

تحليل إحصائي للعملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بعملية وايبيل مع تطبيق

مثنى صبحي سليمان**

باسل يونس ذنون الخياط*

الملخص

يتناول هذا البحث دراسة العملية البواسونية غير المتجانسة والموصوفة بعملية وايبيل، ولتقدير المعدل الزمني للحدوث تم استخدام طريقتين إحصائيتين مختلفتين وهما طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى، فضلاً عن الطريقة البيانية التي تتحرى عن مدى ملائمة نموذج قانون القوة للبيانات قيد الدراسة وإيجاد مقدر للمعدل الزمني للحدوث.

ويتضمن التطبيق العملي دراسة الفترات بين حدوث الأمطار في محطتين رئيسيتين للأنواء الجوية في محافظة نينوى، كما تم تقدير المعدل اليومي لسقوط الأمطار بالطرائق الإحصائية المقترحة في البحث.

Statistical Analysis of Non-Homogeneous Poisson Process Described as Weibull Process with an Application

ABSTRACT

This research deals with the non-homogenous Poisson process described as Weibull process. In order to estimate the rate of occurrence, maximum likelihood and least square methods have been used, in addition to the graphical method which investigates the suitability of the power low function of the data for the research and estimating the rate of occurrence.

The practical application includes studying intervals between rainfall in two main weather forecasting stations of Nineva. Thus, the rate of rainfalls has been estimated by using the suggested statistical method in the research.

* أستاذ / كلية علوم الحاسبات والرياضيات / جامعة الموصل.

** مدرس / قسم علم الحاسوب / كلية الحداثة الجامعة.

1. المقدمة *Introduction* :

تُعد العملية البواسونية غير المتجانسة من العمليات النقطية التي تستخدم لنمذجة الظواهر العشوائية وخصوصاً تلك التي تعتمد على الزمن في حدوثها. وقد تم تخصيص هذا البحث لدراسة العملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بدالة وايبيل (Weibull Function) كمعدل زمني لحدوث الحوادث، وتقدير معالماتها باستخدام طرائق التقدير المختلفة.

وتُعد دالة وايبيل من الدوال الشائعة في دراسة نماذج نمو المعولية (Reliability Growth Models)، وتعود الأفكار الأولى لهذه المعالجة للباحث [Duane, 1964]⁽³⁾ الذي نشر مقالة قدّم فيها بيانات فشل الأنظمة المختلفة في أثناء برامج تنميتها، وبيّن الباحث أن هذه المعالجة مكافئة للعملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بدالة وايبيل للمعدل الزمني للحدوث.

يُطلق على العملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بدالة وايبيل للمعدل الزمني للحدوث اسم عملية وايبيل (Weibull Process) والسبب في ذلك هو أن التوزيع الاحتمالي للفترات بين حدوث الحوادث يتوزع على وفق توزيع وايبيل (Weibull Distribution).

وقد استخدم هذه العملية العديد من الباحثين أمثال الباحث [Crow, 1997]⁽²⁾، وكذلك [Erkanli et al., 2002]⁽⁴⁾، وفي بحث [Soyer et al., 2005]⁽¹⁰⁾.

2. عملية وايبيل *Weibull Process* :

لو فرضنا أن العملية التصادفية $\{N(t) ; t \geq 0\}$ هي عملية بواسونية غير متجانسة بمعدل زمني للحدوث موصوف بالصيغة الآتية:

$$\lambda(t) = \beta \lambda t^{\beta-1}, t \geq 0 ; \lambda, \beta > 0 \quad \dots\dots (1)$$

فإن العملية $\{N(t) ; t \geq 0\}$ عندئذ تسمى بعملية وايبيل، وتتوزع توزيع بواسون بالمعلمة $\lambda(t)$ في الفترة الزمنية $(0, t_0]$ [Soyer et al., 2005]⁽¹⁰⁾. ومن مواصفات هذه العملية أن توزيع الفترات بين حدوث الحوادث يتبع توزيع وايبيل بدالة كثافة احتمال:

$$f(t / \beta, \lambda) = \beta \lambda t^{\beta-1} e^{-\lambda t_0^\beta} \quad t \geq 0; \lambda, \beta > 0 \quad \dots\dots (2)$$

إذ إنَّ λ تمثل معلمة القياس (Scale parameter)، و β تمثل معلمة الشكل (Shape parameter).

فإذا كانت معلمة الشكل β في دالة وايبل للمعدل الزمني للحدوث في الصيغة (1) أكبر من الواحد فإن هنالك تزايداً في المعدل الزمني للحدوث في العملية البواسونية غير المتجانسة مع الزمن، أما إذا كانت أقل من الواحد فإن هنالك تناقصاً في المعدل الزمني للحدوث في العملية البواسونية غير المتجانسة مع الزمن. وفي حالة أن معلمة الشكل β في دالة وايبل تساوي الواحد فإن ذلك يعطي مؤشراً على أن المعدل الزمني للحدوث في العملية قيد الدراسة هو كمية ثابتة مع الزمن، وعليه فإن دالة وايبل للمعدل الزمني للحدوث ستتحول إلى دالة التوزيع الأسّي [Erkanli et al., 2002].⁽⁴⁾

إنَّ الدالة التراكمية للمعدل الزمني للحدوث لعملية وايبل في الفترة الزمنية $(0, t_0]$ معروفة بالشكل الآتي:

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_0^t \lambda(u) du \\ &= \int_0^t \beta \lambda u^{\beta-1} du = \lambda t^\beta; \quad 0 \leq t \leq t_0. \end{aligned} \quad \dots\dots (3)$$

وقد أُطلقَ على هذه الدالة في أغلب البحوث اسم دالة قانون القوة (Power Law Function).

