المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (14) 2008

ص ص [244–276]

تكافؤ التنبؤ بين نموذج فضاء الحالة ونماذج ARIMA مع التطبيق

هيلاء انس عبد المجيد*

الملخص

يوضح هذا البحث موضوع التنبؤ باسلوب نماذج ARIMA ونموذج فضاء الحالة. فبعد إيجاد النموذج الملائم لسلسلة زمنية مستقرة يتم التنبؤ باستخدام نماذج ARIMA ، والتنبؤ بنماذج ARIMA بعد تمثيلها بأسلوب نموذج فضاء الحالة ثم استخدام MSE معيارا لبيان التكافؤ لكلا الاسلوبين .

Forecasting Efficiency between State Space and ARIMA Models with Application

ABSTRACT

This research shows the forecasting using both of ARIMA and state space models. We firstly predict using ARIMA models, then we predict again after using ARIMA state space representation. We consider the MSE as a criterion to show the equivalent of procedures.

1- المقدمة:

ان نماذج ARMA التي تعطي كفاية في تقدير عدد كبير من المعلمات وكذلك تحقق شرط الاستقرارية و قابلية الانعكاس و $|1-\varphi B| = 0$ أي أن الجذور تقع خارج دائرة الوحدة لهذا تكون مستقرة وإذا وقع الجذر داخل دائرة الوحدة فان النموذج يكون غير مستقر وبأخذ الفروق المناسبة ليصبح مستقرا فيطلق عليها نماذج (ARIMA) (Reinert , 2002)

في هذا البحث تم استخدام نماذج فضاء الحالة التي تتميز بموازاة المتغيرات المعروفة أو التي يمكن قياسها ، وان المتغيرات التي لا تقاس وهي ضمن العملية فإنها تدمج في النموذج (Jong, and Penzer, 2000) (البدراني ، 2002).

* مدرس مساعد- قسم الإحصاء والمعلوماتية- كلية علوم الحاسبات والرياضيات

تاريخ التسلم : 11 /2008/3 ———— تاريخ القبول : 7 /2008/7

يمكن وضع نماذج ARMA و ARIMA لـ (بوكس – جنكنز) في شكل نموذج فضاء الحالة وهذا يعني أن نموذج ARMA أو ARIMA يمكن التعامل معه كحالة خاصة من نموذج فضاء الحالة (Harvey et a1.,2004) .

يهدف هذا البحث إلى تكافؤ التنبؤ بين نماذج فضاء الحالة ونماذج ARIMA . وسننظر إلى ثلاثة نماذج لتوضيح كيف يتم التوصل إلى تكافؤ التنبؤ .

2- مفهوم فضاء الحالة:

إن نماذج فضاء الحالة تعطي أساسيات مؤثرة لتحليل السلاسل الزمنية عمليا ضمن مدى واسع من المجالات ومن ضمنها الإحصائيات والمصفوفات الاقتصادية والهندسية ، وعلل كل من (Jong,and Penzer,2000)، (Makridakis,1998) عدة أسباب استخدام نماذج فضاء الحالة لكونها مجموعة متطورة لمعادلات التعاقب recursion (kalman kalman1961, 1960) التي تستخدم لإيجاد التنبؤ . وهذا الأسلوب يطلق عليه معادلات التكرار في مرشح كالمن(kalman filter) أو لـ(kalman recursion) ، هذه المعادلات تساعد على تسهيل الحسابات لإيجاد خطأ التنبؤ لهذا فان النموذج المستخدم يمكن كتابته ضمن صيغة فضاء الحالة وبالامكان تطبيق جميع العمليات الحسابية أيضا باستخدام معادلات (kalman recursion). وقد بين (Harvey et a1., 2004) إن صيغة فضاء الحالة تتميز بالسهولة والبساطة بالنسبة الى عمليات المعقدة، وتستخدم لتقدير الحالات التي لايمكن ملاحظتها أو قياسها أو السيطرة عليها، فضلا عن انها تعمل على تسهيل معالجة القيم المفقودة في السلاسل الزمنية. ومن نماذج التنبؤ لصيغة فضاء الحالة ان هذه الصيغة قد تبدو غير متشابهة مع أي نموذج فيجب علينا مسبقا ان نعد جميع السلاسل الزمنية وكذلك نماذج الانحدار التي توصف في صيغة (فضاء الحالة) حتى نماذج الانحدار الحركي المعقد له نظير الذي يعطي تماما التنبؤات نفسها.(Makridakis,1998) وان نموذج فضاء الحالة يتكون من :

معادلة الحالة

$$z_{t+1} = Az_t + Ga_{t+1} \quad (1)$$

معادلة المخرجات

$$y_t = Hz_t \quad (2)$$

حيث أن :

z_t : يمثل متجه الحالة ذا بعد (k*1) .

y_t : يمثل متجه المخرجات (المشاهدات) ذا بعد (m*1) .

A : تمثل مصفوفة الانتقال ذا بعد (k*k) .

G : تمثل مصفوفة المدخلات ذا بعد (k*m) .

H : تمثل مصفوفة المخرجات (المشاهدات) ذا بعد (m*k).

a_{t+1} : يمثل متجه الأخطاء العشوائية ذا بعد (m*1) ويفترض بأنه مستقل عن $\mathbf{a_t}$

3- تمثيل فضاء الحالة بنماذج ARIMA .

ان تمثيل نموذج فضاء الحالة باستخدام المصفوفات سواء كان النموذج أحادي المتغير univariate أو متعدد المتغيرات multivariate للعديد من السلاسل الزمنية ، التي تعطينا تركيبة مكافئة للتعامل مع العمليات الحسابية بشكل واسع . فضلا عن إمكانية التعامل مع نموذج فضاء الحالة مباشرة ببعض الطرائق الجديدة للتنبؤ كنماذج ARMA أو ARIMA . (Makridakis, 1998)

الصيغة العامة لفضاء الحالة تم وصفها أعلاه بالمعادلتين (1) ، (2) وصيغة نماذج ARIMA تكتب كالآتي :

$$\varphi(B)z_t = \theta(B)a_t \quad (3)$$

حيث أن :

φ , θ : تمثل معلمات النموذج ARIMA برتبة (p,d,q) .

B : يمثل عامل الإزاحة الخلفي .

z_t : تمثل سلسلة المخرجات بعد اخذ الفروق المناسبة لها (أي ان $z_t = (1-B)^d u_t$) (Wei,1991) (Pankrats,1983)

a_t : تمثل الأخطاء العشوائية .

