المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (8) 2005
ص ص [40-62]

مقارنة الطرائق الشرائحية لتقدير منحنى الانحدار اللامعلمي

ظافر حسين رشيد *   خلود يوسف خمو **

الملخـــــص

يهدف هذا البحث الى تناول طرائق متعلقة بتمهيد دوال الانحدار اللامعلمي بهدف ايجاد افضل الطرائق التي تلائم نماذج متنوعة. والى بحث ما قدمته البحوث الحديثة في مجال الانحدار اللامعلمي بهدف إيجاد طرائق بديلة أو محورة تكون كفؤءة في معالجة حالات الإخفاق في الطرائق المتناولة مثلاً لمعالجة حالة الاخفاق في طريقة تقليص الجزاء التي تعتمد على نموذج شريحة الانحدار متعددة الحدود المبتورة لما يتعلق بالنماذج الخاصة تطلبت الحاجة الى اقتراح تحوير للعقد يجعل الطريقة اكثر كفاءة. وقد تمت صياغة نموذج محاكاة ولتوزيعات مختلفة للخطأ العشوائي ولنماذج ومستويات تباين مختلفة. كما تمت صياغة نموذج محاكاة ولنماذج مختلفة، وللتحقق من أداء هذه الطرائق تم استخدام عدة مقاييس.

Comparison of Spline Methods for estimating Nonparametric Regression Curve

ABSTRACT

This research is focusing on methods related to smoothing Nonparametric Regression Functions. This is for the purpose of producing the best methods convenient for various methods. Thus, the most important purpose of the research is to find what the studies so far have offered in the field of Nonparametric Regression. Also to find alternative or modified methods, which are reliable for the treatment of failure regarding the methods in use, for example for the treatment of failure for penalized shrinkage method which depends on truncated Polynomial Regression spline model, especially for special models ,we suggest modification of knots make method more efficiency.

* استاذ/كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة بغداد
** مدرس/ كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة بغداد

تاريخ التسلم : 28/2/ 2005 ــــــــــــ تاريخ القبول : 13/6/ 2005

A simulation model has been performed with different distributions, for a number of methods. To verify the performance of such methods, many criteria have been carried out.

1 . المقدمة وهدف البحث

أن منحنى الانحدار يصف العلاقة العامة بين المتغير التوضيحي x ومتغير الاستجابة y.

$$\mathbf{y_i = g(x_i) + \in_i \qquad i = 1,..., n \qquad ... \qquad (1)}$$

حيث ان الأخطاء العشوائية $\in_i$ تكون غير مرتبطة وتتوزع بوسط حسابي مقداره صفر وتباين σ^2 . ولتقدير g في (1) فان نموذج الانحدار المعلمي يفترض ان شكل g معلوم ماعدا بعض المعالم النهائية غير المعروفة، وبتخصيص اكثر يفترض هناك متجـــــها من المعالم $\underline{\beta}=(\beta_1 \ldots \beta_p)' \in B \subset \Re^p$

إن تقنيات تحليل الانحدار في النماذج المعلمية تمثل طريقة للاستدلال عـــن g إذ تُستخدم النماذج المعلمية عندما توجد معلومات قليلة عن شكل g ، والاســـتدلال عن g معادل للاستدلال عن β وباستخدام طريقة تقدير مناسبة منهـــا المربعـــات الصغرى الاعتيادية OLS أو الامكان الاعظم ML أو أسلوب بيز في حالة توفر معلومات أولية عن المعلمات يتم تقدير المعلمات ثم تقدر g، نتـــائج التقـــدير هـــي منحنى يُختار من عائلة من المنحنيات ليطابق البيانات، الملاحـــظ بـــان النمـــوذج المعلمي يقيد بشروط عديدة لمطابقة الأشكال غير المتوقعة. فالتقييد لــــ g فيمـــا يخص النموذج الأخير يعني إن تكون g بعض الأحيان صارمة، مـــثلا أن تكـــون دورية (Periodic)، قطعا مكافئا (Parabolic)، أو رتيبة (Monotone) وكل واحدة من أعلاه لربما تكون قيوداً تعيق جعل التقدير يلائم دالة الانحدار الصحيحة.

الطريقة الأخرى في مطابقة المنحنيات للبيانات هي تقنيات الانحدار اللامعلمي، وهذه الطرائق تعطي تقديرات إلى ان g تسمح بمرونة عالية في الأشكال الممكنة لمنحنى الانحدار، إذ إن m تعود إلى مجموعة أبعـــاد لا نهائيـــة مـــن الـــدوال والافتراض هو فقط g قابلة للاشتقاق أو قابلة للاشتقاق مع تكامل مربـــع المشـــتقة الثانية. ان طرائق الانحدار اللامعلمي تدخل في تطبيقات مهمة عديدة منها علـــوم

الحاسبات، ومن هذه التطبيقات ما يتعلــق بتمييــز نطــق الكلمــات Phoneme) (Recognition، كما أن طرائق الانحدار اللامعلمي تدخل في معالجة التشــوهات للسطوح المعقدة هندسياً كالأجسام الكرويــة المشــوهة والثقــوب فــي النتــوءات المستديرة. أن المشكلة الخاصة بتمهيد دوال الانحدار اللامعلمي هي إيجاد طريقــة كفوءة تلائم نماذج متنوعة من الدوال كالانحدار غير المتجانس والدوال الخاصة اذ ان معظم الطرائق اللامعلمية تعاني من مشاكل متعددة كأسلوب اختيــار المعلمــة التمهيدية، وكيفية تحديد عدد ومواقع العقد المثلى لما يخص الطرائق الشرائحية كما أن قلة من النماذج المختارة تزود بوصف معقول للبيانــات، فضــلاً عــن افتقــار الأدوات الاستدلالية للعديد من الطرائق الشرائحية واغلبها نظريــة بحتــة وتمثــل مرحلة أولية باتجاه التطوير .

يهدف هذا البحث إلى تناول طرائق متعلقة بتمهيد دوال الانحــدار اللامعلمــي بهدف إيجاد افضل الطرائق التي تلائم نماذج متنوعة ولتوزيع الخطــأ العشــوائي بحالته الطبيعية . كما يهدف الى بحث ما قدمته البحوث الحديثة في مجال الانحدار اللامعلمي بهدف إيجاد طرائق بديلة أو محورة تكون كفوءة في معالجــة حــالات الإخفاق في جانب الطرائق المتناولة مثلاً للتحقق من أداء الاختيــار الفعــال بــين النماذج والذي يعتمد على نموذج انحدار الشرائح متعددة الحدود المبتورة لما يسمى طريقة تقليص الجزاء، وبالنظر لكفاءة الطريقة وحدها بعض الإخفاق فيما يتعلــق بالنماذج الخاصة تطلب الحاجة إلى اقتراح تحوير للعقد يجعل الطريقة اكثر كفــاءة خصوصاً فيما يتعلق بالنماذج الخاصة .

