المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (8) 2005
ص ص [80-95]

# تطبيق نموذج متسلسلة ماركوف على الهجرة السكانية بين محافظات (نينوى،صلاح الدين،التأميم) للفترة 1977-1997

عبد الغفور جاسم سالم* أحمد خلف غنام** أزهر عباس محمد***

**الملخص**

تمت في هذا البحث دراسة الهجرة السكانية بين محافظات العراق الثلاثة(نينوى،صلاح الدين،التأميم) واعتبارها كمتسلسلة ماركوف لحالاتها الثلاثة التي تمثل الانتقال بين تلك المحافظات وبذلك حصلنا على مصفوفة انتقال سعة (3x3) لتمثيل تلك الحالات والتي وجدنا فيها أن المتسلسلة ثابتة (Ergodic )وتم إيجاد المعدل والتباين لكل من زمن الانتظار والزمن بين كل انتقالين متعاقبين وزمن المكوث أو البقاء لكل حالة من الحالات الثلاث .

# Application of a Markov chain Model on the popular transformation between the cities of (Nineva, Saladean, Tameem) for the period 1977-1997

## ABSTRACT

In this paper we study the migration of population among the three Iraqi cities: Nineva , Saladean, Tameem by considering these this migrations as a Markov chain with three states which represent the transitions among these cities .We obtain a transition matrix (3x3) to represent these states and we obtain that this chain is Ergodic and we find the mean and the variance of the waiting time ,the time between consecutive transition and the duration of an excursion at each state.

* أستاذ مساعد/كلية التربية للبنات/جامعة تكريت

** أستاذ مساعد/كلية الإدارة والاقتصاد/جامعة تكريت

*** مدرس/كلية التربية للبنات/جامعة تكريت

تاريخ التسلم : 24/10/2004 ـــــــــــــ تاريخ القبول : 8/2/2005

**المقدمة:**

إن دراسة الهجرة السكانية و النمو السكاني تؤدي دوراً كبيراً ومهماً في إنجاح برامج وخطط التنمية لما له من أثر في دراسة خصائص السكان ، وبناء نموذج رياضي لهذه الظاهرة(السلسلة) له أهمية اكبر في إيجاد التنبؤات السكانية باستخدام أساليب مختلفة كبناء جداول حياة Life tables من قبل الجهاز المركزي للإحصاء لاحظ [1].و بافتراض ثبات معدل الوفيات والولادات ومعدل النمو الطبيعي واحتساب التنبؤات لعدد السكان على وفق تلك الفروض .تتركز دراستنا في هذا البحث على صياغة المسالة وفق نموذج ماركوف على افتراضات ثابتة وهي:

أولا: هنالك حرية في الانتقال بين المحافظات الثلاثة نينوى وصلاح الدين والتأميم

ثانيا: اعتبار الولادات والوفيات مقداراً ثابتاً

وتم احتساب الزيادة في عدد السكان وفق هذه الافتراضات

$$K^{t+1} = (\alpha I + P)K^t \quad \ldots\ldots(1)$$

حيث ان

$K^t$ : عدد السكان الحالي

$\alpha$ : عدد الولادات مطروح منه عدد الوفيات

I : مصفوفة واحدية

P : مصفوفة الانتقال بين المحافظات الثلاثة

وبذلك حصلنا على مصفوفة انتقال من السعة (3x3) لتمثيل الحالات الثلاثة ، وقد بينا أن هذه السلسلة هيErgodic ووجدنا زمن الانتظار Waiting time لكل حالة والانتقال أو العبور ( Up crossing and down crossing) من حالة إلى أخرى وفترة البقاء (المكوث) في كل منطقة(حالة) Duration of excursion in each state وتم إيجاد المعدل والتباين لجميع تلك المتغيرات .