ويتمثيل نماذج ARIMA من خلال تمثيل فضاء الحالة والموضحة بشكل مصفوفات:

$$\begin{bmatrix} z_{t+1/\ t+1} \\ z_{t+p/\ t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0.......0 \\ 0 & 0 & I & 0.......0 \\ : \\ : \\ \phi_p & \phi_{p-1} & .... & \phi_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t+1/t} \\ : \\ : \\ z_{t+P-1/t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ : \\ : \\ \psi_{p-1} \end{bmatrix} a_{t+1} \quad \ldots (4)$$

$$y_t = [\mathrm{I_m} \ \ 0 \ \ 0 \ ....0\,] . \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t+1/t} \\ : \\ : \\ z_{t+p-1/t} \end{bmatrix} \quad \ldots (5)$$

ويتمثيل فضاء الحالة بنماذج ARIMA نظريا في هذا البحث بثلاثة نماذج:

<u>النموذج الأول</u>: تمثل بيانات السلسلة الزمنية لعدد المعدد اليومي من "عيوب صناعة الشاحنة"

Daily Average Number of Truck Manufacturing Defects لهذا النموذج. (Wei,1991) ومن خلال التطبيق العملي كما مبين لاحقا لإيجاد النموذج الملائم وكان ARIMA(1,1,1) ويكتب كالآتي:

$$(1 - \phi_1(B))\, z_t = (1 - \theta_1(B))\, a_t \quad (6)$$

وتبسيط المعادلة (6) كالآتي:

$$z_t = \phi_1\, z_{t-1} - \theta_1\, a_{t-1} + a_t \quad (7)$$

ويتمثيل فضاء الحالة لهذا النموذج كالآتي:

حيث ان رتبة النموذج نحصل عليها من $m = \max(p, q+1)$. (Jong, and Penzer,2000)،(Zivot,2006) إذن رتبة النموذج هي $(m = 2)$ فان

$$\begin{bmatrix} z_{t+1/t+1} \\ z_{t+2/t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t+1/t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} a_{t+1} \quad \text{… (8)}$$

حيث ان $\psi_1 = \phi_1 - \theta_1$ ، $\psi_0 = 1$ ، $\phi_2 = 0$ فان:

$$z_{t+1/t+1} = z_{t+1/t} + a_{t+1} \quad (9)$$

$$z_{t+2/t+1} = \phi_2 z_t + \phi_1 z_{t+1/t} + \psi_1 a_{t+1} \quad \text{… (10)}$$

وان:

$$z_{t+2/t+2} = z_{t+2/t+1} + a_{t+2} \quad (11)$$

وبما ان $z_{t+2/t+2} = z_{t+2}$ ، $z_{t+1/t+1} = z_{t+1}$ من خلال تعويض المعادلة (9) في (10) والمعادلة (10) في (11) نحصل على :

$$z_{t+2} = \phi_1 z_{t+1} + a_{t+2} + (\psi_1 - \phi_1)\, a_{t+1} \quad (12)$$

أو تكتب بالشكل الآتي :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} + a_t \quad (13)$$

فان المعادلة (13) تمثل نموذج ARIMA .

<u>**النموذج الثاني**</u>: تم التطبيق على بيانات المؤشر المتقدم n=150 لـ (Leading Indicator n=150: Box- Jankies).(Pankrats, 1991)، ومن خلال التطبيق العملي كما مبين لاحقا لإيجاد النموذج الملائم وكان ARIMA(1,1,1) ، مشابها لاشتقاق النموذج الأول .

<u>**النموذج الثالث**</u> : تم التوصل إلى النموذج الملائم للسلسلة " السرعة الملحوظة لمعالجة مرضى الشيزوفرينية Perceptual Speed Scoresfor a Schizophrenic Patient (اليومية ، n=120) أي البدء بنظام إعطاء الحقن ضمن فترة 61 يوما. (Pankrats, 1991)، من خلال التطبيق العملي الموضح لاحقا. فان النموذج الملائم كان ARIMA(2,1,1) ، فان :(Wei,1991)

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} + a_t \quad (14)$$

وبتمثيل فضاء الحالة بالنموذج أعلاه بالشكل الآتي (m=2) :فان :

$$\begin{bmatrix} z_{t+1/t+1} \\ z_{t+2/t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathrm{z}_{\mathrm{t}} \\ z_{t+1/t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} \mathrm{a}_{\mathrm{t+1}} \tag{15}$$

$$z_{t+1/t+1} = \mathrm{z}_{\mathrm{t+1}/t} + \mathrm{a}_{\mathrm{t+1}} \tag{16}$$

$$z_{t+2/t+1} = \phi_1 z_{t+1/t} + \phi_2 z_{t+1/t} + \phi_2 z_t + \psi_1 a_{t+1} \tag{17}$$

ومن المعادلة (16) نحصل على:

$$z_{t+2/t+2} = \mathrm{z}_{\mathrm{t+2/t+1}} + \mathrm{a}_{\mathrm{t+2}} \tag{18}$$

وان $z_{t+1/t+1} = \mathrm{z}_{\mathrm{t+1}} \quad , \quad \mathrm{z}_{\mathrm{t+2/t+2}} = \mathrm{z}_{\mathrm{t+1}}$

ونعوض المعادلة (16) في (17) والمعادلة (17) في (18) فنحصل على ما ياتي:

$$z_{t+2} = \phi_1 z_{t+1} + \phi_2\ \mathrm{z}_{\mathrm{t+1}} + \mathrm{a}_{\mathrm{t+2}} + (\psi_1 - \phi_1)\,\mathrm{a}_{\mathrm{t+1}} \tag{19}$$

ويمكن كتابة المعادلة (19) بالشكل الآتي :

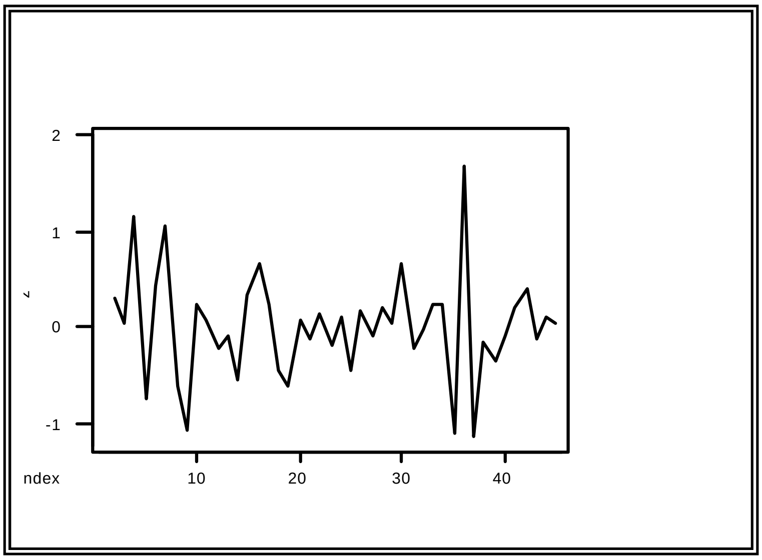
$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} + \mathrm{a}_{\mathrm{t}} \tag{20}$$

والمعادلة أعلاه تمثل نموذج ARIMA(2,1,1) .

