المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (8) 2005
ص ص [181–196]

تقدير بيز لمعلمات نموذج الانحلال التربيعي المكاني

نبال صباح عبد الرحمن*

الملخـــص

يتناول هذا البحث مسألة تقدير معلمات نموذج الفاريوكرام والذي يدعى بنمـــوذج الانحلال التربيعي بواسطة أسلوب بيز الذي يتضمن المعلومات الأولية عن هذه المعلمات والتي تشمل العزم الأول والعزم الثاني بشكل مصـــفوفة العـــزم الأول First Moment ومصفوفة العزم الثاني Second Moment ومصفوفة العزم الثاني هي التـــي يتطلبهـــا أسلوب بيز المقترح هنا ومقدر بيز المقترح في هذا البحث يسمى مقدر بيز التربيعي غير المتحيز .

ان هذا المقدر يفترض كون المعالم خطية في دوال التغاير . اعتبرنا فـــي هـــذا البحث دالة تغاير لمتغير مكاني يحتوي على ثلاثة معالم وبواسطة أسلوب بيز حصلنا على صيغ ومعادلات كونت نظام معادلات خطية ومن خلال حل هذا النظام نحصل على تقدير بيز للمعالم الثلاث وتمت مقارنة النتائج مع نتائج تقدير بواســـطة مقـــدر أصـــغر معيـــار تربيعي غير متحيز وكانت مشجعة .

كما تمت برمجة نموذج مقدر بيز المقترح في هذا البحث بلغة ماثلاب وتم تطبيقه على بيانات حقيقية اذ حصلنا على نتائج جيدة جداً .

Bayesian Estimation of Parameter of Spatial Quadratic Decay Model

ABSTRACT

This paper deals with the problem of estimating parameters of spatial quadratic model by Bayesian technique. This technique involves the prior information of the first and second moment of the

* مدرس مساعد/ قسم الرياضيات - كلية التربية/جامعة الموصل

تاريخ التسلم : 2/27 /2005 ـــــــــــــــ تاريخ القبول : 6/13 /2005

parameters. This estimation model is called the Bayesian quadratic unbiased estimator, which is linear in the parameters. The results of estimation are compared with the estimates of minimum norm quadratic unbiased estimators and the results are encouraging.

All algorithms of computation are written by using MatLAB programming.

مقدمة :

تم الحصول على بيانات واقعية من مركز لبحوث السدود والموارد المائية في جامعة الموصل والتي تمثل ارتفاع مناسيب مياه جوفية لمنطقة القائم في العراق كما مبينة في جدول −1− تم تحليل وتوفيق نموذج التغاير الملائم لهذه البيانات

$$\sigma_{ij} = \sigma^2 \exp -(h_{ij}/a)^t \quad 0 \le t \le 2 \qquad ...(1)$$

بعد دراستها بواسطة دالة شبه الفاريوكرام التقديرية

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2 \qquad ...(2)$$

حيث البيانات غير منتظمة حولت إلى شبكة منتظمة للبيانات بشكل جدول 15×15 مشاهدة[1]. ثم حسبت دالة شبه الفاريوكرام التجريبي لهذه الشبكة للاتجاهات الأربعة، وبعد ذلك تم رسم معدل شبه الفاريوكرام التجريبي والرسم موضح في الشكل −1− ومن ملاحظتنا الشكل المذكور نرى ان التغاير لا يعتمد على الاتجاه وإنما على الإزاحة h فقط .

لأن دالة شبه الفاريوكرام للاتجاهات الأربعة متشابهة إلى حد بعيد وعليه ممكن القول ان دالة شبه الفاريوكرام لها خاصية موحد الخواص Isotropic[10]. وبهذا لاحظنا أن نموذج الفاريوكرام أو التغاير الملائم لهذه البيانات هو النموذج −1− اذ ان:

σ_{ij} : يمثل التغاير بين المشاهدة i والمشاهدة j .

σ^2 : يمثل التباين الكلي

α : تمثل مدى امتداد ظاهرة المياه الجوفية في المنطقة المدروسة .