## الجانب النظري :

### ا- تعاريف أساسية

1- سلسلة ماركوف(Markov Chain): [5]

هي حالة خاصة من العمليات التصادفية Stochastic Processes والتي تتمثل بعملية ماركوف ذات العدد المحدود من الحالات ويقال أن العملية التصادفية $\{X_t;t=0,1,2,\ldots\}$ في حالة الزمن المتقطع تحقق خاصية ماركوف لجميع الحالات $i_1,i_2,\ldots\ldots,i_n$ ولجميع القيم إذا كان

$$P(X_n=i_n|X_1=i_1, X_2=i_2, \ldots, X_{n-1}=i_{n-1})=P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}) \quad (2)$$

اذ ان P هي الاحتمالية وان $X_n=i_n$ تمثل الحادثة $X_n$ في الحالة $i_n$ معطى $X_1$ في الحالة $i_1$ وهكذا. وبنفس الطريقة تعرف خاصية ماركوف في حالة الزمن المستمر وسيتركز اهتمامنا على السلسلة في حالة الزمن المتقطع (Discrete time)

2- الاستقرارية : (Stationary): [5]

تكون متسلسلة ماركوف في حالة الزمن المتقطع ثابتة ومستقرة إذا كان احتمال الانتقال من حالة إلى أخرى مستقلاً عن الزمن في الخطوة التي حدثت ولكل الحالات، أي أن

$$P(X_n=j \mid X_{n-1}=i) = P(X_{n+k}=j \mid X_{n+k-1}=i) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$k=-(n-1),-(n-2),\ldots\ldots,-1,0,1,2,\ldots\ldots$$

3- التوزيع المستقر :(Stationary distribution):

إذا كانت متسلسلة ماركوف غير قابلة للتجزئة وغير دورية وفيها فقط الحالات المرتدة Recurrent - states وكانت غاية التوزيع هي:

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}>0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

عندئذ $\pi_j \;; j= 0,1,2,\ldots\ldots$ هو توزيع مستقر ووحيد اذ ان

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i \, P_{ij} \quad ; \; j= 0,1,2,\ldots\ldots \qquad (5)$$

وأن $\pi_j>0$ لكل قيم j التي تحقق $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j = 1$ لاحظ[ 7] و $P_{ij}$ هو احتمالية انتقال العملية من الحالة $i$ إلى الحالة $j$

4-<u>مصفوفة احتمال الانتقال (The Transitions probability Matrix)</u>:

وهي مصفوفة كل عنصر فيها عبارة عن احتمال انتقال مشروط وتكتب المصفوفة على شكل $P=( P_{ij} )$ و $P_{ij}$ هو عنصر يمثل احتمالية انتقال العملية إلى الحالة $j$ علما أنها في الحالة $i$ وتحتوي على كل المعلومات المناسبة والتي تخص حركة العملية بين الحالات التي تمثل السلسلة لاحظ [ 7] حيث تكون مصفوفة مربعة بعناصر موجبة تمثل احتمالات الانتقال ودرجة المصفوفة تعتمد على عدد الحالات وان مجموع الاحتمالات لكل صف يساوي واحد ، وتسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة غير قابلة للتجزئة إذا لم يكن بالإمكان إيجاد مصفوفة جزئية منها وتعرف المجموعة المغلقة C بأنها مجموعة جزئية من فضاء العينةS إذا كان احتمال الانتقال من الحالة $i$ إلى الحالة$k$ يساوي صفرا( $P_{ik}= 0$ ) لكل $P_{ij} \in C$ و $k \notin C$ لاحظ [6] .

5-<u>السلسلة الدورية (Periodic Chain)</u> :

لتكن $P_{ij}$ مصفوفة الانتقال لمتسلسلة ماركوف وان $i$ و $j$ حالات هذه السلسلة . تكون الحالة $j$ دورية إذا كان بالإمكان العودة إلى الحالة $j$ وبفترات زمنية t,2t,3t,..... وهذا يعني إن $P_{ij}^{(n)} >0$ وان n عدد صحيح غير قابل للقسمة على t . وإذا كانت t=1 فتكون السلسلة غير دورية لاحظ [ 3 ] .

6- المصفوفة البدائية (Primitive matrix) : [7]

تسمى المصفوفة $P_{ij}$ بالمصفوفة البدائية إذا احتوت على قيمة ذاتية ( Eigen value) $\lambda=1$

وان $\lambda_1 > |\lambda_i|$ لجميع قيم $i= ,2,3,\ldots.$ . ولإيجاد القيم الذاتية نستخدم حل النظام الآتي $|P - \lambda I| = 0$ اذ ان P مصفوفة الانتقال و I مصفوفة واحدية و $\lambda$ هي القيم الذاتية .