الجانب التطبيقي :

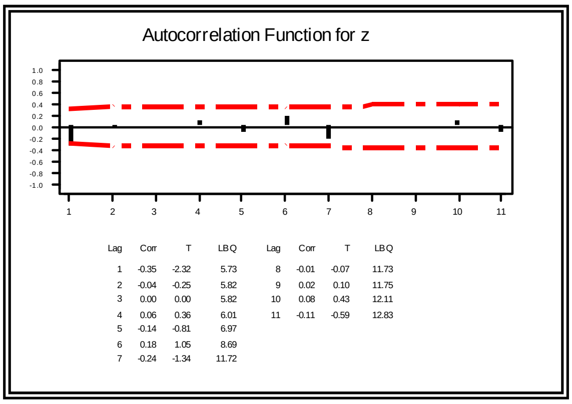
تم استخدام ثلاثة نماذج لـ ARIMA وتمثيل نموذج فضاء الحالة لهذه النماذج والوصول إلى نتائج التنبؤ لكل من نماذج ARIMA و نموذج فضاء الحالة لهذه النماذج وكالاتي :

<u>النموذج الأول</u> :إن الرسم الزمني للبيانات موضح في الشكل (1) بعد ثبوتها بالتباين واستقرارها بالوسط .

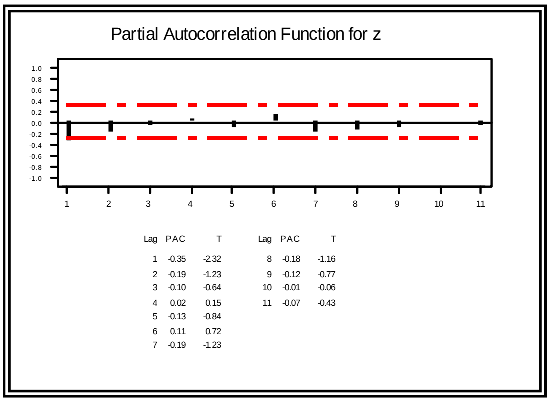


الشكل (1) يمثل الر سم الز منى

ومن خلال رسم دالة الارتباط الذاتي (acf) كما في الشكل (2) وكذلك رسم دالة الارتباط الذاتي الجزئي (pacf) في الشكل (3) تم تحديد النموذج ARIMA الملائم وكان ذا رتبة ARIMA(1,1,1) حيث ان $\phi_1 = -0.3487 , \theta_1 = 0.9863$ معلمات النموذج والذي يمتلك اقل SSR (Pankrats,1991).



الشكل (2): رسم دالة الارتباط الذاتى

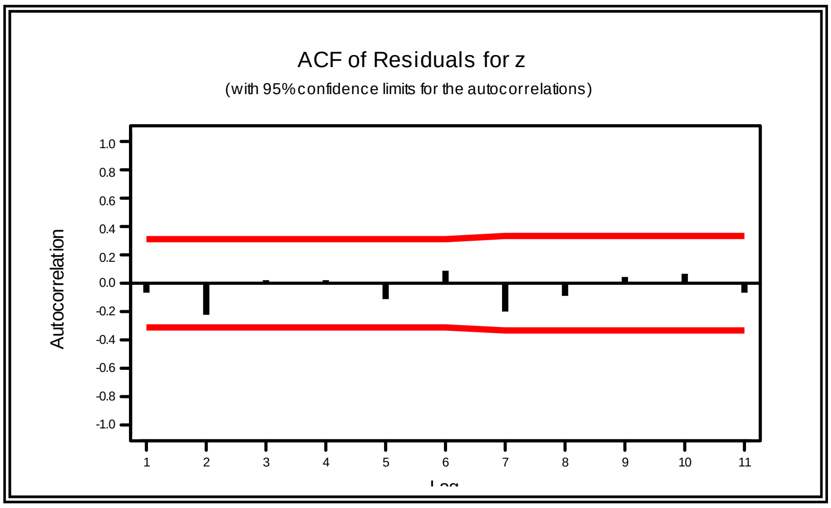


الشكل (3): رسم دالة الارتباط الذاتى الجزئى

وبالتعويض في المعادلة (3) نحصل على:

$$z_t = (-0.3487)\, z_{t-1} - (0.9863)\, a_{t-1} + a_t \qquad (21)$$

وتم فحص النموذج من خلال رسم دالة الارتباط الذاتي للبواقي(acf of residuals) كما في الشكل (4) .



الشكل (4):رسم دالة الارتباط الذاتي للبواقي

ومن العادلة (22) تم إيجاد قيم للبواقي كالآتي:

$$\hat{a}_t = z_t - \phi_1 z_{t-1} + \theta_1 a_{t-1} \qquad (22)$$

وان $a_1 = 0$ فان:

$$\hat{a}_2 = z_2 - (-0.3487)\, z_1 + (0.9863)\, a_1 \qquad (23)$$

وهكذا لباقي القيم كما مبينة في الجدول (1) :

الجدول (1) : يوضح القيم التقديرية للبواقي

t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$
1.	0.00000	.16	1.21020	.31	0.37993
2.	0.14461	.17	0.83078	.32	0.61426
3.	1.31660	.18	0.07248	.33	0.94302
4.	0.95303	.19	0.05424-	.34	0.07272-
5.	1.12850	.20	0.14560-	.35	1.22820
6.	2.30990	.21	0.03545-	.36	0.65718
7.	2.03090	.22	0.15266-	.37	0.09066
8.	0.72038	.23	0.09985-	.38	0.32638-
t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$
9.	0.57740	.24	0.49013-	.39	0.54744-
10.	0.74318	.25	0.44335-	.40	0.35481-
11.	0.56438	.26	0.46103-	.41	0.14677
12.	0.39691	.27	0.27609-	.42	0.18121
13.	0.18991-	.28	0.16908-	.43	0.24037
14.	0.04910-	.29	0.50369	.44	0.33195
15.	0.73665	.30	0.49694		

ثم التنبؤ بنموذج ARIMA(1,1,1) من t =39 وكالاتي:

$$\hat{z}_t(l) = \phi_1 z_t - \theta_1 \hat{a}_t + \hat{a}_{t+1} \quad (24)$$

وبالتعويض

$$\hat{z}_{39}(1) = (-0.3487)z_{39} - (0.9863)\hat{a}_{39} + \hat{a}_{40} \quad (25)$$

وهكذا لبقية القيم الموضحة في الجدول (2) مع فترات التنبؤ العليا والدنيا.