نلاحظ أن النموذج –1– نموذج تغاير غير خطي إلا ان الرسم البيـــاني –1– لمعدل الفاريوكرام يكاد يكون خطياً تقريباً وعليه حولنا النموذج –1– إلى نموذج خطي تقريبي عندما t=2 فان التقريب الخطي للنموذج –1– سيكون :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2 h_{ij}^2 \qquad & i \neq j \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_3^2 \qquad & i = j \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3)$$

σ_1^2 يمثل تباين تأثير المشاهدة

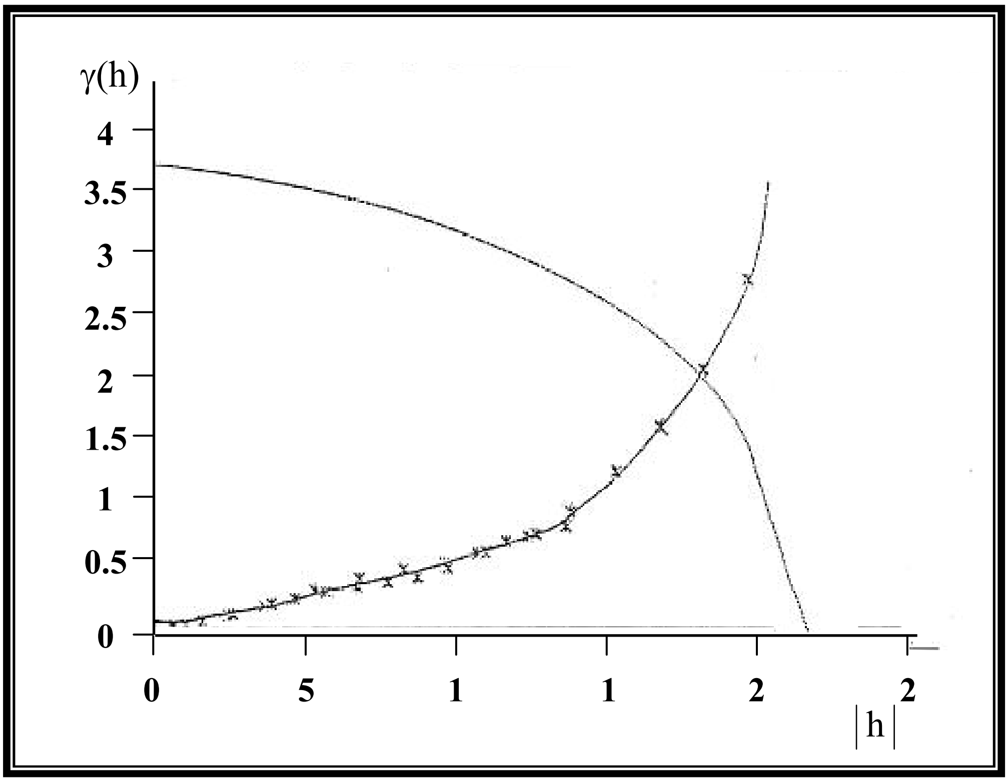
σ_2^2 يمثل تباين التأثير المكاني للمشاهدة

σ_3^2 هو تأثير النكَت Nugget Effect (مقدار يمثل ضعفا في استمرارية الظاهرة تحـت الدراسة)[4].

σ_1^2 , σ_2^2, σ_3^2 تمثل معالم التباين التي لابد من تقديرها للحصول على نموذج التغـاير التقريبي للبيانات من أجل استخدامها لعملية التنبؤ عن العملية العشوائية المكانية التي في دراستنا هذه تمثل المياه الجوفية وقد تكون معادن أو تلوث بيئـة فـي دراسـات أخرى .

الجدول (1) :بيانات ارتفاع مناسيب المياه الجوفية لمنطقة القائم في العراق

u(x)	v(x)	Z(x)
25	125	220.04
125	125	220.54
220	125	219.56
325	125	221.26
25	75	220.28
125	75	219.81
225	75	219.3
325	75	219.92
25	25	220.45
125	25	220.96
240	25	220.87
325	25	223.04
0	150	220.
350	0	223.3



الشكل (1): منحني معدل دالة شبه الفاريوكرام

نلاحظ في النموذج –3– عندما $i = j$ $\sigma_1^2 + \sigma_3^2$ تمثل التباين في القطر الرئيسي في مصفوفة التغاير وأن التغاير σ_{ij} $(i \neq j)$ يقل كلما ازداد مربع الإزاحة بين المشاهدات ولهذا يطلق على النموذج –3– بنموذج الانحلال التربيعي Quadratic decay Model (QD) .

