المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (25) 2013
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي السادس لكلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص[175-197]

مقارنة كفاءة بعض الطرائق اللامعلمية في تقدير نماذج الانحدار الخطي المتعدد المتغيرات

د. صفاء يونس الصفاوي* ريواس عبدالله الفيوني**

المستخلص :

الانحدار هو احد الأساليب الإحصائية وأوسعها استخداما في مختلف العلوم من حيث تحديد العلاقة بين المتغيرات على هيئة معادلة لتقدير معلماتها وقوة واتجاه هذه العلاقة كما يبين تقدير الاستجابة والتنبؤ .وقد تم استخدام بعض الطرائق اللامعلمية لتقدير معلمات أنموذج الانحدار الخطي المتعدد المتغيرات ومتغيراته التوضيحية الرتبيه ،و عرض الطرائق والمقارنة فيما بينها باستخدام مجموع متوسطات مربعات الخطأ ، وتوليد البيانات باستخدام المحاكاة . وأظهرت النتائج إن طريقة المربعات الصغرى أفضل طريقة بزيادة حجم العينة في التوزيعين الطبيعي والآسي في حين أن التوزيع المنتظم لم يتأثر لا بالرتب ولا بحجم العينة لكن تأثر بالتباين في توزيع كاما ، وطريقة الرتب الخطية كانت أفضل في توزيع كاما ولكن تأثر بالتباين ، وان طريقة الوسيط الموزون كانت جيدة عند حجم العينة والرتب الدنيا في التوزيع الطبيعي فقط .

Comparison of the efficiency of some Non-Parametric Methods in estimating Multivariate Linear Regression Models

Abstract:

Regression is one of the statistical methods and widely used in various fields of science in terms of defining clearly the relationship between the variables in the form of an equation to estimate the parameters and the strength and direction of this relationship , also , shows the estimate and predict response. Some nonparametric methods are used for estimating the model parameters of the multivariate linear regression when explanatory variables are ranked , methods and comparisons among them is done using the sum of mean squares error , Data are generated using simulation. The results showed that the method of least squares was better way at increase the sample size in the distributions of Normal and Exponential,where in the Uniform distribution was not affected by not rank and the size of the sample ,but affected variance in the distribution Gamma, the method of Linear ranks was

* أستاذ / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

**باحث / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2013/8/27 ـــــــــــــــــــــــ تأريخ القبول 2013/11/21

the best in the distribution of the Gamma, but influenced by variance, the method of median weighted was good when the sample size and rank lower only in the normal distribution.

(1) المقدمة :

لقد شهد العالم في مسيرة القرن العشرين و بداية القرن الحالي تطوراً كبيراً في مجال البحث العلمي في كافة الميادين .

مفهوم الانحدار (The Concept of Regression) هو عبارة عن وسيلة إحصائية تستخدم لوصف العلاقة بين متغير مستقل(توضيحي) واحد أو أكثر (Independent Variable) مع متغير مستجيب (معتمد) (Response Variable) على هيئة معادلة مع تقدير معلماتها وقوة واتجاه هذه العلاقة كما يبين تقدير الاستجابة والتنبؤ وخط الانحدار(Linear Regression) الذي يوضح لنا هندسيا العلاقة بين الظاهرتين، فهو يرينا كيف تميل الظاهرة المستجيبة إلى تغير النتيجة في الظاهرة المستقلة. (الراوي،1987)، (Khattree ,2003)

وقد زادت العناية بالإنحدار اللامعلمي لأهميته البالغة في حساب العلاقة الإحصائية ولاسيما عندما لا تصح المقاييس المعلمية في حساب تلك العلاقة لعدم توفر الشروط اللازمة لاستخدامها لذا كان الانحدار اللامعلمي (Nonparametric Regression) يستعمل للبيانات التي تتضمن اتجاهات غير واضحة (متزايدة أو متناقصة) أو قيم شاذة ، (الجواد ،2007)

مشكلة البحث: دراسة نماذج الانحدار الخطي المتعدد المتغيرات عندما لا تتحقق الافتراضات الأساسية حول المجتمع الذي سحبت منه العينة مثل فرض التوزيع الطبيعي وصغر حجم العينة.

أهمية البحث: عرض ثلاث طرائق لامعلمية لتقدير المعلمات لأنموذج الانحدار المتعدد المتغيرات واختيار الطريقة الافضل.

هدف البحث:

يهدف هذا البحث إلى استخدام ثلاث طرائق لامعلمية لتقدير معلمات أنموذج الانحدار المتعدد المتغيرات . وذلك عندما تكون لدينا المتغيرات التوضيحية متغيرات ترتيبية (ranked) ، وتم عرض هذه الطرائق واختيار الطريقة الأفضل عن طريق معيار مجموع متوسطات مربعات الخطأ $SMSE$ عند تغير الرتب (تم استخدام ثلاث أنواع من الرتب) وتغير أحجام العينات (تحت تجربة ثلاثة أنواع من أحجام العينات) ،مع استخدام المحاكاة لتوليد أربع نماذج انحدار يكون فيها توزيع الخطأ العشوائي موزعاً حسب أربعة توزيعات احتمالية .

(2)الجانب النظري

(2-1) المقدمة :

الانحدار الخطي المتعدد المتغيرات هو أسلوب إحصائي يقوم بصياغة دالة رياضية لعملية ذات عدة عوامل مؤثرة (المتغيرات التوضيحية) $\underline{x}_{(1)},\underline{x}_{(2)},...,\underline{x}_{(q)}$ لوصف متغيرات ناتجة (المتغيرات المعتمدة) $\underline{y}_{(1)},\underline{y}_{(2)},...,\underline{y}_{(p)}$ من هذه العملية ويكون شكل الدالة الرياضية على صورة $\underline{Y} = f\ (\underline{x}_{(1)},\underline{x}_{(2)},...,\underline{x}_{(q)})$ ومن هذه العمليات الرياضية ،تقدير معلمات الأنموذج وتكوين أنموذج انحدار على شكل معادلة خطية بين المتغيرات المعتمدة و المتغيرات التوضيحية (الصياد ، 2007)

لوصف نموذج الانحدار الخطي المتعدد المتغيرات نقوم بتقدير معلمات الأنموذج ، وسنستعرض بعض الطرائق اللامعلمية لتقدير هذه المعالم وهي طريقة المربعات الصغرى O.L.S. (Ordinary least squares method) وطريقة الرتب الخطية للأخطاء L.R.E (Linear Rank Errors) وطريقة الوسيط الموزون ل Sen-Theil لمتعدد المتغيرات M.W. (Median Weighted for Sen-Theil).

(Sen,1984)

وعرض المحاكاة (Simulation) باستخدام برنامج Matlab لتوليد البيانات باستخدام أربع توزيعات احتمالية للأخطاء العشوائية هي التوزيع الطبيعيNormal distribution ، التوزيع المنتظم المستمر Continuous Uniform Distribution ، التوزيع الأسي Exponential distribution وتوزيع كاما Gamma Distribution .