وقد تمت صياغة نموذج محاكاة وللتحقق من أداء هذه الطرائق تم استخدام عدة مقاييس فضلاً عن مقارنة تقارب الطرائق من المنحنى الحقيقي من خــلال رســوم (Plots) التي تعتمد على نتائج مستخلصة من تجارب المحاكاة.

2. الجانــــب النظري

2-1 الطرائق الشرائحيـــــــة

يمكن تعريف النماذج الشرائحية (Spline Models) [5] بأنها نماذج المتغير الوهمي مع واحد أو اكثر من القيود المستمرة، وتتجنب النماذج الشرائحية القطــع غير المناسب لدمج اثنين من خطوط الانحدار كما وتستخدم العقد (Knot) لدمج كل من خط الانحدار الصاعد والنازل وهذا النوع من النماذج الشرائحية يشـــار إليــه بنموذج الانحدار الخطي القطعـــي (Piecewise Linear Regression Model) والذي يتضمن متغيراً توضيحياً مستمراً معرفاً على قطع خاصة من مجال المتغير، أما المتغير المعتمد فهو دالة مستمرة للمتغير التوضيحي حول كل القطع لكن مـــع ميل مختلف لكل جزء منفصل.

تستخدم النماذج الشرائحية عندما يكون خط الانحدار مقسماً إلى عدد من قطع الخطوط مفصولة بواسطة نقاط ربط تســمى عقــد الشــريحة (Spline Knots)، ويغير خط الانحدار اتجاهه عند نقاط الربط هذه، لكنه لا يقفز عند هذه النقاط.

2-1-1 الطريقة الشرائحية مع عقد مكيفة

يمكن تقدير g في (1) باستخدام أدناه.

2-1-1-1 التمهيد الخطي القطعي Piecewise Linear Smoothing

إن طريقة متعددة الحدود القطعية (Piecewise Polynomial) تتفــوق فـــي تحقيق مرونة اكبر لكن على حساب التمهيد الموضعي فالدالة العمومية (Global) تؤخذ لتكون مستمرة ولها مشتقات مستمرة في جميع الرتب كما أن متعددة الحـــدود القطعية تسمح بعدم الاستمرارية عند العقد في مشتقات الرتب الدنيا وأحياناً الدالـــة نفسها، كما أن المساومة بين المرونة والتمهيد مسيطر عليها بواسطة عـــدد العقـــد حيث السماح بعدم الاستمرارية في مشتقة الدرجة الدنيا .

لتقدير g المعطاة في (1) فان :

$$\hat{g}(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{k=1}^{K} a_k b_k(x) \qquad \dots (2)$$

ولعدد ثابت من العقد K اذ الهدف منوضع العقد بحيث نحصل على اقل قيمة ممكنة لمعدل مربع الخطأ ASE (Average Square Error)

حيث
$$ASE = (1/n)\sum_{i=1}^{n}[y_i - \hat{g}(x_i)]^2$$

المعروف أن هناك طرائق عديدة لبناء المطابقة الخطية القطعية التي تقلل ASE والتي تستلزم اختيار مجموعة الدوال الأساسية $b_k(x)\ ,\ 1 \le k \le K$. من (2) فان المعاملات التي عددها (k+1) والتي تقلل ASE نحصل عليها بواسطة المربعات الصغرى لمتغير الاستجابة y على الدالة الأساسية $b_k(x)$، وهناك مجموعات متنوعة من الدوال الأساسية مع خصائص استمرارية مناسبة للمطابقة الخطية القطعية منها $b_k(x) = (x - t_k)^+$ حيث t_k تشير إلى موقع العقد k_{th} والرمز (+) يشير إلى الأجزاء غير السالبة.

كما إن امثلية ASE حول كل المواقع غير المتساوية لـ K من العقد هي مهمة صعبة حسابياً لهذا سيتم اعتبار مجموعات جزئية من المواقع المعرفة على قيم بارزة ومحققة بواسطة مجموعة البيانات، وبسبب العدد الكبير من النماذج يطرح تساؤل هو كيف يتم اختيار النموذج النهائي* بجانب مشكلة تحديد مواقع العقد المثلى، إن ستراتيجية إضافة الخطوات المتسلسلة (Stepwise Addition) تعالج مسالة الاختيار بين النماذج لكنها لا تأخذ بنظر الاعتبار كل النماذج المسموحة بل مجموعة جزئية صغيرة وفيها يتم تحديد العقدة الأولى التي توضع في الموقع الذي يسبب افضل مطابقة خطية قطعية، وبعد تقدير المعاملات باستخدام المربعات الصغرى يتم حساب معامل التحديد ومعامل التحديد المصحح (Adjusted R^2) وبعد تحديد موقع العقدة الثانية يتم اختبار معنوية إضافة متغير جديد للنموذج باستخدام F الجزئية لكل واحد من المتغيرات أي تحسب F_1 و F_2 وتختبر معنوية اقل F جزئية مثلاً إذا كانت $F_{2(1)}$ غير معنوية نحذف X_2 من النموذج ولا نضيف متغير جديد (عقدة جديدة) كذلك يحسب معامل التحديد R^2 ومعامل التحديد المصحح لتفسير نسبة مساهمة مجموعة من المتغيرات في النموذج والى K من العقد،

* الجزء النظري تم وضعه من قبل الباحثة كذلك أسلوب وضع العقد كونها غير مطروقة في البحوث لكن الطريقة ليست مقترحة.

وبسبب وجود سلسلة من النماذج كل نموذج فيه عقدة إضـــافية مقارنـــة بالســـابق ولصعوبة اعتماد النموذج النهائي باعتماد أجراء إضافة الخطـــوات المتسلسلـــــة وحدهـــا لذا يتـــــم اعتمـــــاد معياريـــــن آخريـــــن همـــا ASE و GCV (Generalized Cross Validation) ان طبيعـــة أجـــراء الخطـــوات المتسلسلة الأمامية تجعل معيار GCV بعض الأحيان يزداد في نموذج ثـــم يبـــدأ يتناقص ثانية وهكذا عندئذ يتم التوقف، علماً بان النموذج المختار من سلسلة النماذج هو الذي يقلل معيار GCV حيث:

$$\mathbf{GCV} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\, y_i - \hat{g}_{-i}(x_i)\,]^2 \,/\, [1 - d(K)/n]^2 \quad \dots \; (3)$$

وان $d\,(K)=3K+1$.