تم تقدير المعالم σ_3^2 σ_2^2 , σ_1^2 بواسطة مقدر أصغر معيار تربيعي غير متحيز Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation (MINQUE) .

تم في هذا البحث تقدير المعلمات بواسطة أسلوب بيز الذي سيأتي شرحه بالتفصيل لاحقاً .

صياغة النموذج الخطي العام في الإحصاء الفراغي :

اعتبر المتغير الموقعي $Z(x)$ المعرف في منطقة المدى Domain Region- D والتي هي مجموعة جزئية من فضاء اقليدس R^2 و R^3 كالآتي :

$$Z(x) = \beta' f(x) + e(x)\ ;\ \forall x \in D \qquad \ldots(4)$$

أي $x = (u\ ,\ v)$ اذا كانت في R^2 او $x = (u,v,w)$ اذا كانت في R^3.

$Z(x)$: هي قيمة العملية العشوائية في الحقل العشوائي عند النقطة x .

$F(x)=[f_1(x),f_2(x),\ldots,f_s(x)]'$: هو متجه معلوم من الإحداثيات

β : هي متجه بسعة s من المعالم المجهولة

$e(x)$: متجه عشوائي بتوقع صفر وتباين محدود .

نفرض ان المتغير $Z(x)$ يحقق الفرضيات الاتية :

1. $E(Z(x)) = \beta' f(x)$ $\ldots(5)$
2. $E(Z(x+h) - Z(x))^2 = 2\gamma(h)\ ;\ \forall x, x+h \in D$ $\ldots(6)$

ويكون $2\gamma(h)$ موحد الخواص Isotropic .

3. $\mathrm{cov}(Z(x), Z(x+h)) = c(h) \quad \forall x, x+h \in D$ $\ldots(7)$

افرض أن لدينا n من المشاهدات للمتغير المكاني هي :

$Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n)$ عند المواقع $x_1, x_2, \ldots, x_n$

عندئذ ممكن كتابة النموذج 4 كالآتي :

$$Z = F\beta + e \qquad \ldots(8)$$

اذ ان $Z = (Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n))'$ متجه بسعة n من المشاهدات

$F = (f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n))'$ مصفوفة معلومة بسعة $n{\times}s$

$\beta = (\beta_1, \beta_2,\ldots \beta_s)'$ متجه بسعة s من المعالم المجهولة

$e = (e(x_1),e(x_2),\ldots,e(x_n))'$ متجه الأخطاء العشوائية بسعة n

اعتبر نموذج التغاير المعلمي الآتي :

$$C(h) = C(h;\theta)\,;\ \forall h \in D \qquad \ldots(9)$$

تمثل دالة التغاير وان دالة شبه الفاريوكرام $\gamma(h)$ تكون :

$$\gamma(h) = \gamma(h;\theta)\,;\ \forall h \in D \qquad \ldots(10)$$

حيث ان θ متجه من المعالم المجهولة والمطلوب في هذا البحث تقدير هــذه المعالم من البيانات بطريقة تقدير بيز وفي ضوء دالة التغاير 9 تكون مصفوفة التغاير كالآتي :

$$E(ee') = \sum(\theta) \qquad ..(11)$$

مقدر بيز التربيعي غير المتحيز

Bayesie Quadratic unbiased estimation

نعتبر النموذج المعلمي للتغاير بالشكل الخطي الآتي :

$$C(h;\theta) = \theta_1 u_1(h) + \theta_2 u_2(h) + \ldots + \theta_r u_r(h) \qquad \ldots(12)$$

حيث $U_i(h)$ دوال الارتباط وان $U_i(0)=1$ $\forall\ i = 1, 2, \ldots, r$

وحيــث ان $\theta=(\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_r)'$ متجه من المعالم المجهولة والمطلــوب تقــديرها . هذه المعالم تشكل مركبات التباين ومصفوفة التغـــاير $var(Z(x))= \theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r$ للمتغير Z تحت تأثير النموذج 8 تكتب كالآتي :

$$U = \theta_1 U_1 + \theta_2 U_2 + \ldots + \theta_r U_r = \sum(\theta) \qquad \ldots(13)$$