(2-2) تعاريف ومفاهيم:

أ- الإحصاءة $T\ (\beta)$:

وهي إحصاءة تستخدم في تقدير معالم النموذج الخطي بطريقة المربعات الصغرى O.L.S. وان الإحصاءة عبارة عن قيمة واحدة .وتحويلها إلى مصفوفة لتناسب أنموذج الانحدار المتعدد المتغيرات لتكون الحجم $(q \times p)$ ، ولإيجاد الإحصاءة $T\ (\beta)$ نفرض إن $y^*_{1j}, y^*_{2j},..., y^*_{nj}$ هي مشاهدات المتغير المعتمد j وان $\underline{x}^*_{(1)},\underline{x}^*_{(2)},...,\underline{x}^*_{(q)}$ هي مشاهدات المتغيرات التوضيحية

$$\hat{y}_{ij} = \underline{x}^{*\prime}_{(i)}\underline{\hat{\beta}}_{(j)} \quad ...(1)$$

$$i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,p \quad s = 1,2,...,q$$

حيث $x^*_{is} = (x_{is} - M_{\underline{x}_{(s)}})\ ,\ y^*_{ij} = (y_{ij} - M_{\underline{y}_{(j)}})$

إذ إن $M_{\underline{y}_{(j)}}$ وسيط المتغيرات المعتمدة و $M_{\underline{x}_{(s)}}$ وسيط المتغيرات التوضيحية واستخدم الوسيط لأنه يتعامل مع الرتب . $\underline{\hat{\beta}}_{(j)}$ هو متجه معاملات المتغيرات التوضيحية للمتغير المعتمد (j) و $x^{*\prime}_{(i)}$ هو متجه صف (i) لقيم المتغيرات التوضيحية

حيث $T_{sj}(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} x^{*}_{is}(y^{*}_{ij} - \underline{x}^{*\prime}_{(i)}\underline{\hat{\beta}}_{(j)})$ ...(2)

$$\underline{\hat{\beta}}'_{(j)} = (\hat{\beta}_{1j}, \hat{\beta}_{2j}, \dots, \hat{\beta}_{qj}) \in R^{q}$$

وحيث الأخطاء العشوائية e_{ij} تمثل مشاهدات عشوائية مستقلة و متماثلة التوزيع i.i.d.r.v's . ومصفوفة الإحصاءة $T(\hat{\beta})$ تكون بالشكل التالي:-

$$T(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} T_{11}(\hat{\beta}) & T_{12}(\hat{\beta}) & \cdots & T_{1p}(\hat{\beta}) \\ T_{21}(\hat{\beta}) & T_{22}(\hat{\beta}) & \cdots & T_{2p}(\hat{\beta}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{q1}(\hat{\beta}) & T_{q2}(\hat{\beta}) & \cdots & T_{qp}(\hat{\beta}) \end{bmatrix}$$

(Sprent & Smeeton,2001)

وتتميز هذه الإحصاءة بمجموعة من الخواص منها :-

$$1- \quad T_{sj}(\hat{\beta}) = 0$$

حيث $\hat{\beta}$ هي مقدر نهائي عن طريقة المربعات الصغرى .O.L.S

وان $\left|T_{sj}(\hat{B}) - M_{Y_j}\right|$ اقل ما يمكن (minimum)

$$2- \quad ET_{sj}(\hat{\beta}) = 0$$

إذ أن M_{y_i} هي معلمة الموقع (puri & sen,1984)

ب- إحصاءة الرتب R_{Ni} (Rank Statistic) :

تعود هذه الإحصاءة إلى عام 1945 حيث قدمت من قبل العالم Wilcoxon وفي عام 1947 استخدمها الباحثان Mann and Whitney لاختبار بين عينتين. وهي إعطاء رتبة لكل قيمة من عمود معين أي تمثيل كل قيمة برتبة داخل عموده وتكون الرتب تصاعديا أي اقل قيمة رتبة (1) واكبر قيمة رتبة n . تستخدم لإعطاء رتب للأخطاء العشوائية e_{ij} داخل متجه $\underline{e}_{(j)}$ في مصفوفة الخطأ العشوائي $\underline{\varepsilon}$

$$R_{ij} = rank(e_{ij}) \qquad ...(3)$$

$$e_{ij} = y^{*}_{ij} - \underline{x}^{*\prime}_{(i)}\underline{\hat{\beta}}_{(j)} \qquad ...(4)$$

والتي لها توزيع منتظم Uniform Distribution ومن خصائص هذا التوزيع

$$1- E(R_{ij}) = \frac{n+1}{2} \qquad 2- \operatorname{var}(R_{ij}) = \sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$3- \operatorname{cov}(R_{ij}, R_{zj}) = \frac{-\sigma^2}{n-1} \qquad i \neq z = 1,2,\dots,n$$

(Bhattacharyya ,1984)(Gibbons ,2003)

جـ - تعريف $a(i)$ Scores :

هي أداة رياضية تعرف بالشكل التالي $a(i) = E\phi(u_n(i)) \quad or \quad \phi(1/n+1)$

حيث $u_n(1) \le u_n(2) \le ... \le u_n(n)$. تعمل على تحويل الرتب من توزيع منتظم Uniform Distribution ذات الفترة $[1,n]$ إلى توزيع منتظم ذات الفترة $(0,1)$والتي تصبح توزيع مستطيلي Rectangular distribution.

$$E\,u_i = \frac{i}{n+1} \qquad 1 \le i \le n \qquad ...(5)$$

مثلاً $y_j^{(1)} = (1/n+1)\ ,\ \ y_j^{(2)} = (2/n+1)\ \ ,...,\ \ y_j^{(n)} = (n/n+1)$

حيث $y_j^{(1)}$ اقل رتبة بين قيم y_j و $y_j^{(n)}$ اكبر رتبة بين قيم y_j .

(Saleh,1984)

د - نوع ولكوكسن Wilcoxon Type :

أو ما يسمى رتب Wilcoxon هذا النوع من الاختبار بالمجتمع المتماثل المسحوب منه العينة حيث يتم طرح الوسيط الفرضي من كل مشاهدة في حالة العينة الواحدة

$$R_i^c = (R_i - E\,(R_i)) \qquad ...(6)$$

حيث $E\,(R_i)$ يمثل الوسيط الفرضي وصيغته كالأتي

$$E\,(R_i) = \frac{n+1}{2} \qquad ...(7)$$

$$R_i^c = (R_i - \frac{n+1}{2}) \qquad ...(8)$$

(Bluman , 2012)

هـ - الإحصاءة $L_n(\beta)$:

تعود هذه الإحصاءة إلى عام 1969 حيث قام العالمان Puri و Sen بأستخدامها في تقدير معلمات أنموذج الانحدار الخطي، وتستخدم هذه الإحصاءة في اختبار و تقدير معلمات الأنموذج بعد اخذ رتب الإحصاءات الخطية للأخطاء العشوائية في طريقة انحدار الرتب الخطية ، هذه الإحصاءة تكون حصينة لا تتأثر بالقيم الشاذة لأنها تأخذ الرتب للأخطاء وليس القيم ، وهي تسير نفس إجراءات الإحصاءة $T(\beta)$

$$L_{sj}(\beta) = \sum_{i=1}^{n} x_{is}^{*}\, a_{ij}\,(R_i^{j}(\beta)) \qquad ...(9)$$

حيث ان $R_i^j(\beta)$ و $a_{ij}(i)$ معرفة في البند (ب) و البند (جـ) على التوالي

(Hajek ,1999)

و - الإحصاءة S_j :

هي إحصاءة تستخدم لاختبار $(\hat{\beta}_0, \underline{\hat{\beta}}_{(s)})$ حيث تعتمد على اشارة المتغير المعتمد y_{ij} و رتبته وقيم المتغيرات التوضيحية $\underline{x}_{(i)}{}'$ ، وصيغته كالأتي

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_{(i)}{}' \operatorname{sgn}(y_{ij}) a_{ij}^* (R_{ij}^+(y_{ij})) \qquad ...(10)$$

حيث $\operatorname{sgn}(y_{ij})$ هي إشارة المتغير المعتمد و R_{ij}^+ هي رتب القيم المطلقة للمتغير المعتمد y_{ij} و $\underline{x}_{(i)}{}'$ هو صف i من مصفوفة المتغيرات التوضيحية $\underline{X}_c^*$

$$R_{ij}^+ = rank(|y_{ij}|)$$

(Sen,1978)

ز - الإحصاءة $D(\beta)$:

تستخدم هذه الإحصاءة لاختيار أفضل مقدر للمعلمات $\underline{\hat{\beta}}$ من بين المعلمات المقدرة بطريقة نسبة بين المشاهدتين من متغير معتمد إلى مشاهدتين لكل متغير من المتغيرات التوضيحية(أي ميل المستقيم الواصل بين نقطتين على المستوى الإحداثي)

$\beta_{im} = (y_i - y_m)/(x_i - x_m)$ وتستند هذه الإحصاءة على حاصل ضرب رتب الأخطاء العشوائية في الأخطاء العشوائية وإيجاد مجموع حاصل الضرب واقل قيمة للإحصاءة $D(\beta)$ يكون أفضل مقدر للمعلمات.