إن العدد الكلي للحوادث التي تحدث في العملية التصادفية $\{N(t); t \geq 0\}$ هو متغير عشوائي يتوزع توزيع بواسون (Poisson Distribution) بمعدل عدد مرات الحدوث $m(t)$. أي إنَّ احتمال أن يكون هنالك n من الحوادث في الفترة الزمنية $(0, t_0]$ هو:

$$p\{N(t) = n\} = \frac{[m(t_0)]^n e^{-m(t_0)}}{n!}; \quad n=0,1,2,\dots \quad \dots\dots(4)$$

مع بقاء فرضية أن حدوث الحوادث في فترة زمنية معينة مستقل إحصائياً عن حدوث الحوادث في فترات زمنية أخرى غير متداخلة مع بعضها.

3. تقدير معلمة عملية وايبيل: *Estimation of Weibull Process Parameter*

هنالك عدة طرائق اقترحها العديد من الباحثين لتقدير معلمة العملية البواسونية غير المتجانسة الموصوفة بعملية وايبيل، وأغلب البحوث الحديثة حول هذا الموضوع اقترح باحثوها طرائق لـ *لامعلمية* في التقدير (Non-parametric Methods). ففي بحث [Leemis, 1991]⁽⁸⁾ تم عرض طريقة لـ *لامعلمية* لتقدير معلمة العملية البواسونية غير المتجانسة. وفي بحث [Kuhl et al., 1997]⁽⁶⁾، وبحث [Kuo et al., 1997]⁽⁷⁾ تم عرض عملية وايبيل ولكن باستخدام *استدلال* *بيز* (Bayesian Inference). كما تم استخدام استدلال *بيز* لتقدير معلمات دالة وايبيل للمعدل الزمني للحدوث في بحث [Erkanli et al., 2002]⁽⁴⁾ وبحث [Soyer et al., 2005]⁽¹⁰⁾. ومن ناحية أخرى، فإن أوسع الطرائق للتقدير الإحصائي انتشاراً هي *طريقة الإمكان الأعظم* (Maximum Likelihood Method) و*طريقة المربعات الصغرى* (Least Squares Method)، وقد استخدمت هاتان الطريقتان لتقدير المعدل الزمني للحدوث في بحث [Massey et al., 1996]⁽⁹⁾ لتقدير المعدل الزمني للحدوث الموصوف بالدالة الخطية (Linear Function)، وكذلك استخدمت هاتان الطريقتان للتقدير في بحث [Crow, 1997]⁽²⁾ لتقدير المعدل الزمني للحدوث في عملية وايبيل. كما عرض الباحثان [Kuhl and Wilson, 2000]⁽⁵⁾ طريقة المربعات الصغرى في تقدير المعدل الزمني للحدوث في العملية البواسونية غير المتجانسة.

3-1 الطريقة البيانية *Graphical Method*:

تُعد الطريقة البيانية إحدى الطرائق التقريبية لتقدير معلمة العملية البواسونية غير المتجانسة وذلك من خلال رسم الدالة التراكمية للمعدل الزمني للحدوث مع الزمن. كما تستخدم الطريقة البيانية للتحري عن مدى ملائمة دالة قانون القوة للعملية البواسونية غير المتجانسة [Duane, 1964]⁽³⁾. فإذا تم أخذ اللوغاريتم الطبيعي للدالة التراكمية للمعدل الزمني للحدوث لعملية وايبل فإننا نحصل على المعادلة الآتية:

$$\ln[m(t)] = \ln \lambda + \beta \ln t \quad \dots (5)$$

وكان شكل الانتشار للنقاط بين العدد المتراكم للحوادث مع أوقات حدوثها بالمقياس اللوغاريتمي للعملية قيد الدراسة هو بشكل خط مستقيم تقريباً، فإن دالة وايبل للمعدل الزمني للحدوث ستكون ملائمة للعملية البواسونية غير المتجانسة قيد الدراسة.

ومن خلال رسم المستقيم الملائم للعملية أو شكل الانتشار يمكن إيجاد مقدرات خام لمعلمتي القياس والشكل للدالة التراكمية للمعدل الزمني للحدوث، إذ إن تقاطع المستقيم مع المحور الصادي يُعطي مقدراً تقريبياً لمعلمة القياس λ بالمقياس اللوغاريتمي. أما ميل المستقيم فيُعطي مقدراً تقريبياً لمعلمة الشكل β .

3-2 طريقة الإمكان الأعظم *Maximum Likelihood Method*:

تُعد طريقة الإمكان الأعظم من الطرائق الشائعة في تقدير معلمة العملية البواسونية غير المتجانسة. وكما هو معلوم فإن التوزيع الاحتمالي للفترات بين حدوث الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة يتبع التوزيع الأسّي بالمعلمة $\lambda(t)$ ضمن الفترة الزمنية $(0, t_0)$ وبدالة كثافة احتمال موضحة في الصيغة الآتية:

$$f(t) = \lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}, \quad 0 < t \leq t_0 \quad \dots (6)$$

فلو كانت $t_1, t_2, \dots, t_n$ تمثل الفترات بين حدوث الحوادث في العملية البواسونية $\{N(t); t \geq 0\}$ ، وبالتعويض بدالة المعدل الزمني للحدوث لعملية وايبل

الموضحة بالصيغة (1) في التوزيع الاحتمالي للفترات بين حدوث الحوادث نحصل على دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي للفترات بين الحوادث لعملية واييل كما في الصيغة (2).