2-1-1-2 المطابقة التكعيبية القطعية Piecewise Cubic Fitting [3]

إن المنحنى الخطي القطعي المستمر يزود بمرونة عالية للعـــدد القليـــل مـــن العقد (Knots) فضلا عن تفسير العلاقة الخطية داخل أجزاء المجال لمـــدى X، لكنه يخفق في تحقيق الاستمرارية في المشتقة الأولى والثانية عند كل موقع للعقد.

المشاكل **تلك تقود إلى تناول طريقة المطابقة التكعيبية القطعية والبحث عن تقدير المنحنى اذ ان قيم الدالة ومشتقتها الأولى هي مستمرة دائماً ولا حاجـــة الـــى قيود إضافية وهي استمرار المشتقة الثانية، إن تقدير المنحنى التكعيبي يكون:

$$\hat{g}_c(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \sum_{k=1}^{K} a_k B_k(x) \quad \dots \; (4)$$

أن اتجاه العقد $\{t_{k-}, t_{k+}\}, 1 \le k \le K$ يوضع في منتصف النقاط بين مراكـــز العقد، وبفرض $t_{(1)},\dots,t_{(k)}$ هي مراكز العقد ولقيم تصاعدية فان مواقـــع أطـــراف العقد تكون :

$$t_{(k)-} = (t_{(k)} + t_{(k-1)})/2 \;,\quad t_{(k)+} = (t_{(k)} + t_{(k+1)})/2 \qquad 2 \le k \le K-1$$

إن تقدير المنحنى التكعيبي القطعي في (4) نحصل عليه بواسطة تقليـــل مقيـــاس ASE نسبة للمعاملات $a_0,\dots,a_k$، وتطبق إجراءات المطابقة الخطية القطعية نفسها

** لمزيد من التفاصيل حول المشاكل الخاصة بالتمهيدالخطي القطعي راجع المصدر (1).

لتقدير (2) وهي اختبار معنوية إضافة متغير جديد واستخراج معامــل التحديــد R^2 والتحديد المصحـــــح (Adjusted R^2) واختيار النموذج الذي يقلــل GCV وذلك بهدف الوصول للنموذج النهائي.

2-1-2 طريقة الجزاء غير الممهد [4] Roughness Penalty

ان النموذج (1) فان أحد الطرائق الشائعة لتقدير g هي من خــلال الانحــدار الخطي البسيط والتقديرات هي بالتتابع الحد الثابت (Intercept) $\hat{a}$ والميل الحدي (Slope) $\hat{b}$ لكــن الطريقة تكون فعالة إذا كان g تقريباً خطيا.

الجدير بالذكر ان المطابقة الناجحة لمجموعة بيانات تتطلــب تبــديل التقــدير الأصلي وان يتم تقليل RSS(g) حول الدوال g مع ميل يختلف باختلاف التصميم، إن تقدير منحنى الانحدار بطريقة الجزاء غير الممهدة يكون بإعطاء أية دالة g قابلة للاشتقاق مرتين ومعرفة على المجال [a, b] وذات معلمــة تمهيديــة $\alpha > 0$، اذ تعرف مجموع مربعات الجزاء كالآتي:

$$\mathbf{S(g) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - g(x_i)]^2 + \alpha\int_a^b [g''(t)]^2\, dt} \quad \dots \ (5)$$

أما مُقــدّر المربعات الصغــرى الجزائيــة (Penalized Least Squares Estimator) $\hat{\mathbf{g}}$ فيعرف بأنه تقليل S(g) حول صف من الدوال g القابلة للاشتقاق مرتين، وان مصطلح الجزاء غير الممهد $\alpha \int g''^2$ يؤكد أن S(g) محــددة لــيس بواسطة جودة التطابق للبيانات المقاســة بواســطة مجمــوع مربعــات البــواقي $\sum_{i=1}^{n}[y_i - g(x_i)]^2$ لكن بواسطة $\int g''^2$ غير الممهــد، علماً ان معلمة التمهيد α تمثل نسبة التغيير بين خطأ البواقي والاختلاف الموضعي، والكمية تعطى في مصطلح مجموع مربعــات خطأ البواقي وفقاً إلى وحدة تكامل مربع المشتقة الثانية.

بفرض أن g هي شريحة تكعيبية طبيعية NCS (Natural Cubic Spline) وبفرض ان المتجهات

$$\underline{y} = (y_1 \dots y_n)' \ ; \ \underline{g} = (g_1 \dots g_n)' ; \underline{\gamma} = (\gamma_2 \dots \gamma_{n-1})'$$

هي الشرط الضروري والكافي للمتجهات لتمثل NCS* بإعطاء سلسلة العقد هــو الاعتماد على مصفوفتي الحزمة R , Q واللتين تعرفان كالآتي :

$$q_{j-1,j} = h^{-1}_{j-1} ; q_{jj} = -h^{-1}_{j-1} - h^{-1}_{j} ; q_{j+1,j} = h^{-1}_{j} \quad , \; i = 1,\dots,n \quad , \; j = 2,\dots,n-1$$
$$q_{jj} = 0 \qquad \forall\, |i-j| \;\geq\; 2$$

$$r_{ii} = (1/3)(h_{i-1} + h_i) \quad , \; i = 2,\dots,n-1 ; \; r_{i,i+1} = r_{i+1,i} = (1/6)h_i \quad , \; i = 2,\dots,n-2$$
$$r_{ij} = 0 \qquad \forall\, |i-j| \;\geq\; 2 \qquad \dots(6)$$

حيث ان Q : مصفوفة من درجة ((n-2)×n) للمتغيرات التوضيحية.

R : مصفوفة متماثلة موجبــة قطعــاً مــن درجــة (n-2)×(n-2) للمتغيــرات التوضيحية.