(Hettmansperger, 2010)

$$\min_{\beta} D(\beta) = D(\hat{\beta}) \qquad ...(11)$$

$$D_j(\beta) = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}^c(\beta)(y_{ij}^* - \underline{x}_{(i)}^*{}' \underline{\hat{\beta}}_{(j)}) \qquad ...(12)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R_{ij}^c(\beta) e_{ij} \qquad i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,p \quad s = 1,2,...,q$$ حيـــــث

$R_{ij}(\beta)$ معرفة في البند (ب) .

(3) الأنموذج المفترض :

تعتبر النماذج الإحصائية الحل لكافة المشاكل سواء كانت إحصائية أو هندسية أو غيرها من المشاكل إن الأنموذج المفترض للانحدار الخطي متعدد المتغيرات يمثل بالعلاقة الدالية الآتية :

$$\underline{Y}^* = \underline{X}_c^* \underline{\beta}_c + \underline{\varepsilon} \qquad ...(12)$$ حيـــث ان

$\underline{X}_c^*$ و $((q+1)\times p)$ هي مصفوفة المعاملات للمتغيرات التوضيحية وهي ذات حجم $\underline{\beta}_c$ ذات حجم $(n\times(q+1))$ ويكون تمثيل الأنموذج بالشكل التالي

$$y^*_{i1} = \beta_{01} + \beta_{11}x^*_{i1} + \dots + \beta_{q1}x^*_{iq} + e_{i1}$$
$$y^*_{i2} = \beta_{02} + \beta_{12}x^*_{i1} + \dots + \beta_{q2}x^*_{iq} + e_{i2} \qquad \dots(13)$$
$$\vdots$$
$$y^*_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x^*_{i1} + \dots + \beta_{qj}x^*_{iq} + e_{ij}$$
$$y^*_{ij} = \beta_{oj} + \sum_{s=1}^{q} \beta_{sj}x^*_{is} \qquad \dots(14)$$
$$i = 1,2,\dots,n \quad j = 1,2,\dots,p \quad s = 1,2,\dots,q$$

والمعادلة رقم (14) تمثل النموذج المفترض في حالة متعدد المتغيرات.

(Berry,1985)

(4) طرق التقدير :

(1-4) طريقة المربعات الصغرى : Least Squares method

بالرغم من وجود العديد من الطرق للحصول على معادلة الانحدار المقدرة من البيانات ، فان طريقة المربعات الصغرى هي أكثر استخداما من باقي الطرق، والأخطاء العشوائية هي الفرق بين القيمة المشاهدة والقيمة المقدرة أي $e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$ ، وهذه الطريقة تجعل الخطأ العشوائي اقل ما يمكن . تستعمل هذه الطريقة عادةً في الطرائق المعلمية أما استعمالها في الطرائق اللامعلمية يأتي من كونها تحقق فرضيات أنموذج الانحدار اللامعلمي .

(Draper , 1998)

. ولحساب معالم الأنموذج المفترض في المعادلة (13) فان تقديره يكون .

$$\underline{\hat{\beta}}_c = (\underline{X}_c^{*\prime}\underline{X}_c^*)^{-1}\underline{X}_c^{*\prime}\underline{Y}_c^* \qquad \dots(15)$$

وخطوات حساب المقدر $\underline{\hat{\beta}}$ كالآتي:

1- بأستخدام الإحصاءة $T(0)$ والمعرفة في البند (أ) يحسب المقدر الابتدائي لـ $\underline{\hat{\beta}}$ والذي يكون عبارة عن مصفوفة صفرية وبدون تقدير $\hat{\beta}_0$ من المعادلة الآتية

$$\hat{\beta} = (\underline{X}_n^*)^{-1}\underline{T}_n(0) \qquad \dots(16)$$

حيث ان $\underline{X}_n^* = (x_{is} - M_{\underline{x}(s)})'(x_{is} - M_{\underline{x}(s)})$

2- نقدر الحد الثابت $\hat{\beta}_0$ باستخدام المعادلة الآتية:

$$\underline{\hat{\beta}}_{0(j)} = median(\underline{y}_{(j)}) \qquad \dots(17)$$

3- نحسب الإحصاءة $T(\beta)$ من المقدرات السابقة لـ $\underline{\hat{\beta}}_c$ بعد إضافة الصف $\underline{\hat{\beta}}_0$ إلى مصفوفة $\underline{\hat{\beta}}$ أي أصبح حجمها $((q+1)\times p)$ ونستخدم مصفوفة المتغيرات التوضيحية $\underline{X}_c^*$ التي يكون العمود الأول فيها كل عناصره وحادات ، ثم نوجد المقدر النهائي لـ $\underline{\hat{\beta}}_c$ من المعادلات الآتية

$$T_{sj}(\underline{\hat{\beta}}_c) = \sum_{i=1}^{n} x^*_{c\,is}(y^*_{ij} - \underline{x}^{*\prime}_{c(i)}\underline{\hat{\beta}}_{c(j)}) \qquad \dots(18)$$

$$\underline{\hat{\beta}}_c = (\underline{X}^*_{c\ n})^{-1} T\ (\underline{\hat{\beta}}_c) \quad ...(19)$$ و ثــم

كتابة الأنموذج النهائي حيث ان

$$\underline{\beta}_c = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \cdots & \beta_{0p} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \cdots & \beta_{qp} \end{bmatrix}$$ و $$\underline{X}^*_c = \begin{bmatrix} 1 & x^*_{11} & x^*_{12} & \ldots & x^*_{1q} \\ 1 & x^*_{21} & x^*_{22} & \ldots & x^*_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x^*_{n1} & x^*_{n2} & \ldots & X^*_{nq} \end{bmatrix}$$

(Puri,1985)

(2-4)الطريقة الخطية لرتب للأخطاء العشوائية :

Linear Ranks Method for random errors

هذه الطريقة تستند إلى الرتب الخطية للأخطاء العشوائية وتكون الرتب أساس في التقدير ، واستخدمت من قبل العالمان Puri و Sen في تقدير معلمات أنموذج الانحدار الخطي حيث تأخذ نفس خطوات طريقة المربعات الصغرى في التقدير ولكن باستخدام الإحصاءة $L_n(\beta)$ بدلا من الإحصاءة $T(\beta)$ المستخدمة في طريقة المربعات الصغرى حيث الإحصاءة $L_n(\beta)$ تعتمد على الرتب الخطية للأخطاء العشوائية باستخدام المعادلة (3) (Sen,1984)