إن دالة الإمكان للفترات بين حدوث الحوادث في عملية واييل هي بالشكل الآتي:

$$L = \beta^n \lambda^n e^{-\lambda t_0^\beta} \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1}, \quad 0 < t_i \leq t_0 \quad \dots\dots (7)$$

وإنّ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان هو:

$$\ln L = n \ln \beta + n \ln \lambda - \lambda t_0^\beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln t_i \quad \dots\dots (8)$$

ولإيجاد مقَدري الإمكان الأعظم للمعلمتين λ و β ، فإنّه يتم أخذ المشتقة الأولى للمعادلة (8) بالنسبة الى كل من λ و β كما يأتي:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - t_0^\beta \quad \dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \lambda t_0^\beta \ln t_0 + \sum_{i=1}^n \ln t_i \quad \dots\dots (10)$$

وبمساواة المعادلتين السابقتين بالصفر نحصل على مُقَدري الإمكان الأعظم للمعلمتين λ و β على التوالي كما يأتي:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_0^\beta}, \quad \dots\dots (11)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\lambda t_0^\beta \ln t_0 - \sum_{i=1}^n \ln t_i} \quad \dots\dots (12)$$

وبما إنّ ($\lambda t_0^\beta = n$) فإن المعادلة (12) ستكون بالشكل الآتي:

$$\hat{\beta} = \frac{n}{n \ln t_0 - \sum_{i=1}^n \ln t_i} . \quad \dots (13)$$

3-3 طريقة المربعات الصغرى *Least Squares Method* :

تُعد طريقة المربعات الصغرى من الطرائق المعروفة في تقدير معلمة العملية البواسونية غير المتجانسة، إلا أنها غير شائعة كثيراً في هذا المجال وذلك لأن أغلب معلمات العمليات البواسونية غير المتجانسة المقترحة من قبل الباحثين لا تتلاءم مع هذه الطريقة.

لو تم أخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة قانون القوة الموضح في الصيغة (3) نحصل على الصيغة الآتية:

$$\ln[m(t_i)] = \ln \lambda + \beta \ln t_i \quad \dots (14)$$

وعليه لو فرضنا المقادير الآتية [Crow, 1997] ⁽²⁾:

$$\begin{aligned} y_i &= \ln[m(t_i)] \\ a &= \ln \lambda \\ b &= \beta \\ x_i &= \ln t_i \end{aligned} \quad \dots (15)$$

وفرضنا أن مجموعة البيانات هي أزواج من قيم (x_i, y_i) ، وطبقاً لمبدأ المربعات الصغرى الذي يقلل من المسافة العمودية بين نقاط البيانات والخط المستقيم الملائم لهذه البيانات، فإن أفضل خط مستقيم ملائم لهذه البيانات هو المستقيم الذي تمثله المعادلة الآتية:

$$y_i = a + bx_i \quad \dots\dots (16)$$

إذ إنَّ:

$$\sum_{i=1}^n (\hat{a} + \hat{b}x_i - y_i)^2 = \min_{a,b} \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \quad \dots\dots (17)$$

والمقدَّران $\hat{a}$, $\hat{b}$ هما مقدَّرا المربعات الصغرى للمعلمتين a و b . وكما هو معروف جيِّداً فإن هذين المقدَّرين يمكن إيجادهما من خلال المعادلتين الآتيتين:

$$\hat{a} = \frac{\sum y_i}{n} - \hat{b} \frac{\sum x_i}{n} \quad \dots\dots (18)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \quad \dots\dots (19)$$

وبالتعويض عن قيم x_i و y_i و a و b بما يقابلها من الصيغ (15) نحصل على ما يأتي:

$$\ln \lambda = \frac{\sum \ln m(t_i)}{n} - \hat{\beta} \frac{\sum \ln t_i}{n} \quad \dots\dots (20)$$

أي إنَّ:

$$\hat{\lambda} = e^{\frac{1}{n}(\sum \ln m(t_i) - \hat{\beta} \sum \ln t_i)} \quad \dots\dots (21)$$

وكذلك فإنَّ:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (\ln t_i)(\ln m(t_i)) - \frac{(\sum \ln t_i)(\sum \ln m(t_i))}{n}}{\sum (\ln t_i)^2 - \frac{(\sum \ln t_i)^2}{n}} \quad \dots\dots (22)$$

إذ إنَّ $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ يمثلان مقدَّري المربعات الصغرى للمعلمتين λ و β على التوالي.