7- الحالة المرتدة (Recurrent State) : [5]

تكون الحالة $i$ ( State $i$) مرتدة إذا كان الانتقال من الحالة $i$ والعودة إلى نفس الحالة $i$ باحتمال مقداره واحد وتكون غير مرتدة إذا كان $P_{ii}<1$ لاحظ [5]

8-السلسلة الثابتة (Ergodic chain): [5]

هي العملية التي يكون الانتقال بها ممكنا من حالة واحدة إلى أخرى ولا يكون ضروريا لهذا الانتقال أن يكون في خطوة واحدة . أي أن

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

حيث ان n تمثل الخطوة وان $P_{ij}$ مصفوفة انتقال وتكون الغاية موجودة لكل قيم $j$ المستقلة عن $i$ وان

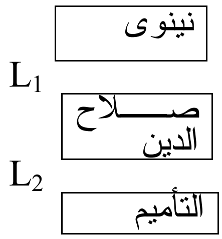
$$\sum_{j=U}^{\infty} \pi_i = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

**نظرية :**

إذا كانت متسلسلة ماركوف بدائية (Primitive ) وغير قابلة للتجزئة فان المتسلسلة تكون ثابتة Ergodic لاحظ [ 3 ] .

ب – تحليل السلسلة :

لتكن $\{X_t\}$ تمثل السلسلة الزمنية لعدد السكان . ولتكن $L_1$ تمثل الحد الفاصل بين محافظة نينوى وصلاح الدين و $L_2$ الحد الفاصل بين صلاح الدين و التأميم . وبذلك تكون لدينا ثلاث مناطق في العراق ممثلة بالشكل الآتي




اذ تمثل كل منطقة حالة ( State) أي اصبح لدينا ثلاث حالات تمثل المتسلسلة التي تقابل الحوادث :

$$E_1 = \{ X_t : X_t > L_1 \}$$

$$E_2 = \{ X_t : L_2 < X_t < L_1 \}$$

$$E_3 = \{ X_t : X_t < L_2 \}$$

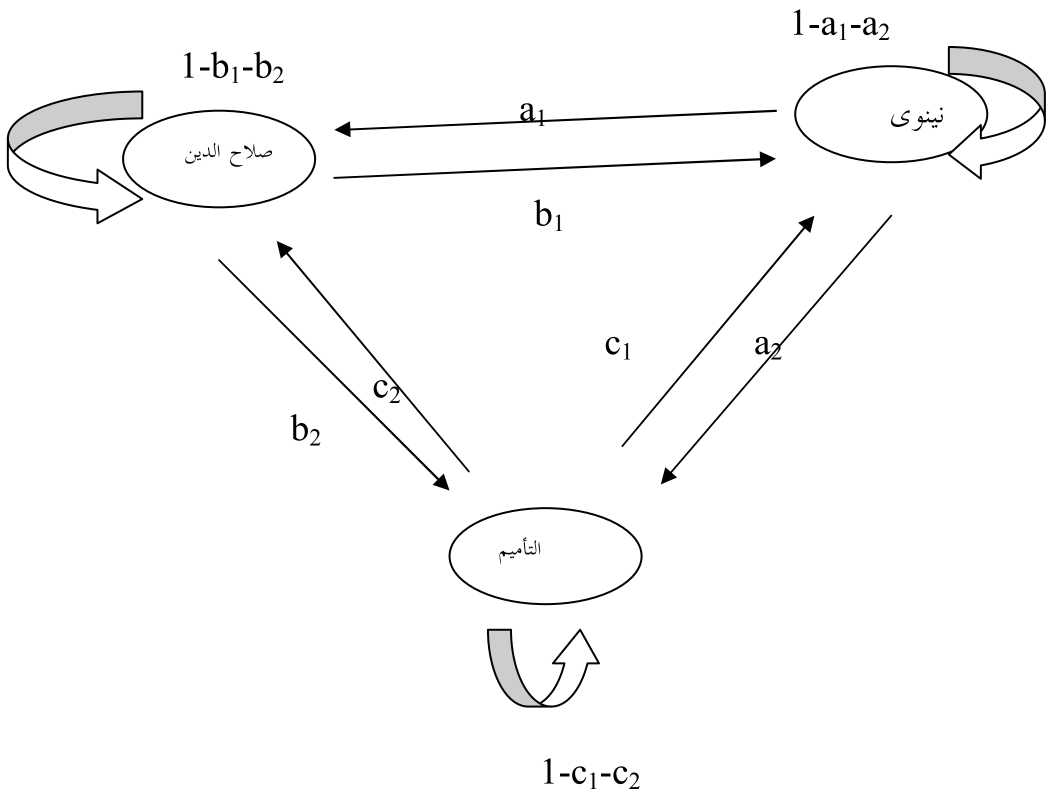
أي أن $S_t$ التي تمثل الحالات تكون بالشكل الاتي :

$$St = \begin{cases} 1 & : X_t \in E_1 \\ 2 & : X_t \in E_2 \\ 3 & : X_t \in E_3 \end{cases}$$

