل على التوزيع الاحتمالي لـ $\underline{\hat{\beta}}$ والذي هو عبارة عن توزيع (Bessel) مُتعدد المُتغيرات المحور المعمم وبالصيغة الآتية:

$$f\left(\underline{\hat{\beta}}\right)=\frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{P}{4}}\left|X'X\right|^{1/2}}{(2\pi\,\sigma^2)^{\frac{P}{2}} K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)}\left[1+\frac{\left(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}\right)' X'X\left(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}\right)}{\psi\sigma^2}\right]^{\frac{2v-P}{4}}$$

$$\times K_{\frac{2v-P}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1+\frac{\left(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}\right)' X'X\left(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}\right)}{\psi\sigma^2}\right)}\right) \qquad \dots(43)$$

يعبر عن التوزيع الاحتمالي لمقدر متجه المعلمات $\underline{\beta}$ وصفياً بـ

$$\underline{\hat{\beta}} \sim GMMBD_n\left(\underline{\beta},\sigma^2\left(X'X\right)^{-1},\lambda,\psi,v\right)$$

(2-4) التوزيع الاحتمالي لمقدر المعلمة σ^2

لإيجاد التوزيع الاحتمالي لـ $\hat{\sigma}^2$ المُعرفة في المُعادلة (32) لأبد من استخدام أسلوب التحويل (Transformation technique) وبالصيغة الآتية:

نُعرف المُتغير العشوائي

$$Q_3=\frac{\left(\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}}\right)}{\sigma^2} \qquad \dots(44)$$

وهو عبارة عن تحويل متقابل، وأن التوزيع الاحتمالي لـ $\hat{\sigma}^2$ هو

$$f\left(\hat{\sigma}^2\right)=f(Q_3)\ \|J\|\ \Big|_{Q_3=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2 h}} \qquad \dots(45)$$

إذ أن h سبق تعريفها في المعادلة (34).

إن التوزيع الاحتمالي لـ Q_3 المشروط بالمتغير τ عبارة عن توزيع مربع كاي المركزي بدرجة حرية $(n-P)$ ويكتب بالصيغة الآتية:

$$f(Q_3|\tau) = \frac{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^{\frac{n-P}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-P}{2}\right)} Q_3^{\frac{n-P}{2}-1} e^{-\frac{Q_3}{2\tau}} \qquad \dots(46)$$

وعليه فإن التوزيع الاحتمالي لـ Q_3 غير الشرطي يتم إيجاده باستخدام التوزيعات المختلطة وبالصيغة الآتية:

$$f(Q_3) = \int_0^\infty f(Q_3|\tau) f(\tau)\, d\tau \qquad \dots(47)$$

بعد التعويض عن دالة كثافة احتمال τ ودالة كثافة احتمال Q_3 المشروطة بالمتغير τ في المعادلة (47) أعلاه وإجراء التكامل نسبة للمتغير τ نحصل على:

$$f(Q_3) = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^{\frac{n-P}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-P}{2}\right)} Q_3^{\frac{n-P}{2}-1} e^{-\frac{Q_3}{2\tau}} \times \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{v}{2}}}{2K_v(\sqrt{\lambda\psi})} \tau^{v-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\psi}{\tau}\right) + \lambda\tau\right\}\right] d\tau$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-P}{2}} Q_3^{\frac{n-P}{2}-1} \left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{n-P}{4}}}{\Gamma\left(\frac{n-P}{2}\right) K_v(\sqrt{\lambda\psi})} \left[1 + \frac{Q_3}{\psi}\right]^{\frac{2v-n+P}{4}} K_{\frac{2v-n+P}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1 + \frac{Q_3}{\psi}\right)}\right)$$

$$\dots(48)$$

إن التوزيع الاحتمالي لـ Q_3 المُعرف في المعادلة (48) لا ينتمي الى عائلة التوزيعات الاحتمالية الشائعة.