في حالة متعدد المتغيرات تستخدم الرتب الخطية R_n والـ scores $a(i)$ لإيجاد الإحصاءة $L_n(\beta)$ على شكل متعدد المتغيرات

$$a(R_n) = \begin{bmatrix} a^{(1)}_{n1}(R^{(1)}_{n1}) & .... & a^{(1)}_{nn}(R^{(1)}_{nn}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{(p)}_{n1}(R^{(p)}_{n1}) & .... & a^{(p)}_{nn}(R^{(p)}_{nn}) \end{bmatrix} \quad , \quad R_n = \begin{bmatrix} R^{(1)}_{n1} & .... & R^{(1)}_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{(p)}_{n1} & .... & R^{(p)}_{nn} \end{bmatrix}$$

عند تطبيق المعادلة (9) يتكون لدينا مصفوفة L_n حجمها $(q \times p)$

$$L_n = \begin{pmatrix} L_{n11} & .... & L_{n1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{nq1} & ..... & L_{nqp} \end{pmatrix}$$

وخطوات حساب المقدر $\hat{\beta}$ تكون كالآتي

1- بأستخدام الإحصاءة $L_n(0)$ المعرفة في البند (هـ) يحسب المقدر الابتدائي لــ $\underline{\hat{\beta}}$ والذي يكون مصفوفة صفرية وبدون تقدير $\hat{\beta}_0$ المعادلة الآتية:

$$\underline{\hat{\beta}} = (\underline{X}^*_n)^{-1} L_n(0) \quad ...(20)$$

2- نقدر الحد الثابت β_0 باستخدام المعادلة رقم (17) $\underline{\hat{\beta}}_{0(j)} = median(\underline{y}_{(j)})$

3- نحسب الإحصاءة $L_n(\beta)$ من المقدرات السابقة لـ $\underline{\hat{\beta}}_c$ بعد إضافة الصف $\underline{\hat{\beta}}_0$ إلى مصفوفة $\underline{\hat{\beta}}$ أي أصبح حجمها $((q+1)\times p)$ ونستخدم مصفوفة المتغيرات التوضيحية التي يكون العمود الأول كل عناصره واحدات ، ثم نوجد المقدر النهائي لـ $\underline{\hat{\beta}}_c$ من المعادلات الآتية

$$R(\hat{\beta}_c) = rank\,(y^*_{ij} - \underline{x}^{*\prime}_{(i)}\underline{\hat{\beta}}_{(j)}) \qquad ...(21)$$

ومن $$\underline{\hat{\beta}}_c = (\underline{X}^*_{c\ n})^{-1} L_n(\hat{\beta}_c) \qquad ...(22)$$

ثم كتابة الأنموذج النهائي . (Puri,1985)

(3-4) طريقة الوسيط الموزون لـ Thiel & sen :

The weighted median method for Thiel & sen

هذه الطريقة تستند إلى أيجاد مجموعة من المعالم عن طريق النسبة بين المشاهدتين من متغير معتمد إلى مشاهدتين لكل متغير من المتغيرات التوضيحية (تعتمد على أساس تساوي الأخطاء العشوائية) التي يكون عدد مقدرات معلماتها هو $n(n-1)/2$

1- في حالة أنموذج الانحدار الخطي البسيط

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$y_i - \beta_1 x_i \le y_m - \beta_1 x_m \qquad m > i \qquad ...(23)$$

ومن المعادلة أعلاه فان β_1 تساوي $\beta_{1im} = (y_i - y_m)/(x_i - x_m) \quad i \ne m = 1,2,\dots,n$

2- في حالة متعدد المتغيرات فان يمكن اشتقاق القانون من النموذج (13) وينتج

$$\begin{aligned}
&y^*_{i1} - \beta_{01} - \beta_{11}x^*_{i1} - \beta_{21}x^*_{i2} - \dots - \beta_{q1}x^*_{iq} = y^*_{m1} - \beta_{01} - \beta_{11}x^*_{m1} - \beta_{21}x^*_{m2} - \dots - \beta_{q1}x^*_{mq}\\
&y^*_{i2} - \beta_{02} - \beta_{12}x^*_{i1} - \beta_{22}x^*_{i2} - \dots - \beta_{q2}x^*_{iq} = y^*_{m2} - \beta_{01} - \beta_{12}x^*_{m1} - \beta_{22}x^*_{m2} - \dots - \beta_{q2}x^*_{mq} \qquad ...(24)\\
&\vdots\\
&y^*_{ip} - \beta_{0p} - \beta_{1p}x^*_{i1} - \beta_{2p}x^*_{i2} - \dots - \beta_{qp}x^*_{iq} = y^*_{mp} - \beta_{0p} - \beta_{1p}x^*_{m1} - \beta_{2p}x^*_{m2} - \dots - \beta_{qp}x^*_{mq}\\
&\qquad i \ne m = 1,2,\dots,n
\end{aligned}$$

ونقوم بتحويل المتغيرات المعتمدة إلى الجهة اليسرى والمتغيرات التوضيحية إلى الجهة الأخرى ومن هذا التحويل يمكن اختصار حدود β_0 من طرفي المعادلة رقم (24) وينتج لنا

$$\begin{aligned}
&(y^*_{m1} - y^*_{i1}) = \beta_{11}(x^*_{m1} - x^*_{i1}) + \beta_{12}(x^*_{m2} - x^*_{i2}) + \cdots + \beta_{1q}(x^*_{mq} - x^*_{iq})\\
&(y^*_{m2} - y^*_{i2}) = \beta_{21}(x^*_{m1} - x^*_{i1}) + \beta_{22}(x^*_{m2} - x^*_{i2}) + \cdots + \beta_{2q}(x^*_{mq} - x^*_{iq}) \qquad ...(25)\\
&\vdots\\
&(y^*_{mp} - y^*_{ip}) = \beta_{p1}(x^*_{m1} - x^*_{i1}) + \beta_{p2}(x^*_{m2} - x^*_{i2}) + \cdots + \beta_{pq}(x^*_{mq} - x^*_{iq})
\end{aligned}$$

ومن المعادلة رقم (25) تحول إلى المصفوفات

$$\begin{pmatrix} y^*_{m1} - y^*_{i1} \\ y^*_{m2} - y^*_{i2} \\ \vdots \\ y^*_{mp} - y^*_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1q} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \cdots & \beta_{pq} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^*_{m1} - x^*_{i1} \\ x^*_{m2} - x^*_{i2} \\ \vdots \\ x^*_{mq} - x^*_{iq} \end{pmatrix} \qquad ...(26)$$

لاستخراج مصفوفة المعلمات يجب أيجاد معكوس متجه المتغيرات التوضيحية باستخدام طريقة $Moore - Penrose$

(Meetings of the AMS and MAA , 2009)

وتتلخص طريقته حول أيجاد معكوس المتجه الذي يحتوي على عمود واحد فقط

$$w^{-1} = w^{+} = \begin{cases} \frac{1}{w'w} w' & w \neq 0 \\ 0' & w = 0 \end{cases} \qquad ...(27)$$