لذلك تكون مصفوفة الانتقال معرفة بالشكل الآتي :

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-a_1-a_2 & a_1 & a_2 \\ b_1 & 1-b_1-b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & 1-c_1-c_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

التي تمثل الحركة السكانية بين المناطق الثلاثة ، حيث نلاحظ تحقق شـــروط (صفات ) ماركوف على المصفوفة التي تمثل الحركة السكانية للانتقال بين المناطق المختلفة التي يمكن تمثيلها بالمخطط الآتي :




ومن المصفوفة P نجد أن مصفوفة الانتقال مغلقة ( أي لا توجد مجموعـــات جزئيـــة مغلقة سوى المجموعة {1,2,3}) أي أن P غير قابلة للتجزئة وغير دورية من الشكل اذ ان $P_{ii}^{(n)} = t,2t,3t,\ldots\ldots,nt$ وان $t=1$ و n تمثل الخطوة .

ولاختبار فيما إذا كانت السلسلة ثابتة Ergodic ( تكـــون مصـــفوفة الانتقـــال ثابتـــة Ergodic إذا كانت بدائية Primitive وغير قابلة للتجزئة Irreducible لاحظ [3]).

سنبين أن المتسلسلة بدائية و باستخدام التعريف علينا إيجاد القيم الذاتية $\lambda_i$ , $i$=1,2,3 واثبات أن إحدى هذه القيم تساوي واحداً وبقية القيم الذاتية تحقق $|\lambda_i| < \lambda_1$ $i$=2,3 لإيجاد القيم الذاتية نتبع حل النظام $|P - \lambda I| = 0$ ( لاحظ3) وبحل النظام المذكور سابقانجد أن

$$\lambda^3+A_1 \lambda^2+A_2 \lambda+A_3=0 \qquad \text{……..(8)}$$

اذ ان

$$A_1=(a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2)-3$$
$$A_2=3-2(a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2) +(c_1a_1+c_1b_1+c_1b_2+c_2a_1+c_2a_2+c_2b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2)$$
$$A_3=(a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2)- (1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2+c_1b_1+c_1b_2+c_1a_1+c_2b_1+c_2a_1+c_2a_2)$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن :

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 0.5[-B_1+(B_1^2-4B_2)^{1/2}] \qquad \text{……. (9)}$$
$$\lambda_3 = 0.5[-B_1+(B_1^2-4B_2)^{1/2}]$$

اذ ان

$$B_1 = 1+A_1$$
$$B_2 = 1+A_1+A_2$$

ومن هذه القيم $\lambda_i$ , $i$=1,2,3 نجــد أن $|\lambda_i| < \lambda_1$ , $i$ =2,3 أي أن P هي مصفوفة بدائية (Primitive) وعليه أصبحت لدينا P غيــر قابلــة للتجزئــة وبدائية لذلك تكون P ثابتة . (Ergodic).

<u>التوزيع المستقر ( $\pi$ )</u> :

بما أن P هي Ergodic فانه يوجد توزيع مستقر ووحيد لاحظ [ 3 ] ولإيجاد هذا التوزيع نتبع حل النظام الآتي:

$$\pi P= \pi \qquad \text{………. (10)}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$$

حيث

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \Pr(X_t = i)$$

وبحل النظام ( 10 ) نحصل على

$$\pi_1 = \frac{d_1}{d_1 + d_2 + 1} \quad \ldots\ldots\ldots(11a)$$

$$\pi_2 = \frac{d_2}{d_1 + d_2 + 1} \quad \ldots\ldots\ldots(11b)$$

$$\pi_3 = \frac{1}{d_1 + d_2 + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(11c)$$

