المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (13) 2008
ص ص [57–70]

توظيف طريقة كروسكال في مسألة التخصيص

أحمد محمود السبعاوي* إدريس محمد نوري**

الملخص

تعد مسألة التخصيص من المسائل المهمة في مجال بحوث العمليات ، اذ أنها تعالج كيفية تخصيص مجموعة من أعمال مؤلفة من n عمل مختلف $(J_1, J_2, J_3, ...J_n)$ إلى n من الآلات $(M_1, M_2, M_3, ...M_n)$ ، وأن تكون الكلفة الكلية عند حدها الادنى $(\sum C_{ij})$. هناك عدة طرائق تعالج هذه الحالة منها على سبيل المثال الطريقة الهنكارية. وفي بحثنا هذا سوف نتعامل مع البيانات، اذ يتم تحويل مسألة التخصيص إلى بيان ثنائي التجزئة تام ووظفت طريقة (كروسكال) لايجاد شجرة القياس الكلي الاصغر وبذلك يتم الحصول على أمثل تخصيص. تمت مقارنة النتائج لعدة مسائل وكانت النتائج مطابقة (أمثل حل) لكلتا الطريقتين مع ملاحظة أن طريقة (كروسكال) كانت أسرع وأسهل في الوصول الى الحل الامثل .

Employing Kruskal's method for assignment problem

ABSTRACT

The Assignment problem is really considered really very important, which assigns a set of n distinct jobs $(J_1, J_2, J_3, ...J_n)$ to n machines $(M_1, M_2, M_3, ...M_n)$ such that, the total cost $(\sum C_{ij})$ is minimum. The problem is solved by many methods, one of them is the Hungarian's method. This research deals with graphs by proposing a new method which deals with complete bipartite graph using Kruskal's method. We compare the results for different problems which give optimal solution in both methods, but the new method gives a high degree of success and its easy to use.

استاذ مساعد/ قسم الاحصاء والمعلوماتية/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل
** مدرس/ قسم الاحصاء والمعلوماتية/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل

تاريخ التسلم : 2007/7/2 ـــــــــــــــــــــــــ تاريخ القبول : 2007/11/7

1. المقدمة

أن لمشكلة التخصيص أهمية كبيرة في مجالات الحياة العملية وبالأخص في المنشآت وتكمن هذه الأهمية بوجود عدد من الأعمال وليكن قدرها (n) يمكن تنفيذ كل منها بواسطة أي من الإمكانات المتاحة كالمكائن أو العمال البالغ عددها (n) وهي التي تختلف فيما بينها في كلفة أو وقت أو كفاءة التنفيذ لكل عمل أو وظيفة ويكون المطلوب اختيار أحد الإمكانيات المتاحة والمناسبة لتنفيذ كل عمل بأقل تكاليف ممكنة أو بأقل وقت ممكن أو بأعلى كفاءة ممكنة.

يملك محل n ألة يرمز لها على النحو الاتي: $M_1, M_2, M_3, ...M_n$.
وهناك مجموعة أعمال مؤلفة من n عمل مختلف $(J_1, J_2, J_3, ...J_n)$، والمراد تخصيصها إلى هذه الالات. تعتمد كلفة أنجاز أي عمل على الالة التي أسند اليها. نرمز ب C_{ij} لكلفة أنجاز العمل j على الالة i (وأن لم يكن أنجاز عمل خاص على ألة ما ممكناً ، فأننا نجعل القيمة C_{ij} كبيرة جداً). وأن أية الة تستطيع أنجاز عمل واحد فقط ، فالمسألة أذاً هي تخصيص الأعمال إلى الآلات بحيث تكون كلفة الانجاز الكلية أصغرية [1].