حيث w متجه يحتوي على عمود واحد و w^{+} هو معكوسه ذو حجم $(q \times 1)$

ومن خواص طريقة Moore-Penrose

$$1: \; w w^{+} w = w \qquad 2: w^{+} w w^{+} = w^{+} \qquad 3: (w^{+} w)' = w^{+} w$$

$$4: (w w^{+})' = w w^{+} \qquad 5: w^{+} w = 1$$

وبأستخدام الطريقة أعلاه ينتج لنا :

$$w^{+} = \frac{1}{w'w} w'$$

بتطبيق المعادلة رقم (27) ينتج

حيث

$$w = \begin{pmatrix} x^{*}_{m1} - x^{*}_{i1} \\ x^{*}_{m2} - x^{*}_{i2} \\ \vdots \\ x^{*}_{mq} - x^{*}_{iq} \end{pmatrix}$$

$$w'w = \begin{pmatrix} x^{*}_{m1} - x^{*}_{i1} & x^{*}_{m2} - x^{*}_{i2} & \cdots & x^{*}_{mq} - x^{*}_{iq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{*}_{m1} - x^{*}_{i1} \\ x^{*}_{m2} - x^{*}_{i2} \\ \vdots \\ x^{*}_{mq} - x^{*}_{iq} \end{pmatrix}$$

$$w'w = (x^{*}_{m1} - x^{*}_{i1})^2 + (x^{*}_{m2} - x^{*}_{i2})^2 + \cdots + (x^{*}_{mq} - x^{*}_{iq})^2$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} y^{*}_{m1} - y^{*}_{i1} \\ y^{*}_{m2} - y^{*}_{i2} \\ \vdots \\ y^{*}_{mp} - y^{*}_{ip} \end{pmatrix} * w^{+} = \begin{pmatrix} \frac{(y^{*}_{m1} - y^{*}_{i1})(x^{*}_{m1} - x^{*}_{i1})}{w'w} & \cdots & \frac{(y^{*}_{m1} - y^{*}_{i1})(x^{*}_{mq} - x^{*}_{iq})}{w'w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(y^{*}_{mp} - y^{*}_{ip})(x^{*}_{m1} - x^{*}_{i1})}{w'w} & \cdots & \frac{(y^{*}_{mp} - y^{*}_{ip})(x^{*}_{mq} - x^{*}_{iq})}{w'w} \end{pmatrix}$$

$$\beta_{11} = \frac{(y^{*}_{m1} - y^{*}_{i1})(x^{*}_{m1} - x^{*}_{i1})}{w'w} \qquad \beta_{12} = \frac{(y^{*}_{m1} - y^{*}_{i1})(x^{*}_{m2} - x^{*}_{i2})}{w'w}$$

$$\beta_{21} = \frac{(y^{*}_{m2} - y^{*}_{i2})(x^{*}_{m1} - x^{*}_{i1})}{w'w} \qquad \beta_{22} = \frac{(y^{*}_{m2} - y^{*}_{i2})(x^{*}_{m2} - x^{*}_{i2})}{w'w}$$

$$\vdots$$

$$\beta_{pq} = \frac{(y^{*}_{mp} - y^{*}_{ip})(x^{*}_{mq} - x^{*}_{iq})}{w'w}$$

عند تطبيق هذه الطريقة على جميع المشاهدات يتكون لدينا $n(n-1)/2$ من المصفوفات وان اختيار المصفوفة عن طريق تطبيق الإحصاءة $D(\beta)$ والتي تكون قيمة الاحصاءة $D(\beta)$ أقل هي المصفوفة الأفضل .

2- تقدير الحد الثابت $\hat{\beta}_0$ بأخذ وسيط الأخطاء العشوائية

$$\underline{\hat{\beta}}_{0(j)} = median(\underline{e}_{(j)}) \quad ...(28)$$

(Sen,1984)

(5) معيار المقارنة:

لغرض أيجاد أفضل طريقة من بين الطرائق في تقدير المعلمات للأنموذج الانحدار اللامعلمي فأننا سنستعمل المعيار $SMSE$

- معيار SMSE (Sum of Mean Square Error)

هو عبارة عن مجموع متوسط مربعات الأخطاء العشوائية e_{ij} حيث

$$SMSE = \frac{\sum_{j=1}^{p} SSE_{(j)}}{n-q-1} = \frac{\sum_{j=1}^{p} \underline{e}_{(j)}{}' \underline{e}_{(j)}}{n-q-1} \quad .... \quad (29)$$

حيث $\underline{e}_{(j)}$ هو العمود (j) من مصفوفة الأخطاء العشوائية $\underline{\varepsilon}$ وكلما كانت قيمة $SMSE$ اقل كان الأنموذج أفضل.

(الراوي،1980) (Khattree ,2003)

(6) اختبار الفرضيات لمعلمات نموذج الانحدار :

هو اختبار يتضمن معرفة فيما اذا كانت قيم المعلمات تمثل المجتمع الذي سحبت منه العينة. (يونس ،2011)

أ - اختبار الفرضية الآتية:

$$H_0 : (\hat{\beta}_{(s)}) = 0$$

$$H_1 : (\hat{\beta}_{(s)}) \neq 0 \qquad s = 1, 2, \ldots, q$$

باستخدام الإحصاءة $L_n(\beta)$ المعرفة في البند(هـ)

$$L_{ji}(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} x_{is}^{*} a_{ij} (R_i^j(\hat{\beta}))/n$$

حيث نختبر كل معلمة و مقارنة كل معلمة على حدة بمستوى معنوية معين

و $$E(L_n) = 0 \quad and \quad E(L_n L_n{}') = a_{ij}^2 (R_n)(\underline{X}^* \underline{X}^{*\prime})$$

حيث $$a_{ij}^2(R_j) = (\sum_{i=1}^{n} (a_{ij}(R_j))^2)/n$$

وان منطقة رفض فرضية العدم H_0 $\quad \left| L_n \right| \geq L_{n,\alpha}$

$$P\left\{L_n \geq L_{n,\alpha} \middle| H_0\right\} \leq \alpha \qquad 0 < \alpha < 1$$

وبخلافها تقبل الفرضية البديلة.

ويمكن اختبار جميع المعلمات معا في المختبر الإحصائي

$$\hbar_j^{+} = (a_{ij}(R_j))^{-2}(\underline{L}_{(j)}{}'(\underline{X}^{*}\underline{X}^{*\prime})^{-1}\underline{L}_{(j)}) \qquad ...(30)$$

حيث ترفض فرضية العدم إذا كان $\left| \hbar_j^{+} \right| \geq \chi^2_{(q,(\alpha/2))}$

(Jureckova ,1984)(Sen,1978)

ب _ اختبار الفرضية الآتية:

$$H_0 : (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_s) = 0$$

$$H_1 : (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_s) \neq 0 \qquad s = 1, 2, \ldots, q$$

نستخدم الإحصاءة S_j المعرفة في البند (و) لاختبار الفرضية أعلاه حيث يكون المختبر الإحصائي هو

$$\ell_j^{+} = (a_{ij}(R_j))^{-2}(\underline{S}_{(j)}{}'(\underline{X}^{*}\underline{X}^{*\prime})^{-1}\underline{S}_{(j)}) \qquad ...(31)$$

ويكـــون رفض فرضية العدم إذا كان $\left| \ell_j^{+} \right| \geq \chi^2_{(q+1),(\alpha/2)}$

(Adichie ,1984)

(7)الجانب التجريبي:

(7 - 1) المقدمة :

تم استعراض ثلاث طرائق لامعلمية لتقدير معالم أنموذج الانحدار متعدد المتغيرات . ولابد من ان يكون هناك مقارنة بين الطرائق من حيث حجم العينة و عدد الرتب و مقدار التباين للبيانات المستخدمة، ولكن لعدم توفر البيانات الواقعية قمنا باستخدام أسلوب المحاكاة لتوليد هذه البيانات من الحاسوب باستخدام برنامج Matlab علماً ان الخطأ العشوائي تم توليده باستخدام أربع توزيعات احتمالية مع ثلاث أنواع من الرتب وثلاث أنواع من العينات أي يكون لدينا 36 تجربة مع ثلاث طرق للمقارنة باستخدام $SMSE$ ومتغيرين معتمدين احدهما ذو تباين كبير و الأخر ذو تباين صغير وتم تكرار التجربة 1000 مرة ولعل هذا يفسر صعوبة الحصول على بيانات واقعية بهذا الحجم والنوع في وقت زمني محدد.