حيث

$$d_1 = \frac{b_1c_2 + b_1c_1 + b_2c_1}{a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2}$$

$$d_2 = \frac{a_1c_1 + a_1c_2 + a_2c_2}{b_1a_2 + b_2a_1 + b_2a_2}$$

فترة البقاء في كل حالة : The duration of an excursion( D)

إن التوزيع الاحتمالي لفترة مكوث السلسلة في كل حالة (منطقة) تعرف بالشكل الاتي :

$$\Pr(D_i = k) = \Pr(J_j = i,\ 1 \le j \le k,\ J_{k+1} \ne i \mid J_0 \ne i, J_1 = i) \quad \ldots.(12)$$

وبتطبيق هذا التعريف لكل من الحالات ( المناطق ) المذكور انفاً حصلنا على ما ياتي :

الحالة الأولى(نينوى) :

$$\Pr(D_1 = k) = (a_1 + a_2)(1 - a_1 - a_2)^{k-1} \quad k = 1,2,\ldots\ldots; a_1, a_2 < 1;\ a_1 + a_2 < 1 \quad \ldots.(13a)$$

الحالة الثانية (صلاح الدين):

$$\Pr(D_2 = k) = (b_1 + b_2)(1 - b_1 - b_2)^{k-1} \quad k = 1,2,\ldots;\ b_1, b_2 < 1;\ b_1 + b_2 < 1 \quad \ldots.(13b)$$

الحالة الثالثة(التأميم) :

$$Pr(D_3=k)=(c_1+c_2)(1-c_1-c_2)^{k-1}\ k=1,2,\ldots;c_1,c_2<1;c_1+c_2<1 \quad \ldots(13c)$$

وأن المعدل والتباين لفترة البقاء هو كالآتي :

$$E(D_1)=\frac{1}{a_1+a_2} \qquad V(D_1)=\frac{1-a_1-a_2}{(a_1+a_2)^2} \quad (14a)$$

$$E(D_2)=\frac{1}{b_1+b_2} \qquad V(D_2)=\frac{1-b_1-b_2}{(b_1+b_2)^2} \quad (14b)$$

$$E(D_3)=\frac{}{c_1+c_2} \qquad V(D_3)=\frac{1-c_1-c_2}{(c_1+c_2)^2} \quad (14c)$$

<u>الزمن بين انتقالين متعاقبين</u> : ( Time between two consecutive crossing )

رمزنا للفترة الزمنية لحدوث الحادثة (الهجرة) وتكرارها بالرمز $T_i$ اذ ان $i = 1,2,3$ لتمثل المناطق الثلاثة وأن التوزيع الاحتمالي لزمن العبور يعرف بما ياتي عندما ($i$=1) لاحظ [ 2 ]

$$Pr(T_1=k)=\sum_{j=2}^{k}Pr(X_i< L_1 \text{ for } i<j;L_1\leq X_t \text{ for } j\leq t\leq k;X_{k+1}< L_1|X_0\geq L_1, X_1<L_1) \quad \ldots(15)$$

$$Pr(T_1=k)=\frac{(a_1+a_2)(b_1\pi_2+c_1\pi_3)}{(1-\pi_1)(a_1+a_2)-(b_1\pi_2+c_1\pi_3)}\left[\left\{\frac{(1-b_1)\pi_2+(1-c_1)\pi_3}{1-\pi_1}\right\}^{k-1}-(1-(a_1+a_2))^{k-1}\right]$$

$$k=2,3,\ldots \quad \ldots (16a)$$

وكذلك عندما $i$=2

$$Pr(T_2=k)=\frac{(b_1+b_2)(a_1\pi_1+c_2\pi_3)}{(1-\pi_2)(b_1+b_2)-(a_1\pi_1+c_2\pi_3)}\left[\left\{\frac{(1-a_1)\pi_1+(1-c_2)\pi_3}{1-\pi_2}\right\}^{k-1}-(1-(b_1+b_2))^{k-1}\right]$$

k=2,3,… ……………. (16b)

وعندما $i=3$

$$\Pr(T_3=k)=\frac{(c_1+c_2)(a_2\pi_2+b_2\pi_3)}{(1-\pi_3)(c_1+c_2)-(a_2\pi_1+b_2\pi_3)}\left[\left\{\frac{(1-a_2)\pi_1+(1-b_2)\pi_3}{1-\pi_3}\right\}^{k-1}-(1-(c_1+c_2))^{k-1}\right]$$

k=2,3,… ……………. (16c)