وبالتعويض عن $\underline{\gamma}$ R= $Q'\,\underline{g}$ =R $\underline{\gamma}$ نحصل على صيغة الى $\underline{g}$ وفقاً الى $\underline{\gamma}$, $\underline{y}$ كالآتي :

$$|r_{ii}| > \sum_{j\neq i} |r_{ij}| \qquad \forall\, i \qquad ; \; h_i = x_{i=1} - x_i \quad , \quad i = 1,\dots,n-1$$

$$\underline{g} = \underline{y} - \alpha Q \gamma \qquad \dots \;(7)$$

اختيارات المعلمــــة التمهيـــــدية

1. مقياس CV (Cross Validation)

ان الفكرة الأساسية للمقياس هي اختيار قيمة α التي تقلل $CV(\alpha)$ حيث ان

$$CV(\alpha) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{g}^{(-i)}(x_i ; \alpha) \right)^2 \qquad \dots \;(8)$$

يلاحظ من (8) بأنه من الضروري حل n من مســائل التمهيــد لإيجــاد n مــن $\hat{g}^{(-i)}$ منحنيــات وان قيم الشريحة الممهدة (Smoothing Spline) تعتمد خطياً علــى البيانات y_i خلال المعادلة $\underline{g} = A(\alpha)\,\underline{y}$، أن مقياس CV يحقق:

$$CV(\alpha) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(y_i - \hat{g}(x_i) \right) / \left(1 - A_{ii}(\alpha) \right) \right]^2 \qquad \dots \;(9)$$

* للتعرف على شروط NCS راجع المصدر (1) .

حيث أن $\hat{g}$ ممهد الشريحة (Spline Smoother) ويُحسب من مجموعة البيانات الكاملة $\{(x_i,y_i)\}$ مع معلمة تمهيدية α، بشرط ان تكون العناصر القطرية $A_{ii}(\alpha)$ معلومة.

2. مقياس GCV (Generalized Cross-Validation)

وفيه يتم إبدال $1-A_{ii}(\alpha)$ بمعدل القيمة $1-n^{-1}\,tr\,A(\alpha)$ حيث

$$GCV(\alpha) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}[y_i-\hat{g}(x_i)]^2/[1-n^{-1}\,tr\,A(\alpha)]^2 \quad \dots (10)$$

3-1-2 طريقة الجزاء غير الممهد مع اقتراح لاختيار المعلمة التمهيدية

إن المشكلات التي تواجه الباحثين تبرز من خلال الجانب التجريبي أو التطبيقي وبذلك تتولد الحاجة في محاولة البحث عن بدائل لعلها تكون اكثر كفاءة، وبالنظر للصعوبات التي واجهت تطبيق طريقة الجزاء غير الممهد المتمثلة بكون الاختيارات الكلاسيكية للمعلمة التمهيدية $GCV(\alpha)$،$CV(\alpha)$ ، Mallows's C_p لا تعطي نتائج مرضية والتي تنتج تقديراً غير ممهد لمنحنى الانحدار لبعض نماذج الدوال، وكما لوحظ من الاستعراض المرجعي فان المشكلة الرئيسة لمعظم البحوث الخاصة بجانب الانحدار اللامعلمي تتمثل بصعوبة اختيار المعلمة التمهيدية، وقد تمت محاولة معالجة الاختيارات الكلاسيكية ولحالة الأخطاء العشوائية التي تتوزع بشكل مستقل ولها التوزيع iid نفسه وبما أن هدف التمهيد هو اختيار القيمة المثلى للمعلمة التمهيدية والتي تقلل C_p وهذا الاختيار إلى α والمذكور أدناه له بعض التقدم مقارنة مع النوع الكلاسيكي

حيث الاختيار التقريبي إلى $\hat{\sigma}^2$ هو

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}[y_i-\hat{g}(x_i;\alpha)]^2/[n-tr\,2S(\alpha^*)]$$

وأن α^* هي القيمة الصغرى إلى α أما مصفوفة hat فهي $S(\alpha) = Q(R+\alpha\,Q'Q)^{-1}Q'$ كما إن $ASR(\alpha)$ معدل مربع الخطأ، أو بواسطة مقياس $GCV(\alpha)$ المعدل وكالآتي

$$\text{Modified}\,C_p(\alpha) = ASR(\alpha) + 2tr\,S(\alpha)\,\hat{\sigma}^2/n \quad \dots (11)$$

$$\text{Modified}\,GCV(\alpha) = ASR(\alpha)/[1-tr\,S(\alpha)/n]^2 \quad \dots (12)$$

4-1-2 طريقة تقليص الجزاء[7] Penalized Shrinkage

تعتمد الطريقة على استراتيجية فعالة للاختيار بين كل النماذج الممكنة باعتماد نموذج شريحة الانحدار متعددة الحدود المبتورة (Truncated Polynomial Regression Spline Model)، وللنموذج $y_i = m(X_i)+v(X_i)^{1/2}\in_i$ حيث y متجه متغير الاستجابة، X مصفوفة المتغير التوضيحي وان X_i أما ان تكون أعداد حقيقية أو عينة عشوائية لتوزيع أحادي المتغيرات، و v(x) دالة أحادية موجبة، و $\in_i$ متجه الاخطاء العشوائية وله متوسط صفر وتباين واحد .

ان تقدير m(x) يمكن أن يوضع بالشكل الاتي:

$$\hat{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\alpha\mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}'\underline{\mathbf{y}} \qquad \dots \ (13)$$

حيث X : مصفوفة التصميم $(n \times (K + p + 1))$ وهي بتعريفها السابق نفسه.

D : مصفوفة قطرية $(K + p + 1) \times (K+ p + 1)$ علماً أن أول $p + 1$ من

$$\mathbf{X} = [\ 1,\ x\ ,\ x^2 ,\dots\ ,\ x^p\ ,\ (x-\kappa_1)_+^p\ ,\dots,\ (x-\kappa_k)_+^p\ ]$$

عناصرها أصفار و K من العناصر الباقية قيمها واحد.

$(u)_+^p = u^p\, I(u \geq 0)$ والقوة الأساسية المبتورة هي من الدرجة p .

κ_k : العقد (Knots) وتقع ضمن مدى x_i بسبب أنها وفقاً للنقاط المشتركة لمتعددات الحدود القطعية التي تنتج من التوفيق الخطي للدالة الأساسية.

إن زيادة درجة p ستؤدي إلى حالة التعدد الخطي لذا يتم بتر القوى وتستخدم $p = 3$ أي الأساس التكعيبي المبتور إذ ثبت بأنها ذات مشتقة أولى وثانية مستمرة اما اختيار العقد للنموذج فيكون وفقاً للقاعدة الاتية:

$$\kappa_k = (x_{(dk)} + x_{(dk+1)})\ /2 \qquad k = 1,\dots,K$$

وان $K = [n / d - 1]$, $d = \max [4,(n / 35)]$ هذا التخصيص يشير إلى وجود على الأقل d من المشاهدات بين كل عقدة، وفيما يلي مقاييس لاختيار α:

1. مقياس C_p

وهذا المقياس افترضه Mallows حيث :

$$C_p(\alpha) = RSS(\alpha) + 2\hat{\sigma}^2\ tr[\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\alpha\mathbf{D})^{-1}] \quad \dots\ (14)$$

ان $\hat{\sigma}^2 = RSS(0) / (n - K - p - 1)$ ، $RSS(\alpha)$ مجموع مربعات البواقي إلى $\hat{m}(\alpha)$.