الجدول (2): يوضح قيم التنبؤ مع فتراته

فترات التنبؤ الدنيا	فترات التنبؤ العليا	قيم التنبؤ	قيم السلسلة	t
0.3032	0.1368	0.22	0.22	1-
0.5032	0.3368	0.42	0.42	2-
-0.0218	-0.1932	-0.11	-0.11	3-
0.0932	-0.0732	0.01	0.1	4-
0.1732	0.0068	0.09	0.06	5-
-0.2768	-0.4432	-0.36		6-
0.1832	0.0168	0.1		7-
0.0432	-0.1232	-0.04		8-
0.0932	-0.0732	0.01		9-
0.0802	-0.0862	-0.003		10-
0.0842	-0.0822	0.001		11-

لإيجاد معدل مربع الخطأ للتنبؤ(MSE) من الصيغة الاتية (Makridakis,1998)

$$MSE = \frac{\Sigma(z_t - \hat{z}_t)^2}{n} \qquad (26)$$

فان MSE = 0.0018 . وباستخدام فضاء الحالة لتمثيل نموذج ARIMA(1,1,1) كالآتي:

$$z_{t+2} = \phi_1(z_{t+1} - a_{t+1}) + \psi_1 a_{t+1} + a_{t+2} \qquad (27)$$

ولإيجاد البواقي لهذا النموذج كالآتي:

$$\hat{a}_{t+2} = z_{t+2} - \phi_1(z_{t+1} - a_{t+1}) - \psi_1\, a_{t+1} \qquad (28)$$

حيث أن كل من $a_1 = 0 , a_2 = 0$ فان:

$$\hat{a}_3 = z_3 - (-0.3487)(z_2 - a_2) - \psi_1\, a_2 \qquad (29)$$

وهكذا لبقية القيم كما مبينة في الجدول (3) :

الجدول (3):يوضح القيم التقديرية للبواقي

t	$\hat{a}_t$		$\hat{a}_t$		$\hat{a}_t$
1.	0.00000	.16	1.09100	.31	0.28300
2.	0.00000	.17	0.71320	.32	0.51866
3.	1.17390	.18	-0.04349	.33	0.84873
4.	0.81236	.19	-0.16862	.34	-0.16572
5.	0.98970	.20	-0.25842	.35	1.13650
6.	2.17310	.21	-0.14672	.36	0.56671
7.	1.89590	.22	-0.26241	.37	0.00143
8.	0.58725	.23	-0.20809	.38	-0.41438
9.	0.44610	.24	-0.59688	.39	-0.63424
10.	0.61368	.25	-0.54865	.40	-0.44042
11.	0.43665	.26	-0.56488	.41	0.06233
12.	0.27093	.27	-0.37852	.42	0.09793
13.	-0.31416	.28	-0.27011	.43	0.15823
14.	-0.17165	.29	0.40405	.44	0.25093
15.	0.61578	.30	0.39866		

وبعد ذلك يتم التنبؤ بنموذج فضاء الحالة عند $t = 39$ كالآتي :

$$\hat{z}_t(l) = (-0.3487)(z_t - \hat{a}_t) + \psi_1 \hat{a}_t + \hat{a}_{t+1} \tag{30}$$

$$\hat{z}_{39}(1) = -0.3487\,(z_{39} - \hat{a}_{39}) + \psi_1 \hat{a}_{39} + \hat{a}_{40} \tag{31}$$

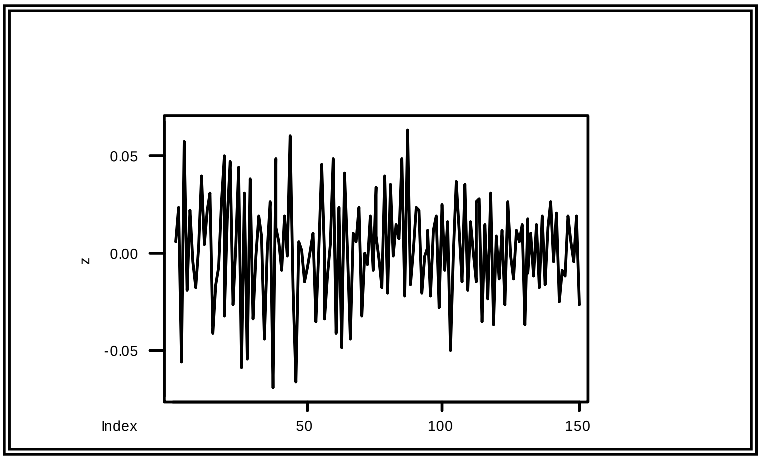
والجدول (4) يبين قيم التنبؤ مع فترات التنبؤ العليا والدنيا

الجدول (4) : يوضح قيم التنبؤ مع فتراته

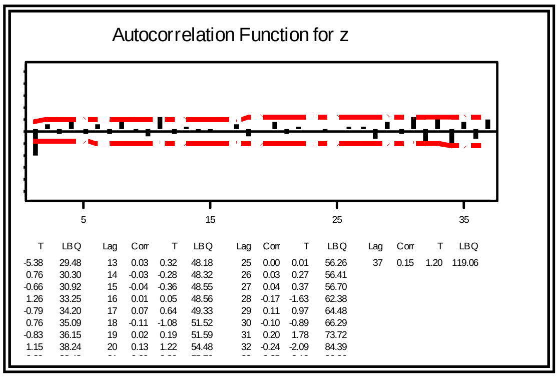
t	قيم السلسلة	قيم التنبؤ	فترات التنبؤ العليا	فترات التنبؤ الدنيا
1-	0.22	0.22	0.1368	0.3032
2-	0.42	0.42	0.3368	0.5032
3-	-0.11	-0.11	-0.1932	-0.0218
4-	0.1	0.01	-0.0732	0.0932
5-	0.06	0.09	0.0068	0.1732
6-		-0.3	-0.5066	-0.2168
7-		0.1	0.0168	0.1832
8-		-0.04	-0.1232	0.0432
9-		0.01	-0.0732	0.0932
10-		-0.003	-0.0862	0.0802
11-		0.001	-0.0822	0.0842

وبملاحظة نتائج التنبؤ لكلا الجدولين (3) و(4) تعطي القيم نفسها وبإيجاد معدل مربع الخطأ لنموذج فضاء الحالة والذي يساوي 0.0018 وهي نفس نتيجة MSE لنموذج ARIMA أي تم الحصول على نتائج التنبؤ نفسها من خلال كلا النموذجين.

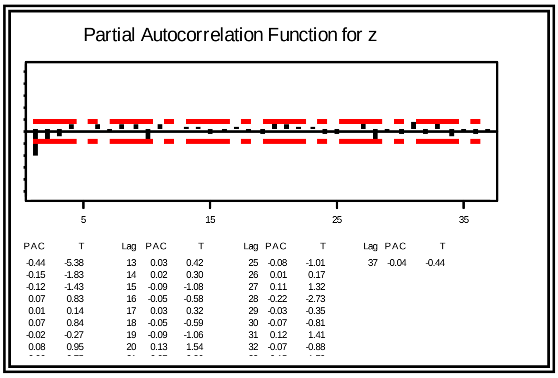
<u>النموذج الثاني</u> :الرسم الزمني للبيانات بعد استقرارها بالوسط كما مبين في الشكل رقم (5) ، ومن رسم دالتي (acf) و (pacf) في الشكل (6) و(7) على التوالي وتم تحديد النموذج الملائم ARIMA(1,1,1) بمعلمتين $\theta_1 = 0.9915$, $\phi_1 = -0.4447$.