ولصياغة المسألة رياضياً ، نعرف الآتي:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{أذا خصص العمل j إلى الآلة i} \\ 0 & \text{في بقية الحالات} \end{cases}$$

وبما أن كل آلة تقبل عملاً واحداً فقط:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \;\; ; \;\; i = 1, 2, ..., n$$

كما أن كل عمل يخصص إلى آلة واحدة فقط:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \;\; ; \;\; j = 1, 2, ..., n$$

فأن دالة الهدف تأخذ الصيغة الآتية:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\ X_{ij}$$

ولمزيد من التفاصيل أنظر [1، 6].

2 . الجانب النظري

1. الطريقة الهنكارية:

طورت هذه الطريقة لحل مسألة التخصيص حلاً أكثر فعالية وذلك بالاعتماد على خاصية رياضية أكتشفها العالم الهنكاري كونيغ Konig، (ومن هنا جاء أسم الطريقة). نفرض في هذه الطريقة أن قيم التكاليف (C_{ij}) غير سالبة. وينص المبدأ الاساسي لهذه الطريقة على أن طرح أو جمع عدد ثابت من أي سطر أو عمود في مصفوفة كلفة التخصيص القياسية لا يؤثر في التخصيص الامثل. فمثلاً، أذا تقلصت كلفة أنجاز أي عمل على الالة 1 الى k دولار، فأن دالة الهدف لمسألة التخصيص تصبح كما يأتي [2، 4، 5، 7] :

يراد جعل دالة الهدف الآتي أصغرياً:

.........(1)

$$\min\ Z = \sum_{j=1}^{n}(C_{1j}-K)X_{1j} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \quad - K\sum_{j=1}^{n} X_{1j}$$

ألا أن $\sum_{j=1}^{n} X_{1j} = 1$ لأن الآلة 1 يخصص لها عمل واحد فقط، فتصبح الدالة Z :

Z = (القيمة الاصلية) – k

ويعتمد أجراء الحل على طرح كلفة كبيرة الى حد كاف من مختلف الاسطر او الاعمدة، بحيث نحصل على التخصيص الأمثل بواسطة التحري inspection. تبدأ الخوارزمية بفحص كل سطر (أو عمود) في مصفوفة الكلفة لتعيين العنصر الاصغر. ثم نطرح هذه الكمية من كل عناصر السطر (أو العممود)، فنحصل على مصفوفة كلفة تضم على الاقل عنصراً معدوماً واحداً في كل سطر (أو عمود). بعد ذلك، نحاول أجراء تخصيص باستخدام الخلايا ذات الكلفة المعدومة. فأذا أمكن ذلك، نكون قد حصلنا على تخصيص أمثل. فلهذا التخصيص عناصر كلفة (C_{ij}) غير سالبة، ولذا لا يمكن أن تكون القيمة الاصغرية لدالة الهدف $\sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}$ أصغر من الصفر. فيكون التخصيص أذاً، اعتمادا على الكلفة المعدومة أمثلياً.

2. الخوارزمية المقترحة

قبل البدء بشرح الخوارزمية نحتاج إلى بعض المفاهيم في نظرية البيانات

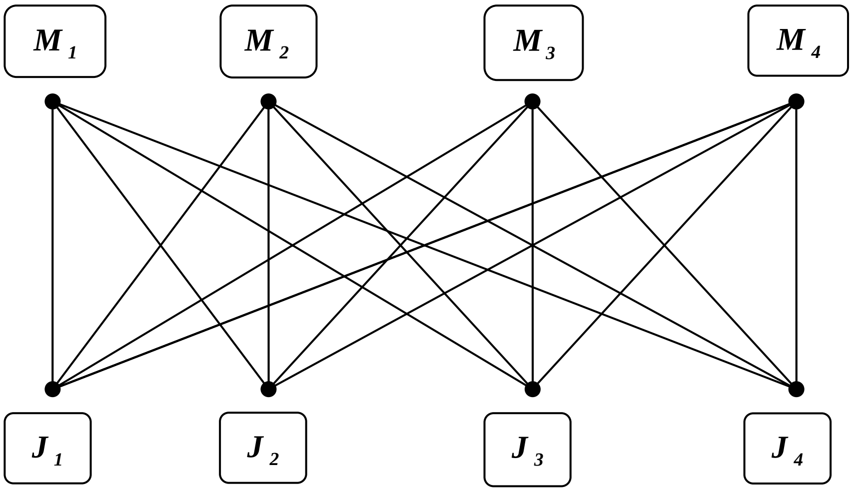
البيان: يعرف البيان G بأنه مجموعة غير خالية V من عناصر تسمى رؤوس البيان، مع عائلة E من أزواج غير مرتبة من رؤوس البيان. يطلق على كل عنصر من عناصرE حافة أو ضلع، ويطلق علىV مجموعة رؤوس البيان G .