حيث U_i هي مصـــفوفات معلومة $i=1,2,\ldots,r$

إذاً يكون التباين :

$$\begin{aligned} var(Z) &= \theta_1 U_1 + \theta_2 U_2 + \ldots + \theta_r U_r \\ &= var(e) = \sum(\theta) \end{aligned} \qquad \ldots(14)$$

حيث $U_i = D_i D_i'$ المعادلة 14 هي نفس المعادلة 13 إذاً من العرض السابق نعتبر النموذج الخطي الآتي :

$$Z = F\beta + e$$

$$E(z) = F\beta,\ var(z) = \sum_{1=1}^{r} \theta_i U_i = \sum(\theta) \qquad \ldots(15)$$

ان المصفوفة $\Sigma(\theta)$ هي حالة خاصة من النموذج الــذي اقترحــه Kleffe and Pincus[9]. ان المسألة في تقدير المعالم θ_i تكون بتقدير الدالة الخطية والتــي تأخــذ الصيغة الاتية :

$$\alpha(z) = b_1\theta_1 + b_2\theta_2 + \ldots + b_r\theta_r = b'\theta \qquad \ldots(16)$$

بواسطة الشكل الثنائي $\hat{\alpha}(Z) = Z'CZ$

حيث ان C مصفوفة متماثلة بســعة $n \times n$ مطلوب إيجادها وان $\hat{\alpha}$ تحقق الشروط الآتية:

1. $\hat{\alpha}$ غير قابل للتبــديل Invariant بالنســبة الــى الانتقــال $Z \rightarrow Z+F\beta$ أي ان : $\hat{\alpha}(Z) = \hat{\alpha}(Z + F\beta)$.
2. $\hat{\alpha}$ غير متحيز unbiased
3. تصغير دالة مخاطرة بيز[12]

والآن نفترض وجود دالة توزيع أولي (Apriori Distribution Function) للمعلمة θ وهي $P(\theta)$ وبذلك فان دالة الخسارة تأخذ الصيغة الاتية :

$$L(\alpha, \hat{\alpha}) = (\hat{\alpha} - \alpha)^2$$

وان دالة المخاطرة سوف تأخذ الصيغة :

$$g(\alpha, \hat{\alpha}) = E(L(\alpha, \hat{\alpha})) = E((\hat{\alpha} - \alpha)^2)$$

في حين أن دالة مخاطرة بيز $B(\hat{\alpha})$ تكون على الشكل التالي :

$$\begin{aligned} B(\hat{\alpha}) &= E_\theta(g(\alpha, \hat{\alpha})) = E_\theta(E(\hat{\alpha} - \alpha)^2) \\ &= \int_{\theta\in\Omega} g(\alpha, \hat{\alpha})\, dP(\theta) = \int_{\theta\in\Omega} E(\hat{\alpha} - \alpha)^2\, dP(\theta) \qquad \ldots(17) \end{aligned}$$

بينما مقدر بيز $\hat{\alpha}\beta$ هو مقدر للمعلمة θ والذي يجعل المخاطرة المتوقعــة أو المخاطرة النهائية Posterior Risk أقل ما يمكن

$$B(\hat{\alpha}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} P(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)[\int_{\theta\in\Omega} L(\alpha_1\hat{\alpha})P(\theta / Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)d\theta]dZ_1, \ldots, dZ_n$$

يمكن إيجاد قيمة المقدر وذلك من خلال تقليل قيمــة $E_\theta(g(\alpha, \hat{\alpha}))$ وهــذا يكفي بتقليل قيمة مخاطرة بيز النهائية $Q(\hat{\alpha}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ أي بتقليل :

$$Q(\hat{\alpha}, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = \int_{\theta\in\Omega} L(\alpha, \hat{\alpha})P(\theta / Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)d\theta \qquad \ldots(18)$$

وذلك بحل المعادلة :

$$\frac{\partial Q(\hat{\alpha}, Z_1, Z_2, ..., Z_n)}{\partial \hat{\alpha}} = 0$$

ومنه يمكن إيجاد قيمة مقدر بيز $\hat{\alpha}\beta$.