وقد وجدنا القيمة المتوقعة والتباين لكل حالة

$$E(T_1)=\frac{(1-\pi_1)(a_1+a_2)+(b_1\pi_2+c_1\pi_3)}{(a_1+a_2)(b_1\pi_2+c_1\pi_3)} \qquad \text{……….(17a)}$$

$$E(T_2)=\frac{(1-\pi_2)(b_1+b_2)+(a_1\pi_1+c_2\pi_3)}{(b_1+b_2)(a_1\pi_1+c_2\pi_3)} \qquad \text{………(17b)}$$

$$E(T_3)=\frac{(1-\pi_3)(c_1+c_2)+(a_2\pi_1+b_2\pi_2)}{(c_1+c_2)(a_2\pi_1+b_2\pi_2)} \qquad \text{………. (17c)}$$

$$V(T_1)=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, V(T_1)=\frac{\beta_1}{\beta_2}, V(T_1)=\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \qquad \text{… (17d)}$$

حيث ان

$$\alpha_1=(1-\pi_1)^3(a_1+a_2)^3-(1-\pi_1)^2(a_1+a_2)^2(b_1\pi_2+c_1\pi_3)(a_1+a_2+1)-(b_1\pi_2+c_1\pi_3)^3+(a_1+a_2)(b_1\pi_2+c_1\pi_3)^3+(1-\pi_1)(a_1+a_2)(b_1\pi_2+c_1\pi_3)^2$$

$$\alpha_2=[(1-\pi_1)(a_1+a_2)-(b_1\pi_2+c_1\pi_3)][(a_1+a_2)^2(b_1\pi_2+c_1\pi_3)^2]$$

$$\beta_1=(1-\pi_2)^3(b_1+b_2)^3-(1-\pi_2)^2(b_1+b_2)^2(a_1\pi_1+c_2\pi_3)(b_1+b_2+1)-(a_1\pi_1+c_2\pi_3)^3+(b_1+b_2)(a_1\pi_1+c_2\pi_3)^3+(1-\pi_2)(b_1+b_2)(a_1\pi_1+c_2\pi_3)^2$$

$$\beta_2 = [(1-\pi_2)(b_1+b_2) - (a_1\pi_1 + c_2\pi_3)]\,[(b_1+b_2)^2(a_1\pi_1 + c_2\pi_3)^2]$$

$$\gamma_1 = (1-\pi_3)^3(c_1+c_2)^3 - (1-\pi_3)^2(c_1+c_2)^2(a_2\pi_2 + b_2\pi_3)(c_1+c_2+1) - (a_2\pi_2 + b_2\pi_3)^3 + (c_1+c_2)(a_2\pi_2 + b_2\pi_3)^3 + (1-\pi_3)(c_1+c_2)(a_2\pi_2 + b_2\pi_3)^2$$

$$\gamma_2 = [(1-\pi_3)(c_1+c_2) - (a_2\pi_2 + b_2\pi_3)]\,[(c_1+c_2)^2(a_2\pi_2 + b_2\pi_3)^2]$$

زمن الانتظار : Waiting Time

رمزنا لزمن الانتظار بالرمز $W_i$ حيث $i$=1,2,3 وان التوزيع الاحتمالي لفترة الانتظار (لحين حدوث الهجرة) يعرف بما ياتي لاحظ [ 2 ]

$$\Pr(W_i = k) = \Pr(J_2 \neq i, \ldots\ldots\ldots, J_k \neq i,\ J_{k+1} = i \mid J_0 = i, J_1 \neq i) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

وباستخدام التعريف لكل من الحالات الثلاثة حصلنا على ما يلي :

$$\Pr(W_1 = k) = \frac{(b_1\pi_2 + c_1\pi_3)}{(1-\pi_1)} \left\{ \frac{(1-b_1)\pi_2 + (1-c_1)\pi_3}{(1-\pi_1)} \right\}^{k-1} \quad \ldots\ldots \quad (19a)$$

$$\Pr(W_2 = k) = \frac{(a_1\pi_1 + c_2\pi_3)}{(1-\pi_2)} \left\{ \frac{(1-a_1)\pi_1 + (1-c_2)\pi_3}{(1-\pi_2)} \right\}^{k-1} \quad (19b)$$

$$\Pr(W_3 = k) = \frac{(a_2\pi_1 + b_2\pi_2)}{(1-\pi_3)} \left\{ \frac{(1-a_2)\pi_1 + (1-b_2)\pi_2}{(1-\pi_3)} \right\}^{k-1} \quad (19c)$$