(7-2) المحاكاة:

هي طريقة أو أسلوب يستخدمه الباحث عادةً لتقريب التجربة إلى العالم الواقعي الذي يصعب توفيره بسبب التكلفة المادية أو الموارد البشرية وبعيدا عن الأخطار الحياتية.

ومن مزايا طريقة المحاكاة :

1- تختصر وقت تنفيذ العملية (التجربة) إلى بضع دقائق في الحاسوب

2- إمكانية السيطرة على التجربة دون أي خسائر

ومن عيوب طريقة المحاكاة:

1- صعوبة تحديد القيم الأولية لمعلمات الأنموذج

2- الفرضيات المخفية داخل البرنامج قد تجعل الأنموذج متشعب ويبتعد عن الواقع

(برى ، 2002)

(7-3) وصف التجربة :

استخدم ثلاث أنواع من الرتب لتوليد المتغيرات التوضيحية وهي (1-3) و (1-5) و(1-7) وثلاث أنواع من أحجام العينات هي (9 ، 15 ، 35) في أربع توزيعات احتمالية لتوليد الخطأ العشوائي وهي التوزيع الطبيعي والمنتظم المستمر والأسي و كاما في البحث وجرت المقارنة على أساس المعيار $SMSE$ لاختيار الطريقة الأفضل من بين الطرق المذكورة سابقاً ، المتغير المعتمد الأول Y_1 ذو تباين و وسط الحسابي اكبر من تباين الوسط الحسابي للمتغير المعتمد الثاني Y_2.

(7-4) نتائج المحاكاة :

اولاً - التوزيع الطبيعي: عندما الخطأ العشوائي يتولد من توزيع طبيعي

وحسب قيمة $SMSE$ نلاحظ من الجدول رقم (1) في الملحق

أ- عند حجم العينة $n = 9$

1- **الرتب** $(1-3)$ **والرتب** $(1-5)$ كانت النتائج متشابهة حيث كانت طريقة *M.W.* *M.W.* افضل طريقة ثم طريقة $O.L.S$ و طريقة $L.R.$. أي اذا كان عندنا بيانات ذات حجم صغير ورتب صغيرة والخطأ يتوزع طبيعيا نستخدم طريقة *M.W.* .

2- **الرتب** $(1-7)$ حيث كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة ثم طريقة *M.W.* و طريقة $L.R.$. نلاحظ بزيادة الرتب أصبحت طريقة $O.L.S$ افضل الطرق.

أ- عند حجم العينة $n = 15$ و $n = 35$ عند جميع أنواع الرتب كانت النتائج متشابهة حيث كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة ثم طريقة *M.W.* و طريقة $L.R.$. نلاحظ زيادة في الرتب وحجم العينة أصبحت طريقة $O.L.S$ افضل الطرق، والخطأ يتوزع طبيعيا.

ثانياً - التوزيع المنتظم المستمر للأخطاء العشوائية

عند جميع أحجام العينات وحسب قيمة $SMSE$ من الجدول رقم (2) في الملحق

ولجميع الرتب $(1-3)$ و $(1-5)$ و $(1-7)$ كانت النتائج متشابهة حيث كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة ثم طريقة $M.W.$ و طريقة $L.R.$. نلاحظ إن التغير في أحجام العينة والرتب لم تؤثر على الطريقة في هذا التوزيع ، فاذا كانت بيانات الاخطاء العشوائية تتوزع توزيع منتظم مستمر فان طريقة $O.L.S$ يجب استخدامها .

ثالثاً - التوزيع ألأسي Exponential distribution للأخطاء العشوائية

وحسب قيمة $SMSE$ ومن جدول رقم (3) في الملحق

أ- **عند حجم العينة** $n = 9$

1- الرتب $(1-3)$ حيث كانت طريقة $L.R.$ افضل طريقة ثم طريقة $O.L.S$ و طريقة $M.W.$

2- الرتب $(1-5)$حيث كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة ثم طريقة$M.W.$ وطريقة $L.R.$.

3- الرتب $(1-7)$حيث كانت طريقة $M.W.$ افضل طريقة ثم طريقة $O.L.S$ و طريقة $L.R.$.

ب- **عند حجم العينة** $n = 15$

1- **الرتب** $(1-3)$ حيث كانت طريقة$M.W.$ افضل طريقة ثم طريقة $L.R.$ و طريقة $O.L.S$.

2- **الرتب** $(1-7)$ و $(1-5)$ كانت النتائج متشابهة

حيث كانت طريقة $M.W.$ افضل طريقة ثم طريقة $O.L.S$ و طريقة $L.R.$.

عن هذا الحجم للعينة كانت طريقة$M.W.$ افضل طريقة مهما تغيرت الرتب المتغيرات التوضيحية .

جـ- **عند حجم العينة** $n = 35$

1- الرتب $(1-3)$حيث كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة ثم طريقة $L.R.$ و طريقة $M.W.$.

2- الرتب $(1-7)$ و $(1-5)$ كانت النتائج متشابهة

حيث كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة ثم طريقة$M.W.$ و طريقة $L.R.$.

عند هذا الحجم للعينة كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة مهما تغيرت الرتب للمتغيرات التوضيحية .

رابعاً - توزيع كاما Gamma distribution للأخطاء العشوائية

وحسب قيمة $SMSE$ من جدول (4) في الملحق

أ- **عند حجم العينة** $n = 9$

1- **الرتب** $(1-5)$ و $(1-3)$ كانت النتائج متشابهة

حيث كانت طريقة $L.R.$ افضل طريقة ثم طريقة$M.W.$ و طريقة $O.L.S$.

2- عند الرتب $(1-7)$حيث كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة ثم طريقة$M.W.$ و طريقة $L.R$.

ب- **عند حجم العينة** $n = 15$

1- الرتب $(1-3)$حيث كانت طريقة $L.R.$ افضل طريقة ثم طريقة$M.W.$ و طريقة $O.L.S$.

2- الرتب $(1-5)$حيث كانت طريقة $L.R.$ افضل طريقة ثم طريقة $O.L.S$ و طريقة *M.W.* .

3- الرتب $(1-7)$حيث كانت طريقة*M.W.* افضل طريقة ثم طريقة $L.R.$ و طريقة $O.L.S$.

جـ عند حجم العينة $n = 35$

1- الرتب $(1-3)$حيث كانت طريقة $L.R.$ افضل طريقة ثم طريقة $O.L.S$ و طريقة*M.W.* .

2- الرتب $(1-5)$حيث كانت طريقة $L.R.$ افضل طريقة ثم طريقة *M.W.* و طريقة $O.L.S$.

3- الرتب $(1-7)$حيث كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة ثم طريقة $L.R.$ و طريقة *M.W.* .

ومن خلال هذا التوزيع وعند الرتب $(1-3)$ و $(1-5)$ ظهرت طريقة $L.R.$ افضل طريقة مهما تغير حجم العينة وعند الرتب $(1-7)$ كانت طريقة $O.L.S$ افضل طريقة ، نلاحظ أن حجم العينة لا يؤثر في هذا التوزيع على قيمة SMSE بل الرتب تؤثر عليه .