بعد تعويض المعادلة (48) في المعادلة (45) علماً أن عامل التحويل $\|J\| = \frac{1}{\sigma^2\, h}$ فإن:

$$f(\hat{\sigma}^2) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-P}{2}} \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2\, h}\right)^{\frac{n-P}{2}-1} \left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{n-P}{4}}}{\Gamma\left(\frac{n-P}{2}\right) K_v(\sqrt{\lambda\psi})} \left[1 + \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2\, h}\right)}{\psi}\right]^{\frac{2v-n+P}{4}}$$

$$K_{\frac{2v-n+P}{2}}\left(\sqrt{\lambda\psi\left(1 + \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2\, h}\right)}{\psi}\right)}\right) \times \frac{1}{\sigma^2\, h} \qquad \dots(49)$$

إذ أن التوزيع الاحتمالي لـ $\hat{\sigma}^2$ لا ينتمي الى عائلة التوزيعات الاحتمالية الشائعة.

(5) اختبار الفرضيات الإحصائية اللابيزية لـ نموذج انحدار Bessel المحور المعمم

سوف يتم في هذا المبحث تكوين الاختبارات الإحصائية حول مُتجه المَعلمات $\underline{\beta}$ مستندين على اختبار نسبة الإمكان (Likelihood ratio test) ويقوم هذا الاختبار على أساس تعظيم دالة الإمكان تحت فرضية العدم (H_0) وتحت الفرضية البديلة (H_1) في الوقت ذاته ، وذلك للحصول على أكبر قدر ممكن من المعلومات حول هاتين الفرضيتين تحت الدراسة ومن ثم لنحصل على افضل قاعدة اختبار تعطينا القرار الصحيح حول رفض أو قبول فرضية العدم ،لذا فانه بالإمكان تعريف إحصاءه نسبة الإمكان التي تستخدم فرضية العدم ضد الفرضية البديلة بالصيغة الآتية: (الجبوري ، وصلاح حمزة ،2000)

$$\lambda = \frac{\max \underline{\beta}\epsilon\,\Omega_0}{\max \underline{\beta}\epsilon\,\Omega_1} = \frac{L_0\left(\underline{\beta}\right)}{L_1\left(\underline{\beta}\right)} \qquad \ldots (50)$$

إذ أن:

Ω_0 : تمثل فضاء المعلمة تحت فرضية العدم.

Ω_1 :تمثل فضاء المعلمة تحت فرضية البديلة.

L_i :هي اكبر قيمة تأخذها دالة الإمكان في الحيز Ω_i ، $i = 0,1$.

نفرض إننا نرغب بإجراء اختبارات إحصائية حول متجه معلمات الانحدار $\underline{\beta}$ لنموذج انحدار (Bessel) المحور المعمم الذي سبق تعريفه في المعادلة (6) فإذا عرفنا كل من H_0 و H_1 بالصيغة الآتية:

$$H_0 : \underline{\beta} = \underline{\beta}_0, \quad \sigma^2 > 0$$

$$H_1 : \underline{\beta} \neq \underline{\beta}_0, \quad \sigma^2 > 0$$

وعندما تكون الفرضية H_0 صحيحة فإن دالة الإمكان لمشاهدات متغير الاستجابة $\underline{Y}$ المشروطة بـ τ تكون بالصيغة الآتية:

$$L_0\left(\underline{\beta}_0,\sigma^2\middle|\tau\right) = (2\pi\sigma^2\tau)^{-\frac{n}{2}}\, exp\left(-\frac{\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}_0\right)'\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}_0\right)}{2\sigma^2\tau}\right) \qquad \ldots (51)$$

وفي حالة كون الفرضية البديلة صحيحة فإن دالة الإمكان لمشاهدات متغير الاستجابة $\underline{Y}$ المشروطة بـ τ تكون بالصيغة الآتية:

$$L_1\left(\underline{\beta},\sigma^2\middle|\tau\right) = (2\pi\sigma^2\tau)^{-\frac{n}{2}}\, exp\left(-\frac{\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y}-X\underline{\beta}\right)}{2\sigma^2\tau}\right) \qquad \ldots (52)$$