عند توفر دالة التوزيع الأولي عن المعالم θ_i فان العزم الثاني للمعالم θ_i يأخذ الصيغة الاتية :

$$E(\theta_i\theta_j) = \int_{\theta\in\Omega} \theta_i\theta_j dP(\theta) = C_{ij}\,;\ \forall_{i,j} = 1,2,...,r \qquad ...(19)$$

اذ ان علامة التكامل في العلاقتين 20 و 18 تمثل تكامل متعدد بعدد المعالم الموجودة في المتجه $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)'$

النموذج 8 يحتوي على متجه المعالم المجهولة β والتي ليس هدفنا تقديرها وممكن التخلص منها وذلك بضرب المعادلة 8 بمصفوفة الإسقاط M[3] لذلك يكون لدينا :

$$MZ = MF\beta + Me$$
$$MZ = ME$$

الان نفرض أن $y= MZ$ حيث يكون $E(y)=0$ ولغرض البرهان نلاحظ أن :

$$E(y) = E(MZ) = ME(Z) = MF\beta = 0$$

وكذلك يكون

$$\mathrm{var}(y) = \mathrm{var}(MZ) = M\,\mathrm{var}(Z)M'$$

حيث أن $M=M'$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(y) = M\,\mathrm{var}(Z)M = M\textstyle\sum(\theta)M = M(\sum_{i=1}^{r}\theta_i U_i)M \\ = \sum_{i=1}^{r}\theta_i M U_i M \\ = \sum_{i=1}^{r}\theta_i V_i\end{aligned}$$

حيث $V_i = M\,U_i\,M$ ونتيجه لما تقدم نحصل على النموذج الاتي :

$$Y = Me\,,\ E(Y) = 0\,,\ \mathrm{var}(Y) = \sum_{i=1}^{r}\theta_i V_i = V(\theta) \qquad ...(20)$$

اذ نلاحظ أن $\hat{\alpha} = Z'KZ$ هي [7]Bayesie Quadratic unbiased estimation إلى $\alpha = b'\theta$ في النموذج 16 إذا وفقط إذا $K=MAM$ و $\hat{\alpha} = Y'AY$ هي تقدير ثنائي غير متحيز للدالة α .

شروط التقدير للشكل الثنائي $Y'AY$:

1. عدم التحيز:

أي ان :

$$E(Y'AY)=\alpha=b'\theta$$

البرهان :

$$\begin{aligned}E(Y'AY)=E(\mathrm{tr}\,Y'AY)=E(\mathrm{tr}AYY')&\\ =\mathrm{tr}AE(YY')&\\ =\mathrm{tr}AE(YY')&\\ =\mathrm{tr}A\,\mathrm{var}(y)=\mathrm{tr}A\sum_{i=1}^{r}\theta_i V_i&\\ =\sum_{i=1}^{r}\theta_i\,\mathrm{tr}AV_i&\end{aligned}$$

يكون غير متحيز بالنسبة إلى α إذا وفقط إذا

$$\mathrm{tr}Av_i=b_i\;;\;\; i=1,2,...,r \qquad \dots(21)$$

2. تصغير دالة مخاطرة بيز :

$$\begin{aligned}B(\hat{\alpha})&=\int_{\theta\in\Omega}E(\hat{\alpha}-\alpha)^2dp(\theta)=E\theta(E(\hat{\alpha}-\alpha)^2)\\ &=E\theta(\mathrm{var}(\hat{\alpha}))=E\theta(\mathrm{var}(Y'AY))\\ &=E\theta(2\mathrm{tr}AV(\theta)AV(\theta))\\ &=E\theta(2\mathrm{tr}A\sum_{i=1}^{r}\theta_iV_iA\sum_{j=1}^{r}\theta_jV_j)\\ &=E\theta(2\sum_i\sum_j\theta_i\theta_j\,\mathrm{tr}\,AV_iAV_j)\\ &=2\sum_i\sum_j E(\theta)(\theta_i\theta_j)\mathrm{tr}AV_iAV_j\\ &=2\sum_i\sum_j C_{ij}\mathrm{tr}Av_iAv_j \qquad \dots(22)\end{aligned}$$

المعلومات الأولية التي نحتاج اليها لتقدير متجه المعـــالم $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r)'$ هي العزم الأول $E(\theta)$ والعزم الثاني $E(\theta\theta')$ ومصفوفة العزم الثاني .

$$\left.C=E(\theta\theta')=\mathrm{var}(\theta)+E(\theta)E(\theta')\right\} \qquad \dots(23)$$

$$C = \sqrt{C}\sqrt{C} = RR$$

حيث ان $R = \sqrt{C}$ جذر المصفوفة C

يمكن تمثيل المصفوفة C بالشكل الاتي:

$$C = (C_{ij}) = (\sum_{k=1}^{r} r_{ik} r_{kj}) \qquad \forall_{1,j} = 1,2,...,r \qquad ...(24)$$