4. حدّ الثقة للمعدل الزمني للحدوث لعملية وايبيل:

Confidence Intervals for the Rate of Occurrence of Weibull Process

لإيجاد حدّي الثقة لمقدّر الإمكان الأعظم للمعدل الزمني للحدوث لعملية وايبيل وذلك على افتراض أن هذا المقدّر يتبع التوزيع الطبيعي، فعند مستوى معنوية α فإنّ حدّي الثقة للمعدل الزمني للحدوث يمكن إيجادهما كما يأتي:

$$P(-Z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\lambda}(t) - \lambda(t)}{\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t))}} < Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad \dots\dots (23)$$

إذ إنّ $Z_{\alpha/2}$ تمثل القيمة الجدولية من جداول التوزيع الطبيعي عند مستوى معنوية α . أي إنّ حدّي الثقة للمعدل الزمني للحدوث هما:

$$C.I = \hat{\lambda}(t) \mp Z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\lambda}(t))} \quad \dots\dots (24)$$

إذ إنّ $\hat{\lambda}(t)$ تمثل مقدّر الإمكان الأعظم للمعدل الزمني للحدوث لعملية وايبيل. أما تباین $\hat{\lambda}(t)$ فيمكن إيجاده باستخدام المعادلة الآتية: [Crow, 1997] ⁽²⁾

$$Var[\hat{\lambda}(t)] = \left(\frac{\partial \hat{\lambda}(t)}{\partial \lambda} \right)^2 Var(\hat{\lambda}) + \left(\frac{\partial \hat{\lambda}(t)}{\partial \beta} \right)^2 Var(\hat{\beta}) + 2 \left(\frac{\partial \hat{\lambda}(t)}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial \hat{\lambda}(t)}{\partial \beta} \right) Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) \quad \dots (25)$$

إذ إنّ $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ هما مقدّرا الإمكان الأعظم للمعلمتين λ و β على التوالي. في حين أنّ $Var(\hat{\lambda})$ و $Var(\hat{\beta})$ يمثلان تباین كل من المقدرين $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ على التوالي. أما $Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta})$ فيمثل التغاير بين $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$.

ويمكن توضيح هذه التباينات في مصفوفة التباين والتغاير

(Variance-Covariance Matrix) كما يأتي:

$$Var - Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) = \begin{bmatrix} Var(\hat{\lambda}) & Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) \\ Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) & Var(\hat{\beta}) \end{bmatrix} \quad \dots\dots (26)$$

وكما هو معلوم فإنَّ هذه المصفوفة تمثل معكوس مصفوفة المعلومات فيشر (Fisher's Information Matrix)، أي أنَّ:

$$Var - Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) = I^{-1}$$

إذ إنَّ I تمثل مصفوفة معلومات فيشر، كما يأتي:

$$I = \begin{bmatrix} -E \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} & -E \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \beta} \\ -E \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \beta} & -E \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (27)$$

ولإيجاد عناصر مصفوفة معلومات فيشر فإننا نحتاج إلى استخدام المعادلة في الصيغة (8)، التي تمثل لوغاريتم دالة الإمكان للفترات بين الحوادث في عملية واييل، فالحد الأول من المصفوفة (27) يمثل المشتقة الثانية لهذه المعادلة بالنسبة إلى المعلمة λ وكما يأتي:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} \quad \dots\dots (28)$$

والحد الرابع من هذه المصفوفة يمثل المشتقة الثانية للوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة إلى المعلمة β كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} = -\frac{n}{\beta^2} - \lambda t_0^\beta (\ln t_0)^2 \quad \dots\dots (29)$$

أما الحدان الثاني والثالث من هذه المصفوفة فيمثلان مشتقة لوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة إلى كل من المعلمتين λ و β كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \beta} = -t_0^\beta \ln t_0 \quad \dots\dots (30)$$

وبالتعويض في المصفوفة (27)، وبعد إيجاد المعكوس لها نحصل على التباين لكل من $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ وكذلك التغاير بين $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ كما في الصيغ الآتية:

$$Var(\hat{\lambda}) = \left[\frac{n}{\beta^2} + \lambda t_0^\beta (\ln t_0)^2 \right] / \left[\frac{n^2}{\lambda^2 \beta^2} + t_0^\beta (\ln t_0)^2 \left(\frac{n}{\lambda} - t_0^\beta \right) \right] \quad \dots (31)$$

$$Var(\hat{\beta}) = \left[\frac{n}{\lambda^2} \right] / \left[\frac{n^2}{\lambda^2 \beta^2} + t_0^\beta (\ln t_0)^2 \left(\frac{n}{\lambda} - t_0^\beta \right) \right] \quad \dots (32)$$

$$Cov(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) = \left[-t_0^\beta \ln t_0 \right] / \left[\frac{n^2}{\lambda^2 \beta^2} + t_0^\beta (\ln t_0)^2 \left(\frac{n}{\lambda} - t_0^\beta \right) \right] \quad \dots (33)$$

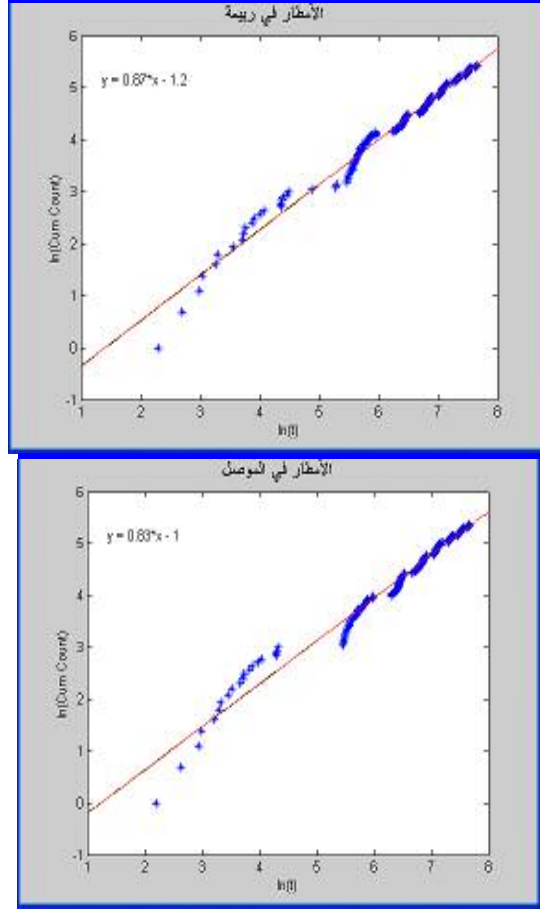
5. تطبيق عن الأمطار في محطات الأنواء الجوية في محافظة نينوى:

Application of Rainfall in the Weather Forecasting Stations of Nineva

تعد الأمطار من المصادر المهمة في الزراعة لاسيما الزراعة الدائمة التي تعتمد على الأمطار اعتماداً مباشراً. لقد تم اختيار الأمطار المسجلة في محطتين للأنواء الجوية في محافظة نينوى وهما محطة الموصل واربعة والفترة من عام 1994 ولغاية عام 2000 [سليمان، 2006]. ولقد تمت ملاحظة موسمية الأمطار فضلاً عن سلوكها الذي يبدو غير متماثل بين سنة وأخرى مما يُعد مؤشراً على أن العمليتين التصادفيتين قيد الدراسة تعتمدان على الزمن (Time Dependent) في سلوكهما، أي إنهما عمليتان غير متجانستين (Non-Homogeneous Processes).

وقبيل تقدير معلمتي العمليتين البواسونيتين غير المتجانستين في المحطتين قيد الدراسة، فإنه يتم أولاً فحص طبيعة البيانات والتحري عن مدى ملائمة نموذج قانون القوة في عملية واييل لبيانات الدراسة. إن ذلك يتم من خلال رسم شكل الانتشار للنقاط بين عدد الأيام المتراكمة لسقوط الأمطار مع أوقات حدوثها بالمقياس اللوغاريتمي للعملية قيد الدراسة، فإذا كانت النقاط على شكل خط مستقيم تقريباً فإن دالة واييل للمعدل الزمني للحدوث ستكون ملائمة للعملية البواسونية غير المتجانسة قيد الدراسة. وعليه فقد تم رسم هذه الأشكال للعمليتين في المحطتين

(الموصل وربيعه)، وكذلك تم رسم المستقيمين الملائمين للشكلين الانتشاريين وتقدير معادلتَي الخطين المستقيمين. وهذان الشكلان موضحان في أدناه:



(b)

(a)

الشكل (1): الشكل الانتشاري للو غار يتم العدد المتراكم لأيام الممطرة في محطتي الموصل وربيعه.

يبين الشكل (1) شكل انتشار النقاط بين عدد الأيام المتراكم لسقوط الأمطار مع أوقات حدوثها بالمقياس اللوغاريتمي لكل محطة من المحطتين قيد الدراسة. ونلاحظ أنهما يأخذان شكلاً مستقيماً تقريباً، مما يدل على ملائمة دالة قانون القوة التي تمثل معلمة عملية واييل لبيانات الدراسة. وبناءً على ذلك يمكن نمذجة الفترات البينية لسقوط الأمطار في كل محطة بدالة واييل كمعدل زمني للحدوث.

ومن هذين الشكلين تم تقدير معادلتى الخطين المستقيمين الملائمين للشكلين الانتشاريين لكل محطة والذين تمثلهما المعادلة في الصيغة (5). وإنَّ المعادلتين اللتين تم الحصول عليهما من كل محطة يمكن من خلالهما إيجاد مقدرات للمعلمتين λ و β في دالة وايبل للمعدل اليومي لسقوط الأمطار، وهذه المقدرات موضحة في الجدول الآتي:

الجدول (1): معادلتا الخط المستقيم الملائمتان للشكلين الانتشاريين مع مقدر λ و β .

المحطة	معادلة الخط المستقيم الملائمة	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$
الموصل	$\ln[m(t)] = -1 + 0.83 \ln t$	0.83	0.3679
ربيعة	$\ln[m(t)] = -1.2 + 0.87 \ln t$	0.87	0.3012

وبالتعويض عن القيمتين المقدرتين بالطريقة البيانية للمعلمتين $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ في دالة وايبل للمعدل اليومي لسقوط الأمطار الموضحة في الصيغة (1) لكل محطة تم الحصول على النتائج الآتية:

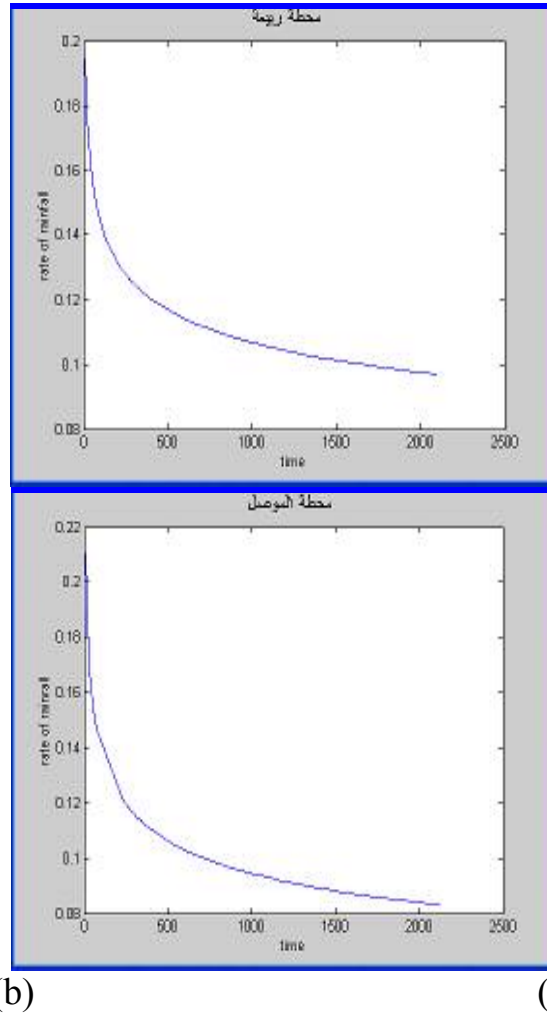
1. دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة الموصل:

$$\hat{\lambda}_1(t) = 0.30536 t^{-0.17} \quad ; 0 < t \leq 2132$$

2. دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة ربيعة:

$$\hat{\lambda}_2(t) = 0.26204 t^{-0.13} \quad ; 0 < t \leq 2105$$

والشكل (2) يوضح منحنى دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار الموصوفة بدالة وايبل المحسوبة بالطريقة البيانية ولكل محطة.



الشكل (2): المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة الموصل وربيعه بالطريقة البيانية.

وعليه يمكن إيجاد المعدل اليومي لسقوط الأمطار للفترة قيد الدراسة، أي عندما $(t = t_0)$ ، ولكل محطة كما في الجدول الآتي:

الجدول (2): المعدل اليومي لسقوط الأمطار ومتوسط الزمن بين حدوث المطرات للفترة قيد الدراسة ولكل محطة بالطريقة البيانية.

المحطة	المعدل اليومي لسقوط الأمطار (مطره/يوم)	متوسط الزمن بين حدوث المطرات (يوم)
الموصل	0.08297	12.05255
ربيعة	0.09690	10.31992

5-1 تقدير الإمكان الأعظم للمعدل اليومي لسقوط الأمطار:

Maximum Likelihood Estimates for the Daily Rate of Rainfall

تبيّن النتائج البيانية إن عملية وايل ملائمة لبيانات الدراسة، وقد تم تقدير معلمات دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار لعملية وايل باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وللمحطتين قيد الدراسة كما في الجدول الآتي:

الجدول (3): مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمتي المعدل اليومي لسقوط الأمطار.

المحطة	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$
الموصل	0.8718	0.2669
ربيعة	0.8795	0.2747

وبالتعويض عن القيمتين المقدرتين للمعلمتين $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ في دالة وايل للمعدل اليومي لسقوط الأمطار الموضحة في الصيغة (1) لكل محطة تم الحصول على النتائج الآتية:

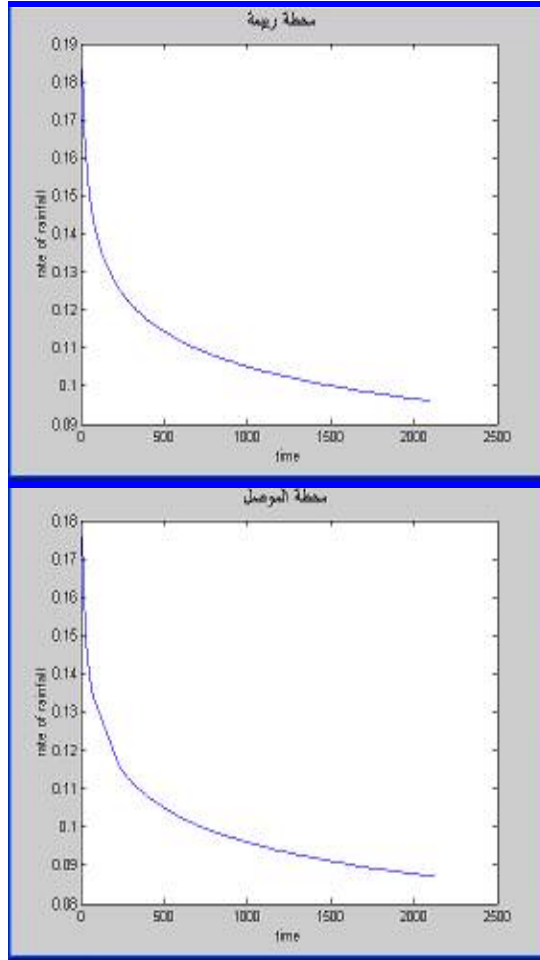
1. دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة الموصل:

$$\hat{\lambda}_1(t) = 0.2327t^{-0.1282} \quad ; 0 < t \leq 2132$$

2. دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة ربيعة:

$$\hat{\lambda}_2(t) = 0.2416t^{-0.1205} \quad ; 0 < t \leq 2105$$

والشكل (3) يوضح منحنى دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار الموصوفة بدالة وايل المقدرة باستخدام طريقة الإمكان الأعظم ولكل محطة كما يأتي:



(b)

(a)

الشكل (3): المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطتي الموصل وربيعه بطريقة الإمكان الأعظم.

كما يمكن إيجاد المعدل اليومي لسقوط الأمطار للفترة قيد الدراسة، أي عندما $(t = t_0)$ ولكل محطة، وكذلك إيجاد متوسط الزمن بين حدوث المطرات خلال الفترة قيد الدراسة، والجدول الآتي يبين المعدل اليومي لسقوط الأمطار ومتوسط الزمن بين حدوث المطرات خلال فترة السنوات السبعة قيد الدراسة ولكل محطة:

الجدول (4): المعدل اليومي لسقوط الأمطار ومتوسط الزمن بين حدوث المطرات للفترة قيد الدراسة ولكل محطة باستخدام طريقة الإمكان الأعظم.