2. مقياس GCV* (Generalized Cross-Validation)

ويأخذ هذا المقياس الشكل :

$$\mathbf{GCV}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{g}(x_i))^2 / (n - tr(H))^2 \qquad \dots (15)$$

وان $H = X [X'X + \alpha D'D]^{-1}X'$، أيضاً تُختار α المقابلة لإصغر $GCV(\alpha)$.

1-4-1-2 مقتـــرح تقسيـــم العقـــد لطريقة تقليص الجزاء

من خلال استعراض معظم البحوث الخاصة بشريحة الانحـدار لـوحظ أن المشكلة الرئيسة للطرائق الشرائحية هي تحديد عدد ومواقع العقد المثلى والتي هي الخطوة الأصعب لذا تم اقتراح تقسيم للعقد لطريقة تقليص الجـزاء لـتلائم اغلـب النماذج المدروسة ولتحقق نتائج افضل مقارنة مع الطريقة قبل التحـوير المقتـرح للعقد، ومن خلال التجريب في عملية اختيار العقد تم الأخذ بنظر الاعتبـار عـدم الزيادة الكبيرة في عدد العقد الذي يؤدي إلى جعل التباين الموضعي عاليا حيث ان:

$$\mathbf{K = max\,[n / 3.5\ ,\ \ 10\,]\,,\ d = min[3, (n/10)]}$$

وان

$$\kappa_k = \left(x_{(dk)} + x_{(dk+1)}\right) / 2$$

علماً أن هذا التخصيص يؤكد بأنه على الأقل يوجد d من المشاهدات بين كل عقدة، وان تفاصيل التقدير هي حسب ما مذكورة ببحث Wand (2000) علماً بان أفضلية التقسيمات للعقد تمت من خلال التجريب في جانب المحاكاة.

5-1-2 الخطوات المتسلسلة Stepwise POLYMARS [2، 5،6] لاختيار العقد

* المقياس تم وضعه من قبل الباحثة خلود (2004) المصدر (1) .

لتوضيح خطوات خوارزمية شرائح الانحدار المكيفة المتعددة الأبعاد المتعددة الحـــــــدود POLYMARS (Polynomial Multivariate Adaptive Regression Splines) والخوارزمية لها بعد أحادي للانحدار اللامعلمي كحالـــة خاصة ، يفترض النموذج ما ياتي $\underline{y} = X_c \underline{\beta}_c + \in$

حيث: $\underline{y}$ متجه $(n\times1)$ لمتغير الاستجابة.

$\underline{x}_j$ متجه $(n\times1)$ ويتضمن قيم المتغير التوضيحي j_{th} وان الأعمدة X_c هي جزء من x_j.

$\underline{\in}$ متجه $(n\times1)$ للأخطاء العشوائية وله متوسط صفر وتباين σ^2.

1. البدء مع مجموعة جزئية من الدوال الأساسية والتي تسمى الـــدوال الأساســـية الأقل لتكون دوالاً أساسية حالية، ولتقدير $g(x)$ المعطى في النموذج (1) فان

$$\hat{g}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_q x^q + \sum_{m=1}^{M} \beta_m B_{mj}(x) \quad \dots (16)$$

$$B_{mj}(x) = (x_m - \tilde{x}_{mj})_+ \, , \; 1 \le j \le J_m$$

$$X = [1 \; x \;\; x^2 \;\; x^3 \, B_1(x) \dots B_m(x)] \; , \; \underline{\beta} = [a_0 \; a_1 \; a_2 \; a_3 \;\; \beta_1 \;\; \dots \beta_m]'$$

حيث ان $1 \le m \le M$ و J_m عدد صحيح، إن الدالة الأساسية الاضافية تأخذ الشكل حيث ان $\tilde{x}_{mj}$ موقع العقدة، وقد تم استخدام أساس الشريحة التكعيبية الطبيعية حيث وان $n=m+4$، $B_i(x)=\min(x,x_i)$.

2. إضافة الخطوات المتسلسلة Stepwise Addition

تعاد الخطوات حتى تصبح الدوال الأساسية الحالية دوالاً أساسية كاملة.

i. تضاف إلى الدالة الأساسية الحالية ومن بين الدوال غير الحالية الدالة الأساســـية التي لها اكبر قيمة مطلقة لاحصاءة Rao.

ii. مطابقة النموذج مع دوال أساسية جديدة باستخدام تقديرات المربعات الصـــغرى ومقياس GCV للمطابقة.

3. حذف الخطوات المتسلسلة Stepwise Deletion

تعاد الخطوات حتى تصبح الدوال الأساسية الحالية دوالاً أساسية اقل.

i. تحذف من الدالة الأساسية الحالية ومن بين جميع الدوال الأساسية الحالية الدالة التي لها اقل قيمة مطلقة لاحصاءة Wald.

ii. مطابقة النموذج مع دوال أساسية جديدة باستخدام تقدير المربعات الصغرى ومقياس GCV للمطابقة.

يكون للتقدير النهائي اقل GCV من بين كل النماذج المتطابقة في العمليات أعلاه.

إن إحصاءة Rao وفقاً إلى x_k التي ليست في X_c تأخذ الشكل الاتي:

$$\mathbf{R_k = [\underline{x}'_k (1-H_c)\underline{y}] / \sqrt{\underline{x}'_k (1-H_c)\underline{x}_k}} \quad \dots (17)$$

حيث $H_c = X_c (X'_c X_c)^{-1} X'_c$ مصفوفة Hat وفقاً للنموذج الحالي أما احصاءة Wald لحذف العمود j_{th} من X_c فهي

$$\mathbf{W_j = [(X'_c X_c)^{-1} X'_c \underline{y}]_j / \sqrt{[(X'_c X_c)^{-1}]_{jj}}} \quad \dots (18)$$

إن (17) مطابقة لاحصاءة t لتقدير المربعات الصغرى إلى $\underline{\beta}_j$. أما مقياس GCV فيعطى بالشكل

$$\mathbf{GCV = n^{-1} RSS_J / [1 - a(J-1)/n]^2} \quad \dots (19)$$

حيث RSS مجموع مربعات البواقي، J عدد الحدود في النموذج، a المعلمة وتؤخذ مساوية إلى 2.5.