وإن مقدري الإمكان الأعظم للمتجه $\underline{\beta}$ المشروط بـ τ سبق تعريفه في المعادلة (23) ومقدر الإمكان الأعظم لـ σ^2 المشروط بـ τ يكون بالصيغة الآتية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)}{n\,\tau}$$

لذلك يكون اختبار نسبة الترجيح بالصيغة الآتية:

$$\lambda = \frac{\left[\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)\right]^{\frac{n}{2}}}{\left[\left(\underline{Y} - X\underline{\beta}_0\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\beta}_0\right)\right]^{\frac{n}{2}}} \leq \lambda_0 \qquad \dots(53)$$

بإضافة وطرح $(X\underline{\hat{\beta}})$ إلى كل قوس من مقام الطرف الأيسر من المتباينة (53) أعلاه وإجراء بعض العمليات الرياضية نحصل على:

$$\left[1 + \frac{\left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}_0\right)' X'X \left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}_0\right)}{\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)}\right]^{-1} \leq \lambda_0^{\frac{2}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}_0\right)' X'X \left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}_0\right)}{\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)} \geq \lambda_0^{-\frac{2}{n}} - 1 \qquad \dots(54)$$

من الواضح أن الإحصاءة المشروطة بـ τ اللازمة لاختبار فرضية العدم هي:

$$T^2 = \frac{\left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}_0\right)' X'X \left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}_0\right)}{\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)} \qquad \dots(55)$$

وبعد قسمة كل من البسط والمقام للاحصاءة T^2 المعرفة في المعادلة (55) على $\sigma^2\tau$ نجد أن التوزيع الاحتمالي للبسط والمقام للاحصاءة T^2 هما بالصيغة الآتية:

$$\frac{\left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}_0\right)' X'X \left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}_0\right)}{\sigma^2\tau} \sim \chi^2(\mathrm{P}) \qquad \dots(56)$$

وأن

$$\frac{\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}\right)}{\sigma^2\tau} \sim \chi^2(n - \mathrm{P}) \qquad \dots(57)$$

لذلك فإن $\frac{(n-\mathrm{P})T^2}{\mathrm{P}}$ المشروطة بـ τ تحت الفرضية H_0 تتبع توزيع F المركزي بدرجتي حرية (p , n-p) ويعبر عنه وصفياً بـ

$$\frac{(n-\mathrm{P})T^2}{\mathrm{P}} \sim F(\mathrm{P}, n-P) \qquad \dots(58)$$

وعندما تكون الفرضية البديلة صحيحة أي $(\underline{\beta} \neq \underline{\beta}_0)$ ، فإن البسط من معادلة T^2 المشروطة بـ τ الذي سبق تعريفها في المعادلة (55) يتبع توزيع مربع كاي اللامركزي بدرجة حرية مقدارها p ومعلمة لامركزية $\left(\frac{\delta}{\tau}\right)$ ويعبر عن التوزيع الاحتمالي وصفياً بالصيغة الآتية: (الجبوري ، وصلاح حمزة، 2000).

$$\frac{\left(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}_0\right)' X'X \left(\underline{\hat{\beta}}-\underline{\beta}_0\right)}{\sigma^2 \tau} \sim \chi^2\left(\mathrm{P}, \frac{\delta}{\tau}\right) \qquad \dots(59)$$

إذ أن

$$\delta = \frac{\left(\underline{\beta}-\underline{\beta}_0\right)' X'X \left(\underline{\beta}-\underline{\beta}_0\right)}{\sigma^2} \qquad \dots(60)$$

أما بالنسبة إلى مقام المعادلة (55).

$$\left(\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}}\right)' \left(\underline{Y}-X\underline{\hat{\beta}}\right) = \underline{Y}' \left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1} X'\right] \underline{Y} \qquad \dots(61)$$