نعوض 24 في العلاقة 22 فنحصل على العلاقة الاتية:

$$B(\hat{\alpha}) = 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} r_{ik} r_{kj} trAv_i Av_j$$

$$= 2\sum_{i=1}^{r} trA(\sum_{i=1}^{r} r_{ik} v_i)A(\sum_{j=1}^{r} r_{kj} v_j)$$

$$B(\hat{\alpha}) = 2\sum_{k=1}^{r} trAT_k AT_k \qquad ...(25)$$

حيث $T_k = \sum_{i=1}^{r} r_{ik} v_i$

الآن سوف نستخدم طريقة لاكرانج لحل العلاقة 25 وفقاً إلى شـــروط عـــدم التحيز 21 للحصول على قيمة قصوى صغرى . من أجل ذلك نفرض أن :

$$N = 2\sum_{k=1}^{r} trAT_k AT_k + 4\sum_{i=1}^{r} \delta(trAv_i - b_i) \qquad ...(26)$$

حيث δ_i تمثل مضاريب لاكرانج Lagrange Multipliers[2] ويحقق شروط عدم التحيز 21 .

نشتق العلاقة 26 بالنسبة الى مضاريب لاكرانج δ_i ونساوي المشتقة بالصفر فيكون :

$$\frac{\partial N}{\partial \delta_i} = trAv_i - b_i = 0 \qquad i = 1,2,...,r \qquad ...(27)$$

أي ان :

$$trAv_i = b_i \qquad i = 1,2,...,r \qquad ...(28)$$

ان المعادلتين 27 و 28 بشكل مصفوفات والمجهول فيها المصفوفة A ومضاريب لاكرانج δ_i حيث ان $i=1,2,\dots,r$ ومن أجل حل هذه المعادلات وإيجاد المجاهيل نحول هذه المعادلات من صيغ نظام المصفوفات إلى نظام معادلات خطية ونستخدم من أجل ذلك عملية كرونيكر Kronecker product وعملية المتجه Vec Operation ومن ذلك ينتج :

$$(\sum_{k=1}^{r} T_k \otimes T_k)\operatorname{vec}A + \sum_{i=1}^{r}\delta_i \operatorname{vec}V_i = 0 \qquad \dots(29)$$

$$(\operatorname{vec}V_i)'\operatorname{vec}A = b_i \qquad i=1,2,\dots,r \qquad \dots(30)$$

في العلاقة 29 نفرض أن

$$w = \sum_{k=1}^{r} T_k \otimes T_k$$

إذاً تصبح العلاقة (29) بالصيغة الاتية :

$$w\operatorname{vec}A + \sum_{i=1}^{r}\delta_i \operatorname{vec}v_i = 0 \qquad \dots(31)$$

نلاحظ أنه بصورة عامة يوجد r من المعالم . أي ان $\theta=(\theta_1, \theta_2,\dots, \theta_r)'$.

والآن ممكن صياغة نظام المعادلات الخطية 30 و31 بالشكل الآتي :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \operatorname{vec}v_1 & \operatorname{vec}v_2 & \dots & \operatorname{vec}v_r & w \\ \hline 0 & 0 & & 0 & \operatorname{vec}v_1' \\ 0 & 0 & & 0 & \operatorname{vec}v_2' \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \operatorname{vec}v_r' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_r \\ \hline \operatorname{vec}A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{array}\right) \qquad \dots(32)$$

أما في الحالة التي نتناولها في هذا البحث فيكون عدد المعالم فيها r=3 .

وعندما r=3 فان متجه المعالم يكون بالصيغة الاتية $\theta=(\theta_1, \theta_2, \theta_3)'$.