3. الجانب التجريبي

يتم اللجوء الى تجارب المحاكاة في الحالات التي يصعب الحصول فيها على بيانات واقعية ودقيقة تحاكي معظم النماذج المستخدمة، كذلك عندما يعجز البرهان الرياضي عن بيان أفضلية طرائق معينة، وقد تم تنفيذ تجارب المحاكاة على ثلاثة حجوم لعينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة وهي n=50 و n=100 و n=200 وبواقع 630 تجربة وبتكرار 500 لكل تجربة محاكاة وكالآتي:

i. توليد المتغير التوضيحي X بتوزيع منتظم $X\sim U(0,1)$ بالاستناد إلى طريقـــة Box-Muller والتي تعتمد على أسلوب توليد متغيـــرين عشـــوائيين U_1 , U_2 يتبعان التوزيع المنتظم $U(0,1)$.

ii. الخطأ العشوائي ويتم توليده ليتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط صفر وتباين σ^2 أي $\in\sim N(0,\sigma^2)$.

iii. المتغير المعتمـــــد <u>y</u> ويتم توليده من خلال النمـــاذج المستخدمـــــــــــــة فـــــي تجـــــارب المحاكـــاة وذلـــك باستخدام المتغيرات التوضيحية التي تم توليدها في الفقرة i، مضافاً إليها الأخطاء العشوائية المولدة في الفقرة ii، ولكل نموذج من النماذج المدروســــــة.

1-3 النماذج المستخدمة في تجارب المحاكاة

هناك عدد كبير من النماذج التي لا يمكن تناولها جميعها في آن واحـــد فـــي تجارب المحاكاة نظراً لما تتطلبه من الجهد والمساحة الواسعة وقـــد حاولنـــا قـــدر المستطاع أن تكون النماذج المتناولة متنوعة لتلائم جميع الحـــالات وقـــد أخـــذت النماذج من بحوث منشورة كالآتي:

1. النموذج غير الخطي وصيغته هي $y=\sin(2\pi x^3)$
2. النموذج الخاص (تغير حيزي واطئ في التذبذب) وصيغته هي

$$\mathbf{y}=\sqrt{\mathbf{x(1-x)}}\ \mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{2\pi(1+2^{(9-4j)/5})}}{\mathbf{x+2^{(9-4j)/5}}}\right)\qquad\qquad \mathbf{j=3}$$

3. النموذج الخاص بدالة الانحدارغير المتجانسة وصيغته

$$y=\exp(-400(x-0.6)^2)+(5/3)\exp(-500(x-0.75)^2)+2\exp(-500(x-0.9)^2)$$

2-3 تنفيذ تجارب المحاكاة لطرائق الانحدار اللامعلمي

لكل نموذج من النماذج المدروسة تم عمل ما يأتي :

1. توليد المتغير التوضيحي X ليتوزع توزيعاً منتظماً $U(0,1)$ مـــع أخطـــاء عشوائية تتبع توزيعاً طبيعياً .
2. بالنسبة الى طرائق الشرائحية تم اعتماد عدة معايير لاختيار معلمة التمهيـــد منها اعتماد معيار GCV للطريقة الشرائحية مع عقد مكيفة والمشار اليه في

(3)، أما طريقة الجزاء غير الممهد والجزاء غير الممهد مع معلمة تمهيد مقترحة فاعتمدت المعايير الاتية $GCV(\alpha)$ و $Modified\ C_p(\alpha)$ و $Modified\ GCV(\alpha)$ والمذكورة في (10) و (11) و(12) وعلى التوالي، في حين اعتمد معياري $GCV(\alpha)$ و $C_P(\alpha)$ بالنسبة الى طريقة تقليص الجزاء والمذكورة في (15) و (14) وعلى التوالي، أما طريقة تقليص الجزاء مع عقد مقترحة تم اعتماد المعيار المقترح $GCV(\alpha)$ والمعطى في (15) علماً بأنه تم اختيار α المقابلة لاصغر $GCV(\alpha)$، $C_P(\alpha)$ بالنسبة للطرائق المشار اليها كذلك اعتمد معيار GCV والمشار اليه في (19) بالنسبة الى طريقة Stepwise POLYMARS.

3-3 تجارب المحاكاة

تم تحليل نتائج المحاكاة لكل نموذج وقد تم تفسير اغلب النماذج وكذلك الرسوم بالاعتماد على معيار تكامل مربع الخطأ ISE (Integrated Squared Error) الذي تعتمده اغلب البحوث كونه يأخذ ما بين النقاط عند التقدير وكما ياتي:

النموذج الأول

يلاحظ أن طريقة تقليص الجزاء للنموذج غير الخطي باعتماد التقسيم المقترح للعقد هي الأفضل والأقل تذبذباً تليها طريقة تقليص الجزاء ثم الخطوات المتسلسلة Stepwise POLYMARS ثم الجزاء غير الممهد، مع معلمة تمهيدية مقترحة والجزاء غير الممهد والأخيرة تعاني من تذبذب في الحدين بينما نجد أن التذبذب قد قل وبشكل واضح عند استخدام معلمة تمهيدية مقترحة، والمنحنى الأسوأ كان للطريقة الشرائحية باعتماد عقد مكيفة إذ نجد أن الطريقة تسلك سلوكاً غير جيد عند الحدين ولاسيما الحد الأيسر لكن تحسناً واضحاً طرأ على طريقة الخطوات المتسلسلة إذ زال التذبذب عند الحدين وكانت قريبة من النموذج غير الخطي ويمكن ملاحظة ذلك في الشكلين (2) و(3)

النموذج الثاني

في النموذج الخاص (التغير الحيزي الواطئ في التذبذب) (Low Spatial Variability of Oscillation) يتضح من الجدول (2) انه

يمكن ملاحظة أن طريقة تقليص الجزاء مع عقد مقترحة اكثــر كفـــــــاءة تليهــا طريقة الجزاء غير الممهد مع معلمة تمهيدية مقترحة ثم تقليص الجزاء والخطوات المتسلسلة Stepwise POLYMARS والجزاء غير الممهد، الطريقة الشـــرائحية باستخدام عقد مكيفــة هي الاسوأ إذ نجد بان المنحنى الخاص بها يعاني من تذبذب كبير في الذيول أي أنها غيــر قادرة علـــى تبنـــي النماذج الخاصة، وبالمقارنة مع الطريقة الشرائحية التي تعتمد على أسلوب الخطوات المتسلســـة نجــد تحســناً واضحاً في طريقة الخطوات المتسلسلة باستثنــاء بعض التذبذب بالقرب من الحــد الأيسر، كذلك يلاحظ تذبذب عاليا لاسيما عند الحد الأيمن في المنحنـــى الخـــاص بطريقة الجزاء غير الممهد لكن التذبذب قل بشكل واضح عند اعتمــاد معلمـــــة تمهيديـــة مقترحة للطريقة بدلاً من مقياس CV وGCV، أما تقدير تقليص الجزاء باستخدام عقد مقترحـــــة فكان الأقرب للمنحنـــى الحقيقـــي ويمكـــن ملاحظـــــة ذلك مـــن الشكلين (5) و (6).