إن المصفوفة $I_n - X\left(X'X\right)^{-1} X'$ الموجودة في الطرف الأيمن من المعادلة (61) أعلاه هي مصفوفة متساوية القوة (Idempotent) وهي مصفوفة ذات رتبة غير كاملة تحتوي على P من الجذور المميزة الصفرية و $n-P$ من الجذور المميزة التي تساوي الواحد الصحيح لذلك فإن (الجبوري ، وصلاح حمزة، 2000).

$$\frac{\underline{Y}' \left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1} X'\right] \underline{Y}}{\sigma^2 \tau} \sim \chi^2(n-P) \qquad \dots(62)$$

لذلك فإن الاحصاءة $\frac{(n-\mathrm{P})T^2}{P}$ المشروطة بـ τ تتبع توزيع F اللامركزي بدرجتي حرية (p , n-p, δ) ويعبر عنه وصفياً بـ

$$(w|\tau) = \left(\frac{(n-\mathrm{P})T^2}{P}\middle|\tau\right) \sim F\left(\mathrm{P}, n-\mathrm{P}, \frac{\delta}{\tau}\right) \qquad \dots(63)$$

ودالة كثافة الاحتمال لـ w تكون كالآتي: (Thabane and Drekic, (2003)) .

$$f(w|\tau)=\frac{(\mathrm{P})^{\frac{\mathrm{P}}{2}}(n-\mathrm{P})^{\frac{n-\mathrm{P}}{2}}e^{-\frac{\delta}{2\tau}}(w)^{\frac{\mathrm{P}-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-\mathrm{P}}{2}\right)(n-\mathrm{P}+\mathrm{P}\,w)^{\frac{n}{2}}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}{j!\;\Gamma\left(\frac{\mathrm{P}}{2}+j\right)}\left(\frac{\delta\,\mathrm{P}\,w}{2\tau(n-\mathrm{P}+\mathrm{P}\,w)}\right)^{j}$$

$$w>0\,,\delta>0\ \ldots(64)$$

علماً إن δ و T^2 سبق تعريفهما في المعادلة (60) و(55) على الترتيب.

بعد إجراء التكامل للمعادلة (64) أعلاه نسبة للمتغير τ نحصل على التوزيع الاحتمالي للاحصاءة $\frac{(n-\mathrm{p})T^2}{\mathrm{p}}$ وتعرف كالآتي:

$$f(w)=\frac{(\mathrm{p})^{\frac{\mathrm{p}}{2}}(n-\mathrm{p})^{\frac{n-\mathrm{p}}{2}}\left(\frac{\psi+\delta}{\psi}\right)^{\frac{v}{2}}(w)^{\frac{\mathrm{p}-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-\mathrm{p}}{2}\right)K_v\left(\sqrt{\lambda\psi}\right)(n-\mathrm{p}+\mathrm{p}\,w)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)K_{v-j}\left(\sqrt{\lambda(\psi+\delta)}\right)}{j!\;\Gamma\left(\frac{\mathrm{p}}{2}+j\right)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\;\;\delta\;\;\mathrm{p}\,w}{2\,\sqrt{(\psi+\delta)}\,(n-\mathrm{p}+\mathrm{p}\,w)}\right)^{j}$$

$$\ldots(65)$$

إن الدالة المُعرفة في المعادلة (65) تمثل دالة كثافة احتمال توزيع (F-Bessel) اللامركزي بالمعلمات (δ, λ, ψ, v, p , n-p). وتمثل دالة كثافة الاحتمال التي سبق تعريفها في المعادلة (65) أعلاه بدالة كثافة احتمال $\frac{(n-\mathrm{p})T^2}{\mathrm{p}}$ غير المشروطة بـ τ تحت الفرضية البديلة H_1.