بيان ثنائي التجزئة تام: يقال لبيان أنه ثنائي التجزئة تام أذا أمكن تجزئة مجموعة رؤوسه إلى مجموعتين جزئيتين V_1 و V_2 بحيث أن كل رأس في V_1 متجاور مع كل رأس في V_2 ، كل رأس في V_2 متجاور مع كل رأس في V_1 ولا يوجد رأسان في V_1 (V_2) متجاوران.

الشجرة: تعرف الشجرة بأنها بيان متصل لا يحتوي على أية دارة.

2.1 مسائل التخصيص والبيانات

يمكن القول أن نظرية البيانات هي من المواضيع الأولية الرائعة في الرياضيات الحديثة، إذ أن هذه النظرية تستعمل في معظم فروع المعرفة، فهي تخدمنا باعتبارها نموذجاً رياضياً مبسطاً لأي نظام متضمن عملية ثنائية [3]. ففي مسائل التخصيص مثلاً لاحظنا بان هناك تقابلاً بينها وبين موضوع البيانات، أي أن أية مسألة تخصيص يمكن تمثيلها بيانياً والبيان الناتج هو بيان ثنائي التجزئة تام.



وهكذا بالنسبة لأية مسألة تخصيص يمكن تمثيلها بيانياً بهذه الطريقة.

2.2 أشجار القياس الكلي الأصغر

يقصد بالقياس الكلي لشجرة T مجموع قياسات حافات T ، فإذا رمزنا لذلك $\mu(T)$ ، وبذلك فأن

$$\mu(T) = \sum_{e_i \in E(T)} \mu(e_i) \qquad ....(2)$$

حيث أن E(T) هي مجموع حافات T ، وأن $\mu(e_i)$ قياس الحافة e_i.

2.3 طريقة كروسكال لإيجاد شجرة القياس الكلي الأصغر

في سنة 1956 أوجد كروسكال طريقة مختصرة لإيجاد شجرة القياس الكلي الأصغر وتتلخص الطريقة بما يأتي [3]:

نبدأ بحافة من البيان G يكون لها أصغر قياس، ولتكن الحافة e_1. ثم نأخذ تباعاً الحافات $e_2, e_3, ..., e_{n-1}$ بحيث نختار في كل مرحلة حافة لم يسبق اختيارها تكون بأصغر قياس نسبة لما تبقى من حافات في G ، وبحيث أنها لا تشكل دارة مع بعض الحافات التي تم اختيارها. وعندئذ يكون البيان الجزئي T المكون من الحافات $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ التي تم اختيارها بهذه الطريقة شجرة مولدة ل G ذات أصغر قياس كلي.

2.4 توظيف طريقة كروسكال لحل مسألة التخصيص

في هذا البند نعالج مسألة التخصيص باستخدام طريقة جديدة شبيهة بطريقة كروسكال مع بعض الشروط الإضافية للطريقة، لذلك نعيد صياغة الطريقة وكالاتي:

الخطوة الأولى : تمثيل المسألة بيانياً وليكن هذا البيان G ،

الخطوة الثانية : نبدأ بحافة من البيان G يكون لها أصغر قياس، ولتكن الحافة e_1 والواقعة في الرأس M_i مثلاً.