إذاً يصبح نظام المعادلات 31 و30 كالآتي :

$$w\operatorname{vec}A + \sum_{i=1}^{3}\delta_i \operatorname{vec}v_i = 0 \qquad \dots(33)$$

$$(\operatorname{vec}v_i)'\operatorname{vec}A = b_i \qquad i=1,2,3 \qquad \dots(34)$$

لذلك يمكن صياغة نظام المعادلات الخطية 34 و35 بالشكل الآتي :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{vec}\,v_1 & \mathrm{vec}\,v_2 & \mathrm{vec}\,v_3 & w \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathrm{vec}\,v_1' \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{vec}\,v_2' \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{vec}\,v_3' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \delta_1' \\ \delta_2' \\ \delta_3' \\ \hdashline \mathrm{vec}\,A \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\right) \qquad \ldots(35)$$

ليكن G تمثل مصفوفة النظام 35 وبسعة $(n^2 + 3) \times (n^2 + 3)$

O يمثل متجه المجاهيل في النظام 35 وبسعة $1\times (n^2+3)$

P يمثل متجه الثوابت في النظام 35 وبسعة $1\times (n^2+3)$

وبهذا يمكن صياغة نظام المعادلات 35 بالعلاقة الآتية :

$$GO = P \qquad \ldots(36)$$

والمجهول في العلاقة 36 هو المتجه O وإذا كانت G مصفوفة قابلة للانعكاس (غير شاذة) Non singular فانه يمكن الحصول على حل للنظام 36 حيث يكون بالشكل الآتي :

$$O = G^{-1}P \qquad \ldots(37)$$

ومن خلال إيجاد قيم متجه المجاهيل O والتي تحتوي على δ_i و vec A فانه يمكن إيجاد المصفوفة A والتي من خلالها يمكن الحصول على تقدير المعالم الثلاث $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ من الشكل الثنائي $\hat{\alpha} = Y'AY$ لأنه تقدير غير متحيز للدالة الخطية α.

وحيث أن :

$$\alpha = b_1\theta_1 + b_2\theta_2 + b_3\theta_3 \qquad \ldots(38)$$

إذا وفقط إذا

$$\mathrm{tr}Av_i = b_i \qquad i = 1,2,3$$

راجع شرط عدم التحيز للشكل الثنائي $Y'AY$[6] في نظام المعادلات 38 نضع $b_1=1,\ b_2=b_3=0$ فنجد $\hat{\theta}_1$ وهو تقدير المعلمة θ_1 وكذلك نضع $b_2=1,\ b_1=b_3=0$ فنجد $\hat{\theta}_2$ وهو تقدير المعلمة θ_2 وكذلك نضع $b_3=1,\ b_1=b_2=0$ فنجد $\hat{\theta}_3$ وهو تقدير المعلمة θ_3 . وإذا ما أردنا تقدير آخر مثلاً $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ فاننا نضع في العلاقة 38 كلاً من $b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=1$.

الجانب التطبيقي : تطبيق مقدر بيز التربيعي غير المتحيز

في هذا البحث تم تطبيق أسلوب مقدر بيز التربيعي غير المتحيز على مجموعة من المشاهدات المكانية ارتفاع مناسيب مياه جوفية لمنطقة القائم في العراق اذ تم الحصول عليها من مركز لبحوث السدود والموارد المائية في جامعة الموصل وقد حصلت الباحثة على تقديرات باستخدام طريقة أصغر معيار تربيعي غير متحيز وبالاستناد إلى البيانات الحقيقة كانت $70 \le \hat{\theta}_1 \le 60$ و $1.5 \le \hat{\theta}_2 \le 0.5$ و $0.1 \le \hat{\theta}_3 \le 0.0$ وفي ضوء ذلك فقد اعتبرنا المعلومات الأولية حول المعالم θ_1 و θ_2 و θ_3 تأخذ نمط التوزيع المنتظم الاتي :

$$P_1(\theta_1)\frac{1}{70-60}=0.1 \qquad 60 \le \hat{\theta}_1 \le 70$$

$$P_2(\theta_2)\frac{1}{1.5-0.5}=1 \qquad 0.5 \le \hat{\theta}_2 \le 1.5$$

$$P_3(\theta_3)\frac{1}{0.1-0.0}=10 \qquad 0.0 \le \hat{\theta}_3 \le 0.1$$

$$P_1(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=P_1(\theta_1)P_2(\theta_2)P_3(\theta_3)$$