(8) الاستنتاجات والتوصيات:

(8-1) الاستنتاجات :

من خلال تجارب المحاكاة يوضح الجدول (5) في الملحق الاستنتاجات الآتية :

1- لوحظ عند استخدام التوزيع الطبيعي والتوزيع المنتظم المستمر انه كلما ازدادت الرتب تزداد قيم متوسط مربعات الخطأ العشوائي MSE و SMSE عند ثبوت حجم العينة، في حين يقل متوسط مربعات الخطأ العشوائي MSE و SMSE أيضا في التوزيع الأسي وتوزيع كاما ، انظر الجداول في الملحق (1 – 2 – 3 – 4)

2- تقل قيمة متوسط مربعات الخطأ العشوائي MSE و SMSE أيضا كلما ازداد حجم العينة عند ثبوت الرتب ، في كافة التوزيعات المستخدمة في البحث، وفقا للنظرية الإحصائية . انظر الجداول في الملحق (1 – 2 – 3 – 4)

3- في التوزيع الطبيعي عند جميع أحجام العينات والرتب، تكون طريقة $O.L.S$ هي الأفضل مهما تغير حجم العينة والرتب باستثناء حجم العينة $n = 9$ والرتب ($(1-3)$) تكون طريقة *M.W.* هي الأفضل .

4- في التوزيع المنتظم المستمر ان طريقة $O.L.S$ هي الأفضل مهما تغيرت الرتب وحجم العينة . أي حجم العينة والرتب ليس له تأثير في هذه الحالة .

5- في التوزيع الآسي وعند حجم العينة $n = 9$ هناك تفاوت في الطرق وعند حجم العينة $n = 15$ تكون طريقة *M.W.* هي الأفضل وعند زيادة حجم العينة $n = 35$ تكون طريقة $O.L.S$ هي الأفضل . في هذا التوزيع نلاحظ ان الطرائق بصورة عامة لا تتأثر برتب المتغيرات التوضيحية ولكن تتأثر بحجم العينة.

6- في توزيع كاما وللرتب ($(1-3)$) و ($(1-5)$) تكون طريقة $L.R.$ هي الأفضل مهما تغير حجم العينة وفي الرتب ($(1-7)$) تكون طريقة $O.L.S$ هي الأفضل عند حجم العينة $n = 9$ و

$n=35$ بينما عند $n=15$ فان طريقة *M.W.* هي الأفضل، في هذا التوزيع نلاحظ ان الطرائق تتأثر بحجم العينة وتتأثر برتب المتغيرات التوضيحية .

7- ان طريقة $O.L.S$ ليست الأفضل على الدوام في تقدير معلمات أنموذج الانحدار الخطي المتعدد المتغيرات في كافة التوزيعات وتكون الأفضل بزيادة حجم العينة والرتب ولكن في التوزيع الطبيعي و المنتظم المستمر تكون الأفضل مهما تغير حجم العينة والرتب .

8- في طريقة $L.R.$ نلاحظ ان قيم متوسط مربعات الخطأ العشوائي MSE و SMSE أيضا متقاربة قيما بينها مهما تغير حجم العينة والرتب ولا تتأثر بالتباين ، في كافة التوزيعات المستخدمة في الدراسة .

9- ان طريقة *M.W.* تكون جيدة فقط مع الرتب الصغيرة $(1-3)$ للعينات الصغيرة $n=9$ و $n=15$ في التوزيع الطبيعي فقط ، وتكون جيدة ايضا مع الرتب الصغيرة $(1-3)$ وحجم عينة $n=9$ في التوزيع الأسي.

(8-2)التوصيات

بناءً على الاستنتاجات التي تم توصل إليها نوصي بما يأتي:

1- دراسة طرائق تقدير معلمات أنموذج الانحدار اللامعلمي الخطي متعدد المتغيرات عند وجود قيم شاذة ومعالجتها.

2- دراسة الاختبارات الخاصة بمعلمات الانحدار الخطي اللامعلمي متعدد المتغيرات.

3- دراسة تطبيقية للانحدار اللامعلمي الخطي المتعدد المتغيرات للتنبؤ مثلاً بتلوث (النهر ، الهواء ، التربة) باستخدام بعض العوامل المؤثرة على التلوث (المصانع ، السكان).

4- دراسة مقدار التحيز للطرائق المستخدمة في تقدير معلمات الانحدار الخطي المتعدد المتغيرات دراسة تطبيقية .

المراجع

أولا : المراجع العربية

1- برى، عدنان ماجد عبد الرحمن، 2002، "النمذجة و المحاكاة"، جامعة الملك سعود،المملكة العربية السعودية .

2- الجواد ، ياسمين عبد الرحمن محمد ،(2007)،" تقدير دالة الانحدار اللامعلمي باستخدام بعض الطرائق اللامعلمية الرتيبة مع تطبيق عملي للمقارنة بينها "،رسالة ماجستير ،كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد - العراق (غير منشورة)

3- الراوي ، خاشع محمود ،(1987) ،"المدخل إلى تحليل الانحدار "، مديرية دار الكتب للطباعة والنشر -الموصل ،كلية الزراعة والغابات ، جامعة الموصل ،العراق

4- الراوي ، خاشع محمود و خلف الله ،عبد العزيز محمد (1980) ،" تصميم وتحليل التجارب الزراعية " ، مديرية دار الكتب للطباعة والنشر - الموصل ،جامعة الموصل ،العراق

5- الصياد ،جلال، وآخرون ،(2007) ،"مقدمة في الإحصاء "، دار الحافظ للطباعة والنشر ، دمشق- سوريا

6- هيكل،عبد العزيز فهمي ،(1966)،" الأساليب الإحصائية "،دار الكتاب ،بيروت، لبنان،

7- يونس ، طارق شريف و الدباغ ، رائد عبد القادر ،(2011) ، " التحليل الإحصائي مفاهيم - منهجية - تطبيقات استخدام البرمجية Minitab " ، جامعة العلوم التطبيقية - كلية العلوم الإدارية ، مملكة البحرين

ثانيا : المراجع الأجنبية

8- Adichie ,J. N. ,(1984), " Rank Tests in Linear Models " , Elsevier Science Publishers (1984) , pp 229-257

9- Berry, William D. and Feldman , stanley ,(1985)," Multiple Regression in practice" ,Sage Publication , Inc

10- Bhattacharyya , Gouri K. " Tests of Randomness against Trend or Serial Correlations " Elsevier Science Publishers(1984) ,pp 89-111

11- Bluman , Allan G.,(2012)," ELEMENTARY STATISTICS" ,8 ed ,The McGraw-Hill Companies, Inc. N.Y.,USA

12- Draper ,Norman R. and smith , harry,(1998), " Applied Regression Analysis " ,3rd ed, John Wiley & Sons ,USA

13- Gibbons, Jean Dickinson and Chakraborti. Subhabrata ,(2003) ," Nonparametric Statistical Inference ", Marcel Dekker, Inc, New York ,USA

14- Hajek, Jaroslav. Sidak, Zbynek. and Sen, Pranab K. (1999)," THEORY OF RANK TESTS " , ACADEMIC PRESS, Printed in the United States of America.