الخطوة الثالثة : نختار حافات من الرأس M_i فقط ، وشروط الاختيار هي:

(أ)- حافة لم يسبق اختيارها،

(ب)- قياسها أصغر من قياس الحافات الباقية في G، أو يساويه.

(ج)- لا تشكل دارة مع بعض الحافات التي تم اختيارها.

الخطوة الرابعة : في حالة عدم وجود حافة (أو الانتهاء من اختبار جميع الحافات) في الرأس M_i بالشروط المذكورة ، نختار حافة من رأس آخر ضمن الشروط وهكذا نستمر باختبار جميع الحافات الباقية في G وبتطبيق جميع شروط الخطوة الثالثة وعندئذ يكون البيان الجزئي T المكون من الحافات $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ التي تم اختيارها بهذه الطريقة شجرة مولدة ل G ذات أصغر قياس كلي.

الخطوة الخامسة: يمكن الآن تحقيق تخصيص نافذ، ولكي يكون هذا التخصيص أمثلياً نبدأ بتخصيص الرؤوس ذات الدرجة الأولى أولاً ثم ذات الدرجات الأعلى مع الأخذ بنظر الاعتبار أن كل رأس (آلة) لا يمكن تخصيصه إلا لعمل واحد فقط ، عند ذلك يتحقق أمثل تخصيص للمسألة.

3. الجانب العملي

المثال الأول [1]:

نريد أيجاد التخصيص الأمثل لأربع آلات، وتعطى كلفة التخصيص بالجدول الآتي:

	J1	J2	J3	J4
M1	10	9	8	7
M2	3	4	5	6
M3	2	1	1	2
M4	4	3	5	6

الحل (الطريقة الهنكارية):

بما أن عدد الاعمال مساو لعدد آلات ، فالمسألة هي تخصيص قياسية.

نبدأ أولاً بفحص الاسطر. فنجد أننا نستطيع أن نحصل على مصفوفة كلفة مختزلة، بأجراء الاتي:

1- طرح القيمة 7 من السطر الاول.

2- طرح القيمة 3 من السطر الثاني.

3- طرح القيمة 1 من السطر الثالث.

4- طرح القيمة 3 من السطر الرابع.

فنحصل أذاً على مصفوفة الكلفة الاتية :

	J1	J2	J3	J4
M1	3	2	1	0
M2	0	1	2	3
M3	1	0	0	1
M4	1	0	2	3

ومن الجدول السابق، نتوصل الى تخصيص نافذ باستخدام الخلايا المعدومة الكلفة فقط، وهو يقابل $M_1 \rightarrow J_4$, $M_2 \rightarrow J_1$, $M_3 \rightarrow J_3$, $M_4 \rightarrow J_2$. ويكون هذا التخصيص أمثل. وتكون الكلفة الكلية هي: $14 = 3 + 1 + 3 + 7$.

وقد لا يكون من الممكن دوماً، في الحالة العامة، أيجاد تخصيص نافذ باستخدام الخلايا المعدومة الكلفة. لتوضيح ذلك، ندرس مسألة التخصيص الاتية:

المثال الثاني [1]:

نريد أيجاد الحل الامثل لمسألة التخصيص، ذات مصفوفة الكلفة الاتية :

	J1	J2	J3	J4
M1	10	9	7	8
M2	5	8	7	7
M3	5	4	6	5
M4	2	3	4	5

الحل (الطريقة الهنكارية):

يطرح أولاً العنصر الاصغر في كل سطر، من بقية عناصر ذلك السطر.
وهذا يؤدي إلى مصفوفة الكلفة المختزلة الآتية:

	J1	J2	J3	J4
M1	3	2	0	1
M2	0	3	2	2
M3	1	0	2	1
M4	0	1	2	3

وبما أن للألتين M_2, M_1 كلفة معدومة من أجل العمل J_1 فقط، فلا يمكن عد التخصيص الذي يعتمد على الخلايا المعدومة الكلفة فقط نافذاً. وللحصول على المزيد من الاصفار، يطرح العنصر الاصغر في العمود الرابع من جميع عناصر ذلك العمود.