المحطة	المعدل اليومي لسقوط الأمطار (مطره/يوم)	متوسط الزمن بين حدوث المطرات (يوم)
الموصل	0.0871	11.4811
ربيعة	0.0961	10.4058

5-2 تقدير المربعات الصغرى للمعدل اليومي لسقوط الأمطار:

Least Squares Estimates for the Daily Rate of Rainfall

إنَّ الطريقة الثالثة المستخدمة لتقدير معلمات المعدل اليومي لسقوط الأمطار هي طريقة المربعات الصغرى، وقد تم تقدير معلمات عملية وإيبل باستخدام هذه الطريقة وللمحطتين قيد الدراسة وكما يأتي:

الجدول (5): مقدرات المربعات الصغرى لمعلمتي المعدل اليومي لسقوط الأمطار.

المحطة	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$
الموصل	0.8289	0.3590
ربيعة	0.8726	0.2920

وبالتعويض عن القيمتين المقدرتين للمعلمتين $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ في دالة وإيبل للمعدل اليومي لسقوط الأمطار الموضحة في الصيغة (1) لكل محطة تم الحصول على النتائج الآتية:

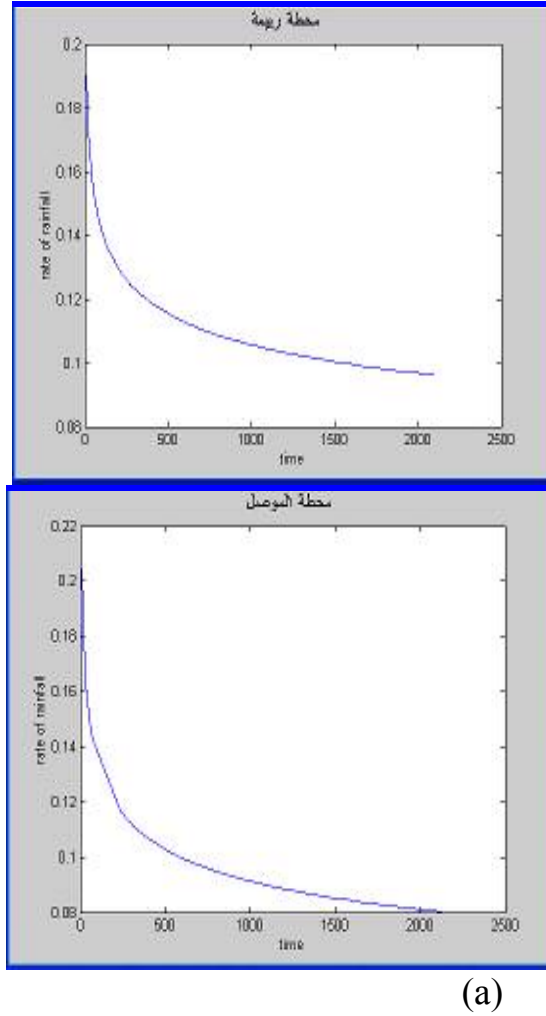
1. دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة الموصل:

$$\hat{\lambda}_1(t) = 0.2976t^{-0.1711} ; 0 < t \leq 2132$$

2. دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة ربيعة:

$$\hat{\lambda}_2(t) = 0.2548t^{-0.1274} ; 0 < t \leq 2105$$

والشكل (4) يوضح منحنى دالة المعدل اليومي لسقوط الأمطار الموصوفة بدالة وإيبل المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى ولكل محطة كما يأتي:



(b)

(a)

الشكل (4): المعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطتي الموصل وربيعه بطريقة المربعات الصغرى.

ويمكن إيجاد المعدل اليومي لسقوط الأمطار للفترة قيد الدراسة، أي عندما $(t = t_0)$ ولكل محطة، وكذلك إيجاد متوسط الزمن بين حدوث المطرات خلال الفترة قيد الدراسة، والجدول الاتي يبين المعدل اليومي لسقوط الأمطار ومتوسط الزمن بين حدوث المطرات خلال فترة السنوات السبعة قيد الدراسة ولكل محطة:

الجدول (6): المعدل اليومي لسقوط الأمطار ومتوسط الزمن بين حدوث المطرات للفترة قيد الدراسة لكل محطة باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

المحطة	المعدل اليومي لسقوط الأمطار (مطره/يوم)	متوسط الزمن بين حدوث المطرات (يوم)
الموصل	0.0802	12.4688
ربيعة	0.0961	10.4058

3-5 حدًا الثقة للمعدل اليومي لسقوط الأمطار:

Confidence Intervals for Daily Rate of Rainfall

لإيجاد حدّي الثقة للمعدل اليومي لسقوط الأمطار للمحطتين قيد الدراسة، تم استخدام الصيغة في المعادلة (25) التي تعتمد على تباين المعدل اليومي لسقوط الأمطار. كما تم إيجاد التباين والتغاير لمعلمتي المعدل اليومي لسقوط الأمطار كما في الجدول الآتي:

الجدول (7): مقدرات التباين والتغاير لمعلمتي المعدل اليومي لسقوط الأمطار.