حيث $k = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$

وان القيمة المتوقعة والتباين لزمن الانتظار لكل حالة :

$$E(W_1) = \frac{\pi_2 + \pi_3}{b_1\pi_2 + c_1\pi_3},\quad V(W_1) = \frac{(\pi_2+\pi_3)^2 - (b_1\pi_2 + c_1\pi_3)(\pi_2+\pi_3)}{(b_1\pi_2 + c_1\pi_3)^2} \quad (20a)$$

$$\pi_1 + \pi_3 \qquad\qquad (\pi_1+\pi_3)^2 - (a_1\pi_1 + c_2\pi_3)(\pi_1+\pi_3)$$

$$E(W_2)=\frac{}{a_1\,\pi_1+c_2\,\pi_3},V(W_2)=\frac{}{(a_1\,\pi_1+c_2\,\pi_3)^2} \quad (20b)$$

$$E(W_3)=\frac{\pi_1+\pi_2}{a_2\,\pi_1+b_2\,\pi_2},\ V(W_3)=\frac{(\pi_1+\pi_2)^2-(a_2\,\pi_1+b_2\,\pi_2)(\pi_1+\pi_2)}{(a_2\,\pi_1+b_2\,\pi_2)^2} \quad (20c)$$

## ج – الجانب التطبيقي :

لقد حصلنا على البيانات التي تبين أعداد السكان للمحافظات الثلاثة ( نينوى ، صلاح الدين ، التأميم ) من الجهاز المركزي للإحصاء فرع صلاح الدين والخاصة بتعدادي 1977 و 1997 واستخدام الفرضيتين الآتيتين :

1- اعتماد القيمة المقدرة هي القيمة الأساسية (كمعدل) وان الزيادة أو النقصان تشير إلى ( الهجرة ) من والى كل محافظة .

2- حرية الانتقال دون ذكر أسباب الانتقال .

وباستخدام هاتين الفرضيتين وتخمين قيم $a_i,b_i,c_i$ حصلنا على مصفوفة الانتقال الآتية :

$$P=\begin{bmatrix} 0.958 & 0.036 & 0.006 \\ 0.00258 & 0.9923 & 0.00512 \\ 0.01206 & 0.01439 & 0.97355 \end{bmatrix}$$

وأن التوزيع المستقر لمصفوفة الانتقال هو :

$\pi_1 = 0.0928719$

$\pi_2 = 0.742403$

$\pi_3 = 0.1647243$

وأن دالة كتلة الاحتمال لفترة البقاء لكل حالة تم إيجادها باستخدام العلاقة الاتية: (13a,13b,13c)

$Pr\,(D_1=k) = (0.042)\ (0.958)^{k-1} \quad ; k=1,2,\ldots\ldots\ldots$

$Pr\,(D_2=k) = (0.0077)\,(0.9923)^{k-1} \quad ; k=1,2,\ldots\ldots$

$Pr\,(D_3=k) = (0.02645)\,(0.97355)^{k-1} \quad ;k=1,2,\ldots..$

اذ نلاحظ أن فترة البقاء للحالة الأولى (نينوى) اكبر من فترة البقاء في الحالتين الأخريين (صلاح الدين والتأميم ) وباستخدام العلاقة ( 14a,14b,14c ) تم إيجاد الوسط الحسابي والتباين لفترة البقاء لكل حالة:

$E(D_1) = 23.80958$ $V(D_1) = 543.0839$
$E(D_2) = 129.8701$ $V(D_2) = 16736.38$
$E(D_3) = 37.80718$ $V(D_3) = 1391.576$

وأن دالة كتلة الاحتمال للزمن بين انتقالين ( هجرتين ) متعاقبتين باستخدام العلاقة (16a,16b,16c) هو :