	J1	J2	J3	J4
M1	3	2	0	0
M2	0	3	2	1
M3	1	0	2	0
M4	0	1	2	2

بأستخدام الخلايا المعدومة الكلفة، لا يمكن تخصيص ألا ثلاثة أعمال فقط. لذا، لا يمكن تحقيق أي تخصيص نافذ. في مثل هذه الحالات، نقوم برسم عدد أصغري من الخطوط المارة ببعض الاسطر والاعمدة المختارة (عمودياً أو أفقياً)، بهدف تغطية كل الخلايا المعدومة الكلفة. أن عدد الخطوط الاصغري اللازم لذلك هو العدد الاعظمي للأعمال التي يمكن تخصيصها باستخدام الخلايا المعدومة.

وفي مثالنا، يتحقق ذلك برسم ثلاثة خطوط كما يأتي :

	J1	J2	J3	J4
M1	| 3	2	0	0
M2	0 |	3	2	1
M3	1 |	0	2	0
M4	0 |	1	2	2

نختار الآن، من بين العناصر غير المغطاة، القيمة الصغرى. ففي مثالنا، نختار العنصر 1. ثم نطرح هذه القيمة من كل العناصر غير المغطاة. كما نجمع هذه القيمة الى العناصر المغطاة كافة والواقعة في نقاط تقاطع أي خطين. فنحصل أذاً على مصفوفة الكلفة المختزلة الاتية:

	J1	J2	J3	J4
M1	4	2	0	0
M2	0	2	1	0
M3	2	0	2	0
M4	0	0	1	1

يكافئ الاجراء السابق طرح العنصر 1 من السطرين الثاني والرابع، وجمعه الى العمود الاول في مصفوفة الكلفة. لذا، ومرة أخرى، لم يتغير التخصيص الامثل.

يمكن الان تحقيق تخصيص نافذ، وهذا التخصيص يكون أمثلياً عند أجراء الآتي:

$M_4 \to J_2 , M_3 \to J_4 , M_2 \to J_1 , M_1 \to J_3$ ،

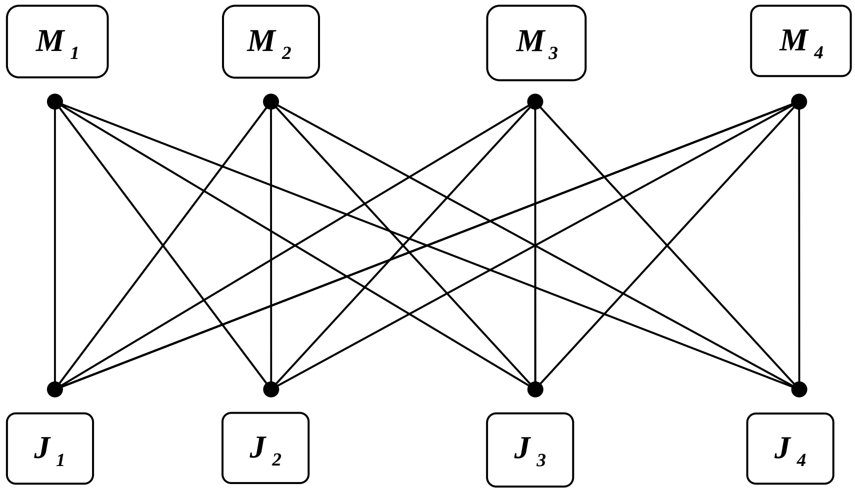
وتكون الكلفة الكلية هي: $\mathbf{20 = 3 + 5 + 5 + 7}$.

اذا تعذر تحقيق تخصيص نافذ في هذه المرحلة، ينبغي أعادة رسم الخطوط لتغطية الاصفار والاستمرار بهذه الطريقة حتى التوصل الى تخصيص نافذ.