المحطة	تباين المعلمة $\hat{\beta}$	تباين المعلمة $\hat{\lambda}$	التغاير بين $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$	تباين المعلمة $\hat{\lambda}(t_0)$
الموصل	0.0036	0.0153	-0.0073	0.000071228
ربيعة	0.0034	0.0152	-0.0071	0.000080308

وعليه من خلال الجدول السابق يمكن إيجاد حدّي الثقة للمعدل الحقيقي اليومي لسقوط الأمطار لكل محطة خلال فترة السنوات السبع قيد الدراسة وبمستوى ثقة 95% ، وكما يأتي:

1. حدًا الثقة للمعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة الموصل:

$$0.0733 \leq \lambda_1(t_0) \leq 0.1009$$

2. حدًا الثقة للمعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة ربيعة:

$$0.0814 \leq \lambda_2(t_0) \leq 0.1108$$

6. مناقشة النتائج:

لقد تم تقدير المعدل اليومي لسقوط الأمطار بالطرائق الإحصائية المستخدمة في البحث. ومن مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها من هذه الطرائق لتقدير معلّتي المعدل اليومي لسقوط الأمطار، يتضح الانسجام الكبير فيما بينها ممّا يدل على التقارب الكبير في كفاءة هذه الطرائق، والجدول التالي يبيّن قيم هذه المقدّرات:

الجدول (8): مقدرات معلّات المعدل اليومي لسقوط الأمطار بالطرائق الثلاث.

المحطة	مقدّرات طريقة الإمكان الأعظم		مقدّرات طريقة المربعات الصغرى		مقدّرات الطريقة البيانية	
	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
الموصل	0.2669	0.8718	0.3590	0.8289	0.3679	0.8300
ربيعة	0.2747	0.8795	0.2920	0.8726	0.3012	0.8700

من الجدول (8) نلاحظ أنّ مقدّرات معلّمة الشكل β في دالة واييل للمعدل اليومي لسقوط الأمطار بالطرائق المستخدمة أقل من الواحد، مما يُعطي مؤشراً واضحاً على التناقص في المعدل اليومي لسقوط الأمطار في المحطتين بمرور الزمن، أي أنّ الاتجاه العام للسقوط اليومي للأمطار وخلال الفترة قيد الدراسة هو باتجاه التناقص بشكل عام، كما هو واضح من الأشكال الخاصة بالمعدل اليومي لسقوط الأمطار في المحطتين قيد الدراسة.

ولمعرفة معنوية هذه المعلومات تم استخدام المختبر الإحصائي t الذي يمثل النسبة بين المقدّر والخطأ المعياري له. والجدول التالي يبين الأخطاء المعيارية (Standard Errors) للمقدّرين اللذين تم الحصول على قيم t المحسوبة :

الجدول (9): الأخطاء المعيارية للمقدّرين $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ والنسبة بين المقدّرين وأخطائهما المعيارية للمحطتين قيد الدراسة.

المحطة	الأخطاء المعيارية		t_{cal}	
	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$
الموصل	0.0085	0.0041	31.40	212.64
ربيعة	0.0081	0.0038	33.91	231.45

يُلاحظ من الجدول (9) أنّ النسبة بين المقدّرين وأخطائهما المعيارية، والتي تمثل القيمة المحسوبة للمختبر الإحصائي t ، كبيرة جداً في قيمتها المطلقة ممّا يؤكد معنوية هذه المقدّرات في المعدل اليومي لسقوط الأمطار للمحطتين قيد الدراسة، وهذا ما يعزز الافتراض بمعنوية هاتين المعلمتين في النموذج الرياضي المقترح لعملية وإيبل.

المصادر

1. سليمان، مثنى صبحي، (2006)، "التحليل الإحصائي للعملية البواسونية غير المتجانسة مع تطبيق"، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل.

2. Crow, L. H. (1997), "Reliability Growth Reference". The HTML version of the printed textbook. <http://www.weibll.com>.
3. Duane, J. T. (1964), "Learning curve approach to reliability monitoring". IEEE Transaction on Aerospace, As-vol(2), 563-566.
4. Erkanli, A., Merrick, J. R. and Soyer, R. (2002), "Parametric and semi-parametric Bayesian models for accelerated life tests". <http://www.people.vcu.edu/~jrmerrick/tenure/preparation>.

5. Kuhl, M. E. and Wilson, J. R. (2000), "**Least squares estimation of non homogeneous Poisson processes**". Journal of Statistical Computation and Simulation, 67, 75-108.
6. Kuhl, M. E., Damerджи, H. and Wilson, J. R. (1997), "**Estimating and simulating Poisson process with trends or asymmetric cyclic effects**". Piscataway, New Jersey: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 287-295.
7. Kuo, L. and Ghosh, S. K. (1997), "**Bayesian non parametric inference for non homogeneous Poisson processes**". Tech. Rep. No. 97-18, Statistics Department, University of Connecticut.
8. Leemis, L. M. (1991), "**Non parametric estimation of the cumulative intensity function for a non-homogeneous Poisson process**". Management Science, 37(7), 886-900.
9. Massey, W. A., Parker, G. A. and Whitt, W. (1996), "**Estimating the parameters of a non-homogeneous Poisson process with linear rate**". Telecommunication Systems, 5, 361-388.
10. Soyer, R. and Tarimcilar, M.M. (2005), "**Modeling and analysis of center arrival data: A Bayesian approach**". http://home.gwu.edu/~soyer/soyer_tarimcilar_call_center.pdf