ان توزيع θ_1 و θ_2 و θ_3 منتظم في الفترات [60,70] , [0.5,1.5] , [0,0.1]

$$\operatorname{cov}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=0$$

$$E(\theta_1)=\frac{70+60}{2}=65$$

$$E(\theta_2)=\frac{1.5+0.5}{2}=1.0$$

$$E(\theta_3)=\frac{0.1+0.0}{2}=0.05$$

$$\operatorname{var}(\theta_1)=\frac{(70-60)^2}{12}=8.33$$

$$\operatorname{var}(\theta_2)=\frac{1}{12}=0.0833$$

$$\operatorname{var}(\theta_3) = \frac{(0.1)^2}{12} = 0.000833$$

$$C = E(\theta)E(\theta') + \operatorname{var}(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} 65 \\ 1 \\ 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65 & 1 & 0.05 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000833 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4225 & 65 & 3.25 \\ 65 & 1 & 0.05 \\ 3.25 & 0.05 & 0.0025 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000833 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4233.33 & 65 & 3.25 \\ 65 & 1.0833 & 0.05 \\ 3.25 & 0.05 & 0.003333 \end{pmatrix}$$

بما أن الجذر التربيعي للمصفوفة C هنا يكون :-

$$R = \begin{pmatrix} 65.056 & 0.99443 & 0.049918 \\ 0.99443 & 0.3073 & 0.00107 \\ 0.049918 & 0.00107 & 0.028989 \end{pmatrix}$$

فقد حصلنا على قيمة تقدير BAQUE للمعالم $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ كما مبين في جدول الاتي:

الجدول -2-: نتائج تقديرات بواسطة مقدر بيز التربيعي غير المتحيز

$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
0.897×10^{-2}	4.27×10^{-2}	-352.69

أما النتائج التي حصلت عليها الباحثة باستخدام طريقة أصغر معيار تربيعي غير متحيز كما مبين في الجدول -3-[1].

الجدول -3-: نتائج تقديرات بواسطة أصغر معيار تربيعي غيرمتحيز

$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$
7.036×10	5.827×10^{-2}	-7.345×10^{-4}

الاستنتاجات :

1. من الملاحظ بأن التقديرات قريبة من بعضها مما يدل على أنه يمكن استخدام أسلوب بيز في تقدير هذه المعالم .
2. نعتقد لو كانت المعلومات الأولية تمثل توزيعات احتمالية غنية المعلومات Informative Priors لكانت النتائج أدق من النتائج التي حصلنا عليها في الجدول-3-

المصادر :

1. جابر ، عدنان شمخي ، ضوية سلمان حسن (1988) ، مقدمة في بحوث العمليات ، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ، جامعة بغداد .
2. عبد الرحمن ، نبال صباح (2001) نموذج تغاير مكاني خطي مع تطبيق رسالة ماجستير غير منشورة ، جامعة الموصل ، موصل ، العراق .
3. يونس (1996) تقدير بيز لدوال التغاير الفراغي بمعلمتين وثلاث معالم رسالة ماجستير غير منشورة ، جامعة الموصل ، موصل ، العراق .
4. Cressie, N. (1993): Statistics for Spatial Data. John Wiley, NewYork.
5. Delfiner, P. (1976): Linear Estimation of Nonstationary spatial phenomena. In: Guarascio, M., David and Huijbregts, C. (Ed.). advances Geostatistics in the Mining Industry Reidel, D. publishing Co. Holland, pp. 49.68.
6. Davies, W.S. (2002) : Quantitative Methods, Bayesian Inference. Progressin Human Geography, Vol. 26, 4, P. 553.
7. Diggle, P. J. (2002): Bayesian Inference in Gaussian Model Geostatistics.Geographical and Enviro Mental Modeling, Vol. 6, 2, P. 129.
8. Hogg, R. V. and Craig A. T. (1978): Introduction to mathematical statistics. Macmillan publishing Co., Inc. New York.
9. Kleffe, J. and Pincus, R. (1974): Bayes and Best Quadratic unbiased Estimators for Parameters of the covariance Matrix

in a Normal Linear Model. Math. Operations forsch. U. Statist., 5, Heft 1, S. 43-67.

10. Krige, D. G. (1976): Some Basic Consideration in the Application of Geostatistics to the valuation of ore in south African Gold Mines, Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy. 383-391.
11. Marshall, R. J. and Mardia, K. V. (1985): Minimum Norm Quadratic Estimation of components of spatial covariance. Math. Geol., Vol. 17, No.5, pp.517-525.
12. Rao, C. R. and Kleffe, J. (1988): Estimation of Variance Components and Application. Worth-Holland, New York.