والآن نعيد حل المثالين المذكورين بأستخذام الخوارزمية المقترحة . بالنسبة الى المثال الأول:

	J1	J2	J3	J4
M1	10	9	8	7
M2	3	4	5	6
M3	2	1	1	2
M4	4	3	5	6

بتطبيق خطوات الخوارزمية على المثال فأن :

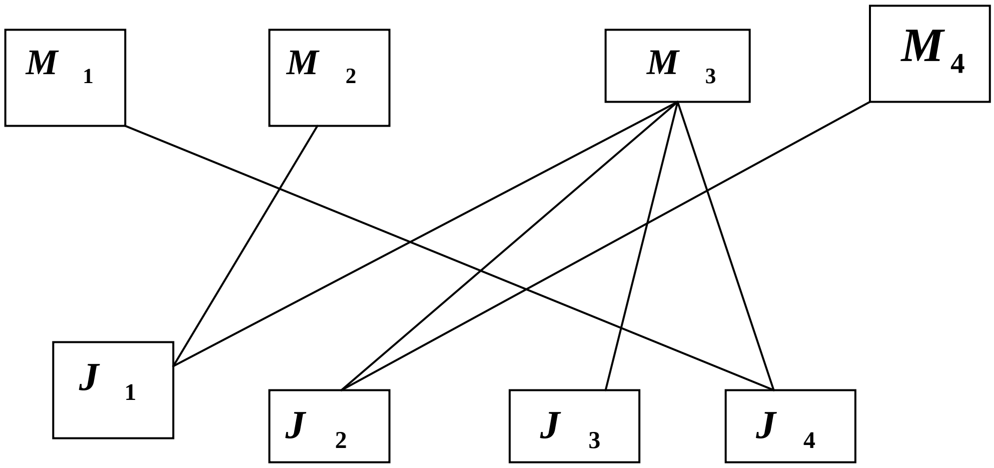


أما الأوزان فهي كما مثبتة في المصفوفة أعلاه.

الخطوة الثانية : نبدأ بالحافة $M_3 J_2$ لأن قياسها أصغر (ويمكن البدء بالحافة $M_3 J_3$) ، ثم نختار $M_3 J_3$ ، $M_3 J_4$ ، $M_3 J_1$

الآن أمامنا خياران أما نختار $M_2 J_1$ أو $M_4 J_2$

لنفرض الاختيار هو $M_2 J_1$ ثم نختار $M_4 J_2$ وهكذا نستمر بتطبيق خطوات الخوارزمية والبيان الناتج هو



يمكن الآن تحقيق تخصيص نافذ ونلاحظ أن درجة الرأس M_3 هي 4 ، أما الرؤوس الأخرى فهناك حافة واحدة فقط تصل بينها وبين مجموعة J ، لذلك يبدأ التخصيص أولاً بالرؤوس M_1 , M_2 , M_4 ثم الرأس M_3 أي بالشكل الآتي :

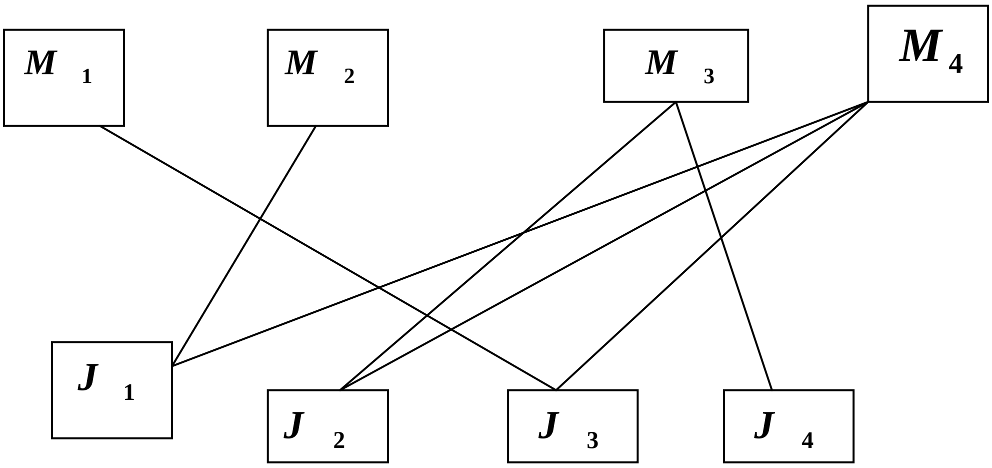
$$M_1 \rightarrow J_4 \quad ، M_2 \rightarrow J_1 \quad ، M_4 \rightarrow J_2 \quad M_3 \rightarrow J_3$$