الشكل (5): الرسم الزمني لبيانات السلسلة المستقرة

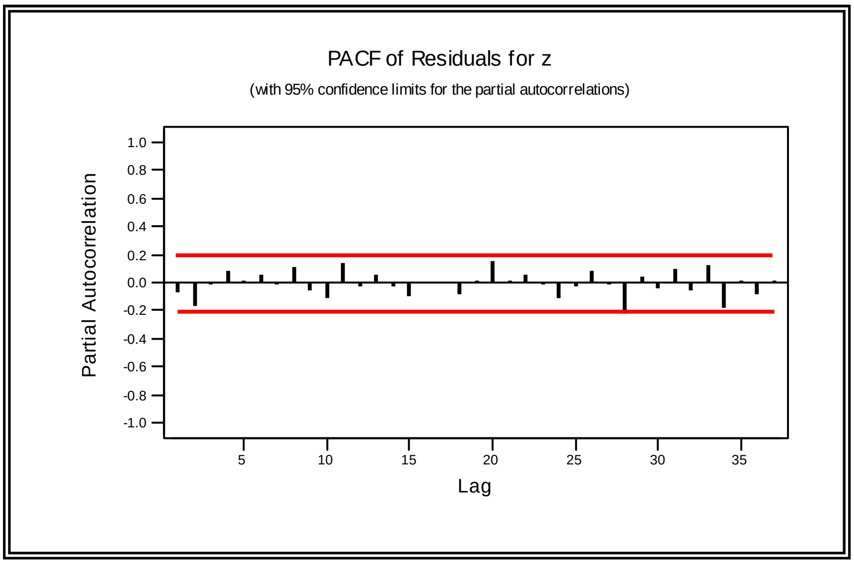


الشكل(6): رسم دالة الارتباط



الشكل(7): رسم دالة الارتباط الذاتي الجزئي

وتم فحص النموذج من خلال رسم دالة acf للبواقي كما مبين في الشكل (8).



الشكل (8) : رسم دالة الارتباط الذاتي للبواقي

وبالتعويض في المعادلة (22) نحصل على ما ياتي:

$$\hat{a}_2 = z_2 + (-0.4447)z_1 + (0.9915)a_1 \qquad (32)$$

حيث ان $a_1 = 0$ ، والجدول (5) يوضح بقية القيم كالآتي:

الجدول (5): يوضح القيم التقديرية الأخطاء العشوائية

t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$
1	0.000000	31	0.127140	61	0.055235	91	0.281880	121	0.259040
2	0.027181	32	0.143730	62	0.016056	92	0.269370	122	0.234440
3	0.018961-	33	0.101310	63	0.035772	93	0.269090	123	0.246930
4	0.013718	34	0.081303	64	0.055854	94	0.280310	124	0.254440
5	0.019748	35	0.108320	65	0.011709	95	0.261560	125	0.237600
6	0.033337	36	0.048879	66	0.002416	96	0.261390	126	0.241660
7	0.039169	37	0.065922	67	0.012836	97	0.284540	127	0.250290
8	0.018533	38	0.100770	68	0.038806	98	0.263090	128	0.266160
9	0.013069	39	0.111400	69	0.015840	99	0.273320	129	0.233180
10	0.054780	40	0.103820	70	0.000986	100	0.273580	130	0.231950
11	0.076101	41	0.117810	71	0.004808-	101	0.284390	131	0.227910
12	0.099480	42	0.124320	72	0.012766	102	0.238680	132	0.232200
13	0.139400	43	0.183440	73	0.013031	103	0.214060	133	0.223570
14	0.109980	44	0.190170	74	0.042948	104	0.249230	134	0.231000
15	0.073498	45	0.113040	75	0.065914	105	0.275860	135	0.217220
16	0.057753	46	0.087664	76	0.065364	106	0.264370	136	0.226990
17	0.081176	47	0.091171	77	0.044605	107	0.292130	137	0.217170
18	0.143310	48	0.075644	78	0.076377	108	0.286270	138	0.220810
19	0.131440	49	0.060674	79	0.072778	109	0.290990	139	0.252170
20	0.133640	50	0.057793	80	0.098962	110	0.295570	140	0.257850
21	0.187800	51	0.067876	81	0.113290	111	0.277950	141	0.274830
22	0.180360	52	0.035315	82	0.126900	112	0.295160	142	0.257070
23	0.169520	53	0.019734	83	0.139450	113	0.332120	143	0.234940
24	0.213770	54	0.066510	84	0.190490	114	0.306430	144	0.216980
25	0.171340	55	0.084812	85	0.188140	115	0.302990	145	0.228490
26	0.173680	56	0.049004	86	0.241150	116	0.283180	146	0.240760
27	0.129950	57	0.021015	87	0.251070	117	0.302060	147	0.236180
28	0.143350	58	0.020114	88	0.243090	118	0.276500	148	0.250930
29	0.125740	59	0.072070	89	0.263090	119	0.266670	149	0.230040
30	0.108680	60	0.051255	90	0.273320	120	0.255580		

وبالتعويض في المعادلة (24) للتكهن عندما t=145 فان:

$$\hat{z}_{145}(1) = (-0.4447)\, z_{144} - (0.9915)\, \hat{a}_{144} + \hat{a}_{145} \qquad (33)$$

وهكذا لبقية القيم كما مبينة في الجدول(6) مع فترات التنبؤ العليا والدنيا الآتي :

الجدول (6): يوضح قيم التنبؤ مع فتراته

t	قيم السلسلة	قيم التنبؤ	فترات التنبؤ العليا	فترات التنبؤ الدنيا
1-	0.0059084	0.0058998	0.005763	0.0059134
2-	-0.0051680	-0.0051434	-0.0051707	-0.0051434
3-	0.0190622	0.0190509	0.0190372	0.0190645
4-	-0.0272376	-0.0272289	-0.0272425	-0.0272152
5-		-0.2159759	-0.2159895	-0.2158213
6-		0.0960447	0.0960310	0.0960583
7-		-0.0427111	-0.042724	-0.0426974
8-		0.0189936	0.0189799	0.0190072
9-		-0.0084465	-0.0084601	-0.0084328
10-		0.0037562	0.0037425	0.0037698

وان MSE = 0.0000000487 . وباستخدام فضاء الحالة لتمثيل النموذج ، وإيجاد البواقي بالتعويض في المعادلة (27) كالآتي :

$$\hat{a}_3 = z_3 - (-0.4447)(z_2 - a_2) - \psi_1 a_2 \qquad (34)$$

حيث أن $a_1 = 0, a_2 = 0$ والجدول (7)يوضح بقية القيم كالآتي:

الجدول (7): يوضح القيم التقديرية للبواقي

t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$
1	0.000000	31	0.105920	61	0.038809	91	0.269160	121	0.249190
2	0.000000	32	0.122690	62	-0.000231	92	0.256760	122	0.224680
3	-0.045911	33	0.080451	63	0.019624	93	0.256590	123	0.237250
4	-0.013002	34	0.060619	64	0.039843	94	0.267910	124	0.244850
5	-0.006746	35	0.087813	65	-0.004165	95	0.249270	125	0.228090
6	0.007068	36	0.028545	66	-0.013324	96	0.249200	126	0.232230
7	0.013124	37	0.045761	67	-0.002770	97	0.272460	127	0.240940
8	-0.007291	38	0.080778	68	0.023333	98	0.251120	128	0.256890
9	-0.012535	39	0.091584	69	0.000499	99	0.261440	129	0.223990
10	0.029393	40	0.084172	70	-0.014225	100	0.261810	130	0.222830
11	0.050931	41	0.098330	71	-0.019890	101	0.272720	131	0.218870
12	0.074523	42	0.105000	72	-0.002188	102	0.227110	132	0.223240
13	0.114660	43	0.164290	73	-0.001796	103	0.202580	133	0.214680
t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$
14	0.085451	44	0.171180	74	0.028247	104	0.237850	134	0.222190
15	0.049172	45	0.094214	75	0.051338	105	0.264570	135	0.208490
16	0.033634	46	0.068994	76	0.050913	106	0.253180	136	0.218330
17	0.057262	47	0.072660	77	0.030276	107	0.281040	137	0.208590
18	0.119600	48	0.057290	78	0.062170	108	0.275270	138	0.212300
19	0.107930	49	0.042476	79	0.058692	109	0.280080	139	0.243730
20	0.110330	50	0.039750	80	0.084995	110	0.284760	140	0.249480
21	0.164680	51	0.049987	81	0.099442	111	0.267230	141	0.266530
22	0.157450	52	0.017577	82	0.113170	112	0.284530	142	0.248840
23	0.146800	53	0.002147	83	0.125840	113	0.321580	143	0.226780
24	0.191250	54	0.049073	84	0.176990	114	0.295980	144	0.208890
25	0.149010	55	0.067523	85	0.174760	115	0.292630	145	0.220470
26	0.151540	56	0.031861	86	0.227880	116	0.272910	146	0.232810
27	0.107990	57	0.004019	87	0.237910	117	0.291880	147	0.228290
28	0.121580	58	0.003262	88	0.230040	118	0.266400	148	0.243120
29	0.104150	59	0.055361	89	0.252650	119	0.256650	149	0.222290
30	0.087283	60	0.034688	90	0.282860	120	0.245650		

وأخيرا يتم التنبؤ بنموذج فضاء الحالة عند $t=145$ كالآتي :

$$\hat{z}_{145}(1) = (-0.4447).(z_{145} - \hat{a}_{145}) + \psi_1 \hat{a}_{145} + \hat{a}_{146} \quad (35)$$

وهكذا لبقية القيم الموضحة في الجدول (8) مع فترات التنبؤ العليا والدنيا

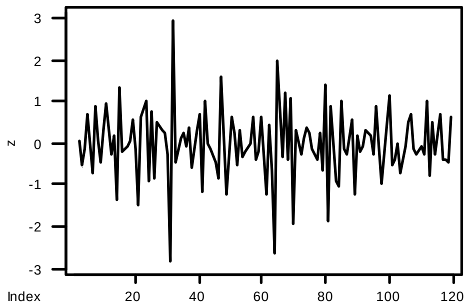
الجدول (8) : يوضح قيم التنبؤ مع فتراته

t	قيم السلسلة	قيم التنبؤ	فترات التنبؤ العليا	فترات التنبؤ الدنيا
1-	0.0059084	0.0059015	0.0059006	0.0059025
2-	-0.0051680	-0.00516	-0.005155	-0.0051664
3-	0.0190622	0.0190676	0.0190666	0.0190685
4-	-0.0272376	-0.0272428	-0.0272418	-0.0272437
5-		-0.2082857	-0.2082857	-0.2082866
6-		0.0926247	0.0926237	0.0926256
7-		-0.0411902	-0.0411892	-0.0411911
8-		0.0183173	0.0183163	0.0183182
9-		-0.0081457	-0.0081447	-0.0081466
10-		0.0036229	0.0072467	0.0036219

وبملاحظة قيم التنبؤ لنموذج ARIMA(1,1,1) وفضاء الحالة تتضح بانها متقاربة تقاربا كبيرا وعند استخدام التقريب لهذه القيم تكون متساوية وبايجاد MSE لتنبؤ فضاء الحالة والذي يساوي 0.0000000000256 وهو متقارب تقاربا كبيراً مع MSE لـ ARIMA(1,1,1) .

نستنتج من ذلك التوصل إلى هدف البحث في تكافؤ تنبؤ فضاء الحالة مع نموذج ARIMA لهذه البيانات.

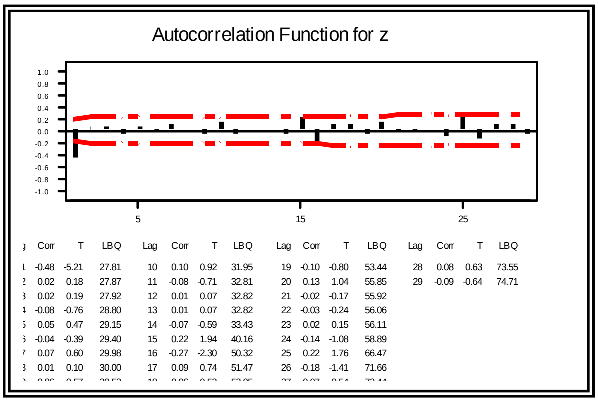
<u>النموذج الثالث</u> : الرسم الزمني للبيانات بعد ثبوت السلسلة واستقرارها كما في الشكل (9) .