النموذج الثالث

النموذج هو دالة الانحدار غيـــر المتجانســـة (Heterogeneous Regression Function)، مـــن الشكلين (8) و(9) نجد تذبذباً عاليـــاً فـــي التقـــدير الخـــاص بالطريقة الشرائحية مع عقـــد مكيفة، ويلاحظ أن إنجاز طريقة الخطوات المتسلسلة Stepwise POLYMARS تحسن وبشـــكل واضـــح، أي أن اســـتخدام أســـاس الشريحة الطبيعية التكعيبية أدى إلى التخفيف من حدة التذبذب، كذلك نجد أن كـــلا من طريقة تقليص الجزاء باعتماد عقد مقترحة والجزاء غير الممهد مـــع معلمـــة تمهيدية مقترحة تسلك سلوكاً جيداً عند الحد الأيسر والأيمن إذ لم يظهر التذبذب.

4. الاستنتاجات

في ضوء تحليل تجارب المحاكاة يمكن أدراج اهم الاستنتاجات وكما ياتي:

1. أخفقت الطريقة الشرائحية مع عقد مكيفة ولحالتي الشريحة الخطيـــة والتكعيبيـــة فـــي التقارب من المنحنى الحقيقي لمعظم النماذج المدروسة عدا النموذج الخطي اذ أعطت الشريحة الخطية نتائج افضل من الشريحة التكعيبية.

2. أعطى التحوير المقترح للعقد لطريقة تقليص الجزاء نتائج افضل منها قبــل التحــوير لمعظم النماذج وحتى الخاصة كنموذج التغير الحيزي الواطئ في التذبذب ونمــوذج الانحدار غير المتجانس إذ أن طريقة اختيار عدد ومواقع العقد تعتبر مــن المشــاكل الرئيسة لمعظم الطرائق الشرائحية التي ما زالت في طور البحث، لكن تبقى طرائــق تقليص الجزاء غير قادرة على تبني النماذج الخاصة والسـبب يعــود إلــى التقييــد الحاصل في اختيار نموذج مرتبط بمعلمة أحادية.
3. لوحظ أن المقترح المقدم لاختيار المعلمة التمهيدية لطريقة الجزاء غير الممهد أعطــى نتائج افضل من اختيارات المعلمة التمهيديــة بواســطة المقياســين CV و GCV ولمعظم النماذج المدروسة.
4. أظهرت طريقة الخطوات المتسلسلة Stepwise POLYMARS Stepwise تفوقــاً واضحاً لمعظم النماذج بالمقارنة مع الطريقة الشرائحية والسبب يعود إلــى اســتخدام أساس الشريحة الطبيعية والتي تفرض قيوداً خطية عند الحدود وبذلك اقتربــت مــن مقدّرات بيز هذا فضلاً عن إمكانية التوسع في استخدام طريقة الخطوات المتسلســلة لحالات متنوعة كبيانات الاستجابة الثنائية مثلا.

5 . التوصيـــــــات

بناءً على ما تم التوصل إليه من استنتاجات أدناه أهم التوصيــات :

1. نوصي باستخدام أساس الشــريحة التكعيبيــة الطبيعيــة (Natural Cubic Spline Basis) والتي تنجز بشكل افضل من الشريحة (الخطية والتكعيبية) متعــددة الحــدود (Polynomial Spline) لحالة الطرائق الشرائحية.
2. بالنظر لكون طريقة تقليص الجزاء لم تستطع تبني النماذج الخاصة كنموذج الانحــدار غيرالمتجانس ونماذج التغير الحيزي الواطئ والصارم فــي التذبــذب، لــذا نوصــي بالابتعــاد عنها لهذا **النوع من النماذج**.
3. بالنظر لأهمية طرائق الانحدار اللامعلمي كونها تدخل في تطبيقات عديدة لذا نوصــي باستخدام هذه الطرائق في دراسة تطبيقيــة لتمييــز نطــق الكلمــات (Phoneme Recognition) التي تربط الإحصاء كدراسة نظرية بتطبيقات علوم الحاسبات.

6. المصـــــــــادر

1. خمو، خلود يوسف ، (2004) " **مقارنة أساليب بيـــــــــز مع طرائق أخرى لتقـــدير منحنى الأنحدارالل‌امعلمي** " أطروحة دكتوراه في الاحصاء ،كليـــة الادارة والاقتصـــاد، جامعة بغداد.

2. Friedman, J.H., (1991), "Multivariate Adaptive Regression Splines", ***The Annals of Statistics,*** Vol. 19, 1-141.
3. Friedman, J.H. & Silverman, B.W., (1989), "Flexible Parsimonious Smoothing and Additive Modeling", ***Technometrics,*** Vol. 31, 3-21.
4. Green, P.J. & Silverman, B.W., (1994), " ***Nonparametric Regression and Generalized Linear Models : A Roughness Penalty Approach***", Chapman & Hall, London.
5. Marsh, L.C. & Cormier, D.R., (2002), "***Spline Regression Models***", Sage University Papers Series on Quantitative Applications in the Social Sciences Series no.07-137, Thousand Oaks, CA: Sage.
6. Stone, C.J., Hansen, M.H., Kooperberg, C. & Truong, Y.K., (1997), " Polynomial Splines and their Tensor Products in Extended Linear Modeling", ***The Annals of Statistics,*** Vol. 25, 1371-1470.
7. Wand, M.P., (2000), " A Comparison of Regression Spline Smoothing Procedures", ***Compu. Statist.,*** 443-462.