15- Hettmansperger, Thomas P and McKean. Joseph W.,(2010)," Robust Nonparametric Statistical Methods " Thomas P. Hettmansperger and Joseph W. McKean

16- Jureckova, Jana ,(1984), " M-, L- and R-estimators ",Elsevier Science Publishers (1984) pp 463-485

17- Khattree , Ravindra , and Naik Dayanand N. (2003)," Applied Multivariate Statistics with SAS", John Wiley & Sons ,USA

18- Meetings of the AMS and MAA .2009 Washington D.C.Joint from the contributed papers sessions on Innovative and Effective Ways to Teach Linear Algebra
http://faculty.pepperdine.edu/dstrong/LinearAlgebra/2009/

19- Puri , Madan Lal and Sen , Pranab Kumar (1985)," Nonparametric Methods in General Linear Models" , John Wiley & Sons ,USA

20- Saleh , A. K. Md. Ehsanes and Sen, Pranab Kumar ,(1984) ," Nonparametric Preliminary Test Inference",Elsevier Science Publishers (1984) ,pp 275-297
21- Sen , Pranab Kumar ,(1984), " Nonparametric Sequential Estimation" , Elsevier Science Publishers (1984) ,pp 487-514
22- Sen , Pranab Kumar, and Saleh, A. K. Md. Ehsanes Saleh(1978)," Nonparametric Estimation of Location Parameter After a Preliminary Test on Regression ", The Annals of Statistics, Vol. 6, No. 1 (Jan., 1978), pp. 154-168
23- Sprent, Peter and Smecton, N.C. (2001)."Applied nonparametric statistical methods".3rd ed, Chapman & Hall/CRC,N.Y.,USA

الملحق

العينة	الرتب		الطرائق	O.L.S	L.R.	M.W.
9	1 – 3	MSE	y_1	0.1361	0.7890	0.1003
			y_2	0.0121	0.6481	0.0300
		SMSE		0.1482	1.4371	0.1303
	1 – 5	MSE	y_1	0.1820	0.3879	0.1269
			y_2	0.0113	0.6453	0.0272
		SMSE		0.1933	1.0332	0.1541
	1 – 7	MSE	y_1	0.2650	0.5418	0.4218
			y_2	0.0448	0.8872	0.0744
		SMSE		0.3098	1.429	0.4962
15	1 – 3	MSE	y_1	0.0749	0.3489	0.0569
			y_2	0.0108	0.4769	0.0391
		SMSE		0.0857	0.8258	0.096
	1 – 5	MSE	y_1	0.0601	0.4566	0.1862
			y_2	0.0410	0.5928	0.1911
		SMSE		0.1011	1.0494	0.3773
	1 – 7	MSE	y_1	0.1042	1.0752	0.5470
			y_2	0.0221	0.6138	0.2150

		SMSE		0.1263	1.689	0.762
35	1 – 3	MSE	y_1	0.0386	0.3084	0.0968
			y_2	0.0026	0.3276	0.0311
		SMSE		0.0412	0.636	0.1279
	1 – 5	MSE	y_1	0.0381	0.4590	0.1184
			y_2	0.0065	0.3561	0.0527
		SMSE		0.0446	0.8151	0.1711
	1 – 7	MSE	y_1	0.0416	0.4858	0.1683
			y_2	0.0064	0.4683	0.1339
		SMSE		0.048	0.9541	0.3022

جدول رقم (1)

يوضح قيم مجموع متوسطات مربعات الخطأ العشوائي للتوزيع الطبيعي

العينة	الرتب		الطرائق	O.L.S	L.R.	M.W.
9	1 – 3	MSE	y_1	0.0960	0.6299	0.1800
			y_2	0.0055	0.6378	0.0566
		SMSE		0.1015	1.2677	0.2366
	1 – 5	MSE	y_1	0.0216	0.7016	0.2403
			y_2	0.0241	0.8852	0.2827
		SMSE		0.0457	1.5868	0.523
	1 – 7	MSE	y_1	0.1229	0.7238	0.2998
			y_2	0.0250	1.0356	0.2363
		SMSE		0.1479	1.7594	0.5361
15	1 – 3	MSE	y_1	0.1027	0.6393	0.1204
			y_2	0.0029	0.3972	0.0120
		SMSE		0.1056	1.0365	0.1324
	1 – 5	MSE	y_1	0.0469	0.6773	0.1640
			y_2	0.0154	0.5353	0.0145
		SMSE		0.0623	1.2126	0.1785

	1 – 7	MSE	y_1	0.0940	0.8973	0.4071
			y_2	0.0305	0.7568	0.1642
		SMSE		0.1245	1.6541	0.5713
35	1 – 3	MSE	y_1	0.0346	0.2996	0.0629
			y_2	0.0029	0.3235	0.0217
		SMSE		0.0375	0.6231	0.0846
	1 – 5	MSE	y_1	0.0574	0.3922	0.1277
			y_2	0.0032	0.3232	0.0361
		SMSE		0.0606	0.7154	0.1638
	1 – 7	MSE	y_1	0.0637	0.4365	0.1943
			y_2	0.0381	0.4083	0.2297
		SMSE		0.1018	0.8448	0.424

جدول رقم (2)

يوضح مجموع قيم متوسطات مربعات الخطأ العشوائي للتوزيع المنتظم

العينة	الرتب		الطرائق	O.L.S	L.R.	M.W.
9	1 – 3	MSE	y_1	1.0698	0.3050	1.0882
			y_2	0.0115	0.4661	0.0222
		SMSE		1.0813	0.7711	1.1104
	1 – 5	MSE	y_1	0.9005	0.5152	1.0331
			y_2	0.0077	0.7276	0.1853
		SMSE		0.9082	1.2428	1.2184
	1 – 7	MSE	y_1	0.5220	0.6070	0.3433
			y_2	0.0115	0.6613	0.0797
		SMSE		0.5335	1.2683	0.423
15	1 – 3	MSE	y_1	0.6245	0.1788	0.5033
			y_2	0.0048	0.3830	0.0204
		SMSE		0.6293	0.5618	0.5237

	1 – 5	MSE	y_1	0.4516	0.1380	0.2493
			y_2	0.0069	0.4629	0.0528
		SMSE		0.4585	0.6009	0.3021
	1 – 7	MSE	y_1	0.5760	0.1375	0.4938
			y_2	0.0112	0.5004	0.0699
		SMSE		0.5872	0.6379	0.5637
35	1 – 3	MSE	y_1	0.3562	0.1653	0.4988
			y_2	0.0056	0.2708	0.0168
		SMSE		0.3618	0.4361	0.5156
	1 – 5	MSE	y_1	0.2542	0.3485	0.4163
			y_2	0.0043	0.3112	0.0263
		SMSE		0.2585	0.6597	0.4426
	1 – 7	MSE	y_1	0.1019	0.6186	0.2479
			y_2	0.0077	0.5847	0.1872
		SMSE		0.1096	1.2033	0.4351

جدول رقم (3)

يوضح قيم مجموع متوسطات مربعات الخطأ العشوائي للتوزيع الأسي

العينة	الرتب		الطرائق	O.L.S	L.R.	M.W.
9	1 – 3	MSE	y_1	2.2360	0.5320	1.6046
			y_2	0.0200	0.6969	0.0314
		SMSE		2.256	1.2289	1.636
	1 – 5	MSE	y_1	1.5289	0.2297	0.9939
			y_2	0.0067	0.7102	0.1047
		SMSE		1.5356	0.9399	1.0986
	1 – 7	MSE	y_1	0.3409	0.4904	0.3163
			y_2	0.0315	0.9016	0.2858
		SMSE		0.3724	1.392	0.6021

15	1 – 3	MSE	y_1	2.3527	0.4266	1.3901
			y_2	0.0127	0.3321	0.0126
		SMSE		2.3654	0.7587	1.4027
	1 – 5	MSE	y_1	0.9048	0.3409	0.9007
			y_2	0.0030	0.4583	0.0710
		SMSE		0.9078	0.7992	0.9717
	1 – 7	MSE	y_1	1.1487	0.4251	0.7741
			y_2	0.0476	0.5732	0.0861
		SMSE		1.1963	0.9983	0.8602
35	1 – 3	MSE	y_1	0.8845	0.2158	0.7260
			y_2	0.0147	0.2532	0.0556
		SMSE		0.8992	0.469	0.7816
	1 – 5	MSE	y_1	1.5143	0.3345	1.0614
			y_2	0.0063	0.3740	0.0374
		SMSE		1.5206	0.7085	1.0988
	1 – 7	MSE	y_1	0.5208	0.2532	0.6085
			y_2	0.0268	0.3129	0.1450
		SMSE		0.5476	