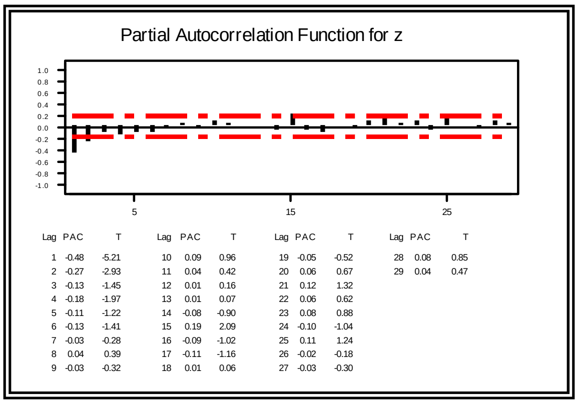
الشكل (9): الرسم الزمني للبيانات بعد ثبوت السلسلة واستقرارها

ومن رسم دالتي ACF، PACF الموضحتين في الشكلين (10) و (11) على التوالي تم تحديد النموذج الملائم ARIMA(2,1,1) ، بمعلمات :

$$\phi_1 = -0.5832\,,\ \phi_2 = -0.2461\,,\ \theta_1 = 0.9882$$

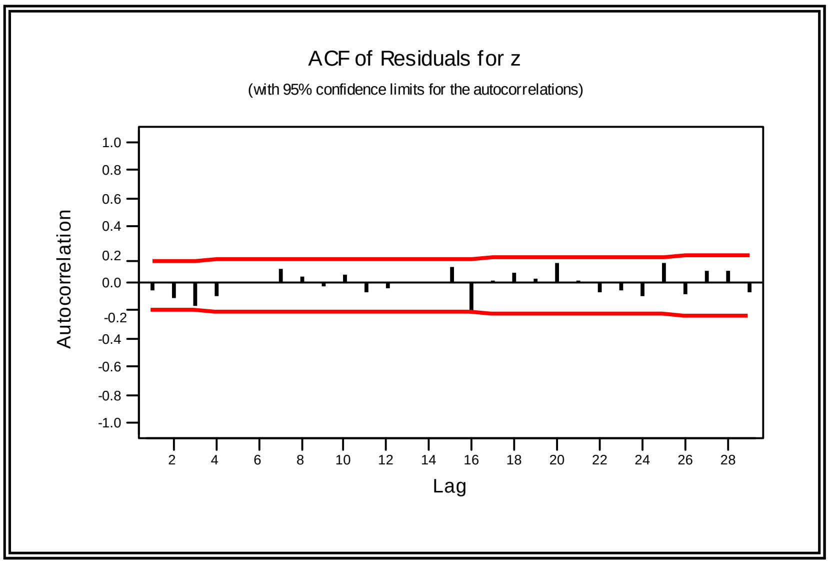


الشكل(10):رسم دالة الارتباط الذاتى



cf

الشكل (11): رسم دالة الارتباط الذاتى الجزئى



الشكل (12) : رسم دالة الارتباط الذاتي للبواقي

والصيغة لـ ARIMA(2,1,1) كالآتي :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} + \mathrm{a}_t \qquad (36)$$

ومن المعادلة (33) البواقي كالآتي:

$$\hat{a}_t = \mathrm{z}_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 \mathrm{z}_{t-2} + \theta_1 \mathrm{a}_{t-1} \qquad (37)$$

وبالتعويض نحصل على ماياتي:

$$\hat{a}_3 = \mathrm{z}_3 - (-0.5832)\,\mathrm{z}_2 - (-0.2461)\,\mathrm{z}_1 + 0.9882\,\mathrm{a}_2 \qquad (38)$$

حيث ان : $a_1 = 0\ ,\ a_2 = 0$

وهكذا لبقية قيم الأخطاء المبينة في الجدول (9) الآتي :

الجدول (9): يوضح القيم التقديرية للبواقي

t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$
1	0.00000	31	0.91119	61	1.19460	91	-4.36050
2	0.00000	32	1.46820	62	0.45930	92	-4.12610
3	-0.45309	33	2.03070	63	-2.51140	93	-3.75180
4	0.03155	34	2.19270	64	-2.19340	94	-3.80690
5	-0.29689	35	2.27330	65	-2.00690	95	-3.00520
6	0.36913	36	2.66260	66	-0.48801	96	-2.61030
7	0.78128	37	2.27970	67	-0.24714	97	-3.39600
8	0.56520	38	2.30690	68	0.92427	98	-3.48100
9	0.63846	39	3.01570	69	-0.46182	99	-2.26830
10	1.64030	40	2.29080	70	-1.02080	100	-2.00480
11	2.00750	41	2.76820	71	-1.60020	101	-2.43750
12	2.25240	42	3.03840	72	-1.53330	102	-2.78740
13	0.92779	43	3.09090	73	-1.15280	103	-3.60240
14	1.52090	44	2.51580	74	-0.63318	104	-4.09510
15	1.77730	45	1.34940	75	-0.51652	105	-3.80280
16	1.92250	46	2.33760	76	-0.93415	106	-2.80160
17	1.88100	47	3.19420	77	-0.91875	107	-2.40880
18	2.46070	48	2.43170	78	-1.48790	108	-2.56510
19	2.67250	49	2.36080	79	-0.35960	109	-2.81610
20	1.22320	50	2.67020	80	-1.56630	110	-3.17490
21	0.96626	51	2.40110	81	-1.39880	111	-2.28740
22	1.97720	52	2.45250	82	-2.21830	112	-2.48270
23	1.82090	53	2.14950	83	-3.54320	113	-2.12560
24	2.30240	54	1.84020	84	-3.28480	114	-2.23820
25	1.67510	55	1.63640	85	-3.05470	115	-1.50540
26	1.84500	56	2.18830	86	-3.10700	116	-1.51890
27	2.19120	57	2.13480	87	-2.68490	117	-1.97130
28	2.73410	58	1.86530	88	-3.58850	118	-2.74270
29	2.65630	59	2.25870	89	-3.92030	119	-2.45330
30	-0.32849	60	1.34230	90	-4.24980	120	

ثم التنبؤ من المعادلة الآتية عند $t=115$ فان:

$$\hat{z}_t(l) = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} - \theta_1 \hat{a}_{t-1} + \hat{a}_t \qquad (39)$$

وبالتعويض

$$\hat{z}_{115}(1) = (-0.5832)z_{115} + (-0.2461)\,z_{114} - 0.9882\,\hat{a}_{115} + \hat{a}_{116} \qquad (40)$$

وهكذا لبقية قيم التنبؤ والمبينة في الجدول (10) الآتي: مع فترات التنبؤ العليا والدنيا:

الجدول (10): يوضح قيم التنبؤ مع فتراته

t	قيم السلسلة	قيم التنبؤ	فترات التنبؤ العليا	فترات التنبؤ الدنيا
1-	-0.39302	-0.38503	-0.39261	-0.37745
2-	-0.41985	-0.4327	-0.44028	-0.42512
3-	-0.45306	-0.4475	-0.45508	-0.43992
4-	0.62458	0.6245	0.61692	0.63208
5-		2.1703	2.16276	2.17788
6-		-1.4194	-1.42698	-1.41182
7-		0.2925	0.28492	0.30008
8-		0.1787	0.17112	0.18628
9-		0.1762	0.16862	0.18378
10-		-0.0379	-0.04548	-0.03032

وإيجاد مقياس معدل مربع الخطأ للتنبؤ هو: (MSE=0. 000057435225)