وهو أمثل تخصيص كما حصلنا عليه باستخدام الطريقة السابقة. وتكون الكلفة الكلية هي: $1 + 3 + 3 + 7 = 14$.

أما بالنسبة الى المثال الثاني

	J1	J2	J3	J4
M1	10	9	7	8
M2	5	8	7	7
M3	5	4	6	5
M4	2	3	4	5

فعند تطبيق الخوارزمية فأن البدء يكون بالحافة $M_4 J_1$ ، أما البيان الناتج بعد الانتهاء من الخوارزمية فيكون بالشكل الآتي :



فيكون التخصيص أولاً $M_1 \rightarrow J_3$ ، $M_2 \rightarrow J_1$ لأن درجة كل من الرأسين M_1 ، M_2 واحدة ، أما بالنسبة للرأس M_4 فنلاحظ أن هناك ثلاثة أعمال تشترك معه وبما أن كل عمل يخصص إلى آلة واحدة فقط ولان J_1 , J_3 قد تم تخصيصهما لذلك يخصص العمل J_2 على الآلة M_4 . وأخيراً يبقى لدينا اختيار واحد فقط بالنسبة الى العمل J_4 فيتم تخصيصه على الآلة M_3 . أي يكون التخصيص للمسألة بالشكل الآتي :

$M_1 \rightarrow J_3$ ، $M_2 \rightarrow J_1$ ، $M_4 \rightarrow J_2$ ،

$M_3 \rightarrow J_4$

وهو أمثل تخصيص كما تم الحصول عليه بالطريقة السابقة. أما الكلفة الكلية فهي: $20 = 7 + 5 + 3 + 5$.

4. الاستنتاجات :

من خلال ما تقدم نستنتج الآتي :

1. الوصول إلى أمثل تخصيص بكلتا الطريقتين وبسهولة.
2. توظيف البيانات لمعالجة مسألة التخصيص من خلال اقتراح خوارزمية جديدة وملاءمتها لهذه المسألة وفعلاً تم الوصول إلى أيجاد أمثل تخصيص بسهولة تامة وكفاءة عالية في الوقت.

5. المصادر

1. بهجة جي، صباح الدين ، وائل معلا، محمد نايفة، حسام مراد و محمد نوار العراق (1988). "بحوث العمليات".المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر، دمشق، سوريا.
2. جابر، عدنان شمخي و حسن، ضوية سلمان (1988). "مقدمـة فـي بحـوث العمليات". جامعة بغداد، بغداد.
3. عزيز، علي عزيز (1982). " مقدمة في نظرية البيانات ". جامعة الموصـل، الموصل.

4. Gubta, P. K and Hira, D. S, (1987), " Operations Research, An Introduction". Published by S. Chand t. Company (pvt) Ltd New Delhi.
5. Taha, H. A., (1992), " Operation Research, An Introduction". Macmillan Publishing Company, Fifth Edition U. S. A.
6. Vanderbei, R. J., (2001), "Linear Programming Foundations and Extensions". Printed in the United States of American, Second Edition.
7. Winston, W. L., (1994), " Operations Research, Applications and Algorithms". International Thomson Publishing, Third Edition, Company Belmont, California.