وتحت فرضية العدم H_0 يتحول التوزيع الاحتمالي لـ $\frac{(n-\mathrm{p})T^2}{\mathrm{p}}$ إلى توزيع F المركزي بدرجتي حرية (p , n-p) لأن المعلمة اللامركزية δ تحت فرضية العدم تكون مساوية للصفر. هذه النتيجة مطابقة للنتيجة اختبار متجه المعلمات $\underline{\beta}$ في نموذج الانحدار الخطي الطبيعي ونموذج انحدار t الخطي. (Thabane and Drekic , (2003)).

(6) الاستنتاجات

1. إن مقدر الإمكان الأعظم لمتجه المعلمات $\underline{\beta}$ هو نفس المقدر في حالة نموذج الانحدار الخطي الاعتيادي.

2. أن التوزيع الاحتمالي لمقدر الإمكان الأعظم لمتجه المعلمات $\underline{\beta}$ الذي عرف في المعادلة (43) هو تركيبة خطية في متجه مشاهدات متغير الاستجابة $\underline{Y}$ ويتوزع توزيع (Bessel) مُتعدد المُتغيرات المحور المعمم الذي يوصف بالشكل الآتي:

$$\underline{\hat{\beta}} \sim GMMBD_n\left(\underline{\beta}\,,\sigma^2\left(X'X\right)^{-1},\lambda\,,\psi\,,v\right)$$

أما التوزيع الاحتمالي لمقدر الإمكان الأعظم لمعلمة التباين σ^2 لا ينتمي الى عائلة التوزيعات الاحتمالية الشائعة.

3. في اختبار الفرضيات تبين أنه إذا كانت الفرضية H_0 صحيحة فإن احصاءة الاختبار تتبع توزيع F المركزي وهي ذات النتيجة في حالة نموذج الانحدار الخطي الاعتيادي ونموذج انحدار t ، أما إذا كانت الفرضية H_1 صحيحة فإن احصاءة الاختبار تتبع توزيع جديد وهو توزيع (F-Bessel) اللامركزي.

(7) المصادر

المصادر العربية:

1. الجبوري، شلال حبيب وعبد، صلاح حمزة، (2000)، "**تحليل المتعدد المتغيرات**" ، دار الكتب للطباعة والنشر، بغداد، العراق.
2. سعيد ، هيفاء عبدالجواد والعبيدي ، سرمد عبدالخالق صالح ،(2013)، " **التحليل البيزي لمعلمات نموذج انحدارBessel المحور المعمم الخطي المُتعدد**"، مقبول للنشر في المجلة العراقية للعلوم الإحصائية بكتاب القبول المرقم 202 في 2013/9/11.
3. هرمز ،أمير حنا ، (1990)، "**الإحصاء الرياضي**" ، مديرية دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل، العراق.

المصادر الاجنبية:

1. Barndorff-Nielsen, O. (1978) ,“ **Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae**”, Scand.J.Statist.5 ,P.P.151-157.
2. Butler , R. W. (1998),“**Generalized inverse Gaussian distribution and their wishart connection**”, Colorado state university ,Vol.25,P.P.69-75,USA.
3. Hu ,W. (2005) ,“**Calibration of multivariate generalized hyperbolic distribution using the EM algorithm,With applications in risk management ,Portfolio optimization and portfolio credit risk**”, Florida State university, Electronic theses,Treatises and Dissertation, The Graduate school.

4. Lemonte , A. J. , and Cordeiro , G. M. (2011) ,“**The exponential generalized inverse Gaussian distribution**”, Statistics and Probability Letters , 81, P.P.506-517.
5. Silva , R. S. ,and Lopes ,H. F. (2006) , “ **The extended generalized inverse Gaussian distribution for log-linear and stochastic volatility models**”, Barazilian Journal of Probability and Statistic , 20 , P.P.67-91.
6. Thabane L.,Drekic S. (2002),“**Testing linear Hypothesis with a generalized multivariate modified Bessel error variable**”, IIQP Research Report.
7. Thabane L.,Drekic S. (2003),“**Hypothesis testing for the generalized multivariate modified Bessel model**”, Journal of Multivariate Analysis ,86 , P.P.360-374.