وباستخدام فضاء الحالة لتمثيل النموذج ARIMA(2,1,1) كالآتي:

$$z_{t+2} = \phi_2 z_t + \phi_1(z_{t+1} - a_{t+1}) + \psi_1 a_{t+1} + a_{t+2} \qquad (41)$$

وإيجاد قيم البواقي من المعادلة (36) كالآتي :

$$\hat{a}_{t+2} = z_{t+2} - \phi_2 z_t - \phi_1\,(z_{t+1} - a_{t+1}) - \psi_1 a_{t+1} \qquad (42)$$

حيث ان: $a_1 = 0\,, a_2 = 0$

$$\hat{a}_3 = z_3 - (-0.5832)\,z_3 - (-0.2461)\,(-0.2461)\,(z_2 - a_2) - (-1.5714)\,a_2 \qquad (43)$$

والجدول (11) الآتي يوضح بقية القيم للبواقي:

الجدول (11): يوضح القيم التقديرية للبواقي

t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$
1	0.00000	31	0.22412	61	2.17870	91	-3.08570
2	0.00000	32	1.48030	62	1.45490	92	-2.84330
3	-0.43003	33	2.05370	63	-1.50450	93	-2.46110
4	0.07740	34	2.63230	64	-1.17530	94	-2.50830
5	-0.22852	35	2.81030	65	-0.97775	95	-1.69890
6	0.45976	36	2.90670	66	0.55203	96	-1.29640
7	0.89389	37	3.31160	67	0.80368	97	-2.07460
8	0.69955	38	2.94410	68	1.98580	98	-2.15210
9	0.79427	39	2.98650	69	0.61020	99	-0.93192
10	1.81730	40	3.71030	70	0.06168	100	-0.66120
11	2.20550	41	3.00030	71	-0.50744	101	-1.08670
t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$	t	$\hat{a}_t$
12	2.47120	42	3.49240	72	-0.43038	102	-1.42950
13	1.16700	43	3.77710	73	-0.03991	103	-2.23740
14	1.78040	44	3.84390	74	0.48967	104	-2.72320
15	2.05680	45	2.13060	75	0.61614	105	-2.42400
16	2.22170	46	3.13270	76	0.20821	106	-1.41600
17	2.19970	47	4.00300	77	0.23319	107	-1.01640
18	2.79880	48	3.25400	78	-0.32644	108	-1.16610
19	3.02960	49	3.19640	79	0.81116	109	-1.41060
20	1.59920	50	3.51900	80	-0.38625	110	-1.76290
21	1.36080	51	3.26300	81	-0.20962	111	-0.86905
22	2.39020	52	3.32730	82	-1.02020	112	-1.05800
23	2.25210	53	3.03700	83	-2.33610	113	-0.69462
24	2.75150	54	2.74030	84	-2.06890	114	-0.80107
25	2.14210	55	2.54900	85	-1.83010	115	-0.06218
26	2.32940	56	3.11310	86	-1.87380	116	-0.06969
27	2.69300	57	3.07170	87	-1.44320	117	-0.51608
28	3.25310	58	2.81430	88	-2.33840	118	-1.28160
29	3.19210	59	3.21950	89	-2.66180	119	-0.98636
30	0.22412	60	2.31480	90	-2.98310	120	

ثم التنبؤ لفضاء الحالة عند t=115 من المعادلة التالية كالآتي:

$$\hat{z}_{39}(1) = (-0.2461) - 0.5832\,(z_{39} - \hat{a}_{39}) + (-1.5714) + \hat{a}_{40} \qquad (44)$$

والجدول (12) الآتي يبين بقية قيم التنبؤ مع فترات التنبؤ العليا والدنيا.

الجدول (12): يوضح قيم التنبؤ مع فتراته

t	قيم السلسلة	قيم التنبؤ	فترات التنبؤ العليا	فترات التنبؤ الدنيا
1.	-0.39302	-0.39303	-0.39309	-0.39296
2.	-0.41985	-0.4199	-0.41997	-0.41983
3.	-0.45306	-0.4531	-0.45317	-0.45303
4.	0.62458	0.6246	0.62453	0.62467
5.		2.1718	2.17173	2.17187
6.		-1.4203	-1.42037	-1.42023
7.		0.2938	0.29373	0.29387
8.		0.1782	0.17813	0.17827
9.		-0.1762	-0.17627	-0.17613
10.		-0.0589	-0.05897	-0.05883

وبملاحظة نتائج التنبؤ لكلا الحالتين بالنسبة الى نموذج ARIMA(2,1,1) وفضاء الحالة اتضح أنها متقاربة تقاربا كبيراً وبإيجاد MSE لفضاء الحالة والذي يساوي (0.000000001225) ، فهذه النتائج تعطي مدى تكافؤ تنبؤ فضاء الحالة مع تنبؤ نموذج ARIMA(2,1,1) لهذه البيانات .

وبهذا تم التوصل وتحقيق هدف البحث في تكافؤ تنبؤ فضاء الحالة بعد تمثيله بنماذج ARIMA مع تنبؤ نماذج ARIMA .

الاستنتاجات

1) يمكن تمثيل نماذج ARIMA من خلال نماذج فضاء الحالة .
2) تقارب قيم التنبؤ تقاربا كبيرا بين فضاء الحالة ونماذج ARIMA ،ان مقياس MSE بالنسبة الى نموذج فضاء الحالة يكون مساويا او قريبا منه بشكل كبير لمقياس MSE لنموذج ARIMA .

المصادر

1) البدراني ، ظافر رمضان مطر ، (2002) ، " دراسة في تشخيص نظم السيطرة التصادفية مع اشارة خاصة الى اسلوب فضاء الحالة والاستقرارية " ، اطروحة دكتوراه غير منشورة ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات ، جامعةالموصل.
2) Zivot, E.(2006) . " State Space Models and The Kalman Filter", http://faculty.washington.edu/ezivot/econ584/notes/statespacemodels.
3) Harvey , A.; Koopman , S.J. and Shephard , N. (2004)." State Space and Unobserved Component Models " , Cambridge University press ; www, Cambridge. org .
4) Jong , p. and Penzer , J. (2000) . " The ARIMA Model in State Space Form" , http://stats.lse.ac.uk/panzer/papers/arimassf. , London.
5) Makridakis , S. ; WheelWright, S.C. and Robj , H.(1998) ."Forecasting Methods and Application" ,3rd ed., Johan-Wiley and Sons , New York , USA.
6) Pankratz ,A.(1983) ." Forecasting with Dynamic Regression Model ", Johan- Wiley and Sons , New York , USA.
7) Pankratz ,A.(1991) ." Forecasting with Dynamic Regression Model ", Johan- Wiley and Sons , New York , USA.
8) Reinert , G.(2002) ." Time Series ", Hilary Term, USA.
9) Wei,W.W.S. (1990) ." Time Series Analysis-Univariate and Multivariate Methods" , Addison-Wesley Publishing Company , Inc., The Advanced Book Program , California, USA