الجدول (1): الطرائق اللامعلمية (الطرائق الشرائحية، الجزاء غير الممهد، تقليص الجزاء، الخطوات المتسلسلة) وللنموذج الأول

The Method	S. Size	σ=1/ 2		σ=1/ 4		σ=1/ 8	
		MASE	ISE	MASE	ISE	MASE	ISE
Linear Spline With adap. knot	50	0.89060	0.44663	0.66447	0.44404	0.59849	0.43115
	100	1.11905	0.52177	0.88133	0.50804	0.65585	0.50374
	200	1.65275	0.66208	1.64836	0.59614	1.42262	0.58284
Cubic Spline With adap. Knot	50	0.73893	0.31491	0.66656	0.31667	0.65489	0.31510
	100	1.38038	0.35034	1.19540	0.34529	0.88751	0.33673
	200	2.43258	0.37349	1.65907	0.35701	0.95720	0.34803
Stepwise POLYMARS	50	0.18077	0.10305	0.15472	0.10009	0.13154	0.09513
	100	0.22511	0.11061	0.19133	0.10025	0.16321	0.08877
	200	0.27263	0.10027	0.22241	0.10137	0.20907	0.08455
Roughness Penalty	50	0.12622	0.13679	0.10620	0.11326	0.10040	0.10704
	100	0.10691	0.11306	0.09676	0.10524	0.09047	0.10498
	200	0.10031	0.10767	0.09214	0.10251	0.09201	0.10143
Penalty with Su. Smoothing Parameter	50	0.11432	0.11511	0.10233	0.10438	0.09154	0.09722
	100	0.10422	0.11203	0.09865	0.10212	0.08351	0.10200
	200	0.09503	0.10429	0.08424	0.09703	0.07722	0.09322

Penalized Shrinkage	50	0.09499	0.10238	0.07468	0.08630	0.07127	0.07317
	100	0.05962	0.06263	0.04833	0.05177	0.04184	0.04540
	200	0.03382	0.03807	0.02794	0.02832	0.02413	0.02395
Penalized Shri. with Sugg. Knot	50	0.06739	0.07660	0.04002	0.05388	0.02948	0.03817
	100	0.04037	0.04391	0.02575	0.02902	0.01798	0.02254
	200	0.02334	0.02364	0.01494	0.01545	0.01070	0.01048

الجدول (2): الطرائق اللامعلمية (الطرائق الشرائحية، الجزاء غير الممهد، تقليص الجزاء، الخطوات المتسلسلة) وللنموذج الثاني

The Method	S.Size	σ=1/2		σ=1/4		σ=1/8	
		MASE	ISE	MASE	ISE	MASE	ISE
Linear Spline With adap. Knot	50 100 200	0.96567 0.93909 1.04954	0.44061 0.39885 0.37200	0.91674 0.85543 0.93646	0.42996 0.39676 0.38126	0.74168 0.69885 0.77634	0.42655 0.38907 0.36803
Cubic Spline With Adap.Knot	50 100 200	0.90342 0.85127 0.91648	0.43093 0.37678 0.36211	0.85581 0.82569 0.87414	0.41313 0.36140 0.35346	0.68679 0.65338 0.60976	0.37975 0.36084 0.35569
Stepwise POLYMARS	50 100 200	0.29491 0.25659 0.27730	0.20218 0.18701 0.16197	0.26253 0.25617 0.26482	0.18333 0.16346 0.14477	0.25516 0.24043 0.26123	0.17100 0.14517 0.14364
Roughness Penalty	50 100 200	0.20719 0.17574 0.15375	0.25606 0.21407 0.19366	0.19261 0.17323 0.12623	0.23852 0.19163 0.17608	0.17923 0.16213 0.11137	0.22707 0.17404 0.15151
Penalty with Su. Smoothing Parameter	50 100 200	0.14225 0.11966 0.10758	0.16784 0.14988 0.13652	0.13020 0.11352 0.09044	0.16277 0.14201 0.13192	0.11633 0.10025 0.08013	0.14566 0.13322 0.10425
Penalized Shrinkage	50 100 200	0.13834 0.11748 0.11189	0.17160 0.16958 0.15167	0.12124 0.10635 0.09489	0.16624 0.15797 0.13480	0.12103 0.10287 0.09184	0.15616 0.14214 0.12190
Penalized Shri. with Sugg. Knot	50 100 200	0.04602 0.02446 0.00848	0.06141 0.02832 0.02874	0.04116 0.02235 0.00812	0.03885 0.02513 0.01720	0.03179 0.02055 0.00616	0.03676 0.02211 0.00827

الجدول (3): الطرائق اللامعلمية (الطرائق الشرائحية، الجزاء غير الممهد، تقليص الجزاء، الخطوات المتسلسلة) وللنموذج الثالث

The Method	S.Size	σ=1/ 2		σ=1/ 4		σ=1 / 8	
		MASE	ISE	MASE	ISE	MASE	ISE
Linear Spline With adap. knot	50 100 200	1.26922 1.32908 1.56523	0.87456 0.89501 0.92761	0.81227 0.91021 1.29901	0.72759 0.75223 0.86308	0.67768 0.73358 1.26572	0.63881 0.69297 0.82739
Cubic Spline With adap. Knot	50 100 200	1.07661 1.14324 1.18385	0.78513 0.85369 0.86307	0.77896 0.88846 1.17060	0.69301 0.74942 0.84353	0.64614 0.84925 1.08889	0.60639 0.72174 0.77271
Stepwise POLYMARS	50 100 200	0.19232 0.14162 0.13071	0.14070 0.13202 0.11923	0.14879 0.13140 0.11026	0.13343 0.12152 0.10325	0.13726 0.11555 0.10225	0.12375 0.12104 0.10036
Roughness Penalty	50 100 200	0.29089 0.26350 0.25314	0.19999 0.17877 0.16343	0.27797 0.25989 0.21375	0.18895 0.16580 0.14443	0.26203 0.23705 0.20961	0.16363 0.14914 0.12065
Penalty with Su. Smoothing Parameter	50 100 200	0.20632 0.18386 0.15032	0.14133 0.12470 0.11352	0.15906 0.14215 0.14005	0.14087 0.11355 0.10429	0.15598 0.14019 0.13221	0.12497 0.10852 0.09067
Penalized Shrinkage	50 100 200	0.21989 0.19204 0.16588	0.15008 0.13387 0.12702	0.17856 0.15773 0.14305	0.14306 0.12939 0.11029	0.14523 0.13819 0.11954	0.13277 0.12767 0.10400
Penalized Shri. with Sugg. Knot	50 100 200	0.12434 0.11512 0.10780	0.11960 0.10939 0.09850	0.10598 0.09577 0.07875	0.09704 0.08018 0.07417	0.10517 0.09502 0.06366	0.08375 0.07582 0.0706