$Pr(T_1=k) = (0.0047898)\,[(0.9956976)^{k-1} - (0.958)^{k-1}]\ ;\ k=2,3,\ldots$
$Pr(T_2=k) = (-0.117688)\,[(0.9778118)^{k-1} - (0.9923)^{k-1}]\ ;\ k=2,3,\ldots.$
$Pr(T_3=k) = (0.0083416)\,[(0.994781)^{k-1} - (0.97355)^{k-1}]\ ;\ k=2,3,\ldots$

نلاحظ أن الفترة الزمنية بين هجرتين للحالة الثانية (صلاح الدين ) هو أكبر من الفترة الزمنية للحالتين الأخريين ( نينوى والتأميم )

وأن التوقع والتباين للزمن بين هجرتين متعاقبتين باستخدام العلاقة (17a,17b,17c,17d) هو :

$E(T_1) = 235.60255$ $V(T_1) = 54362.0408$
$E(T_2) = 4648.3507$ $V(T_2) = 18723.4841$
$E(T_3) = 229.61284$ $V(T_3) = 17857.7132$

وأن دالة كتلة الاحتمال لزمن الانتظار لكل حالة (محافظة) باستخدام العلاقة (19a,19b,19c)هو :

$Pr(W_1=k) = (0.004301)\,(0.995698)^{k-1}\ ;\ k=1,2,\ldots\ldots.$
$Pr(W_2=k) = (0.022180)\,(0.977819)^{k-1}\ ;\ k=1,2,\ldots.$
$Pr(W_3=k) = (0.0052178)\,(0.9947812)^{k-1}\ ;k=1,2,\ldots.$

حيث نلاحظ أن زمن الانتظار في الحالة الثانية ( صلاح الدين ) يكون أكبر من الحالتين الأخريين (نينوى والتأميم) وأن التباين والوسط الحسابي لزمن الانتظار باستخدام العلاقة (20a,20b,20c) هو

$E(W_1) = 232.479$ $V(W_1) = 53814.01844$
$E(W_2) = 45.083$ $V(W_2) = 1987.4291$
$E(W_3) = 191.650$ $V(W_3) = 36538.0762$

الاستنتاجات

إن من أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من خلال هذه الدراسة بعد الأخـذ بنظر الاعتبار أننا افترضنا حرية الانتقال بين المحافظات الثلاثة (دون ذكـر أسـباب الانتقال) وكذلك اعتماد القيمة المقدرة (المعدل) وان الزيادة أو النقصـان تشـير إلـى الهجرة إلى أو من كل محافظة على التوالي واعتمادنا علـى الإحصـائيين السـكانيين لعامي 1977 و 1997 وهذه الاستنتاجات هي :

1- إن احتمالية فترة البقاء لمحافظة نينوى هي الأكبر تليها محافظة التـأميم ثـم صلاح الدين وهذا مؤشر على أن هذه المحافظة تتمتع باستقرار سكاني اكبـر لان زمن المكوث فيها كبير.

2- إن احتمالية الفترة الزمنية بين هجرتين متعاقبتين في محافظة صلاح الدين هي اكبر من الفترة الزمنية للمحافظتين الأخريين وهذا يشير إلى أن المهاجرين إلى هذه المحافظة يقضون فترة زمنية أطول لحـين مغادرتهـا إلـى إحـدى المحافظتين الأخريين .

3- إن احتمالية زمن الانتظار في محافظة صـلاح الـدين هـي اكبـر مـن المحافظتين الأخريين أي ان الفترة الزمنية التي يقضـيها السـاكن فـي هـذه المحافظة لحين حدوث الهجرة هو كبير بالنسبة للمحافظتين الأخريين .

المصـــــــــــــادر

1. الجبوري . أحمد خلف غنام ،(1983) " بناء جداول الحياة في العــراق "رسالة ماجستير غير منشورة .جامعة بغداد،كلية الإدارة والاقتصاد .

2. Battaglia, F. (1981) " Up crossing of discrete hydrologic processes and Markov chain " J.of Hydrology, 53,1-16.

3. Cox.D.R.and Miller, H.D. (1965)."The theory of stochastic processes chapman and hall.

4. Cung, K.L. (1967)"Markov chains with stationary transition probability"Springer Verlag.

5. Isaacson, D.L and Madsn, R.W.(1976)"Markov chains theory and application" John Wiley and sons.

6. Kemeny, J.G. and Shell, J.L (1976)"Finite Markov Chains" Springer Verlag.

7. Ross, S.M. (1970)"Applied probability models with optimization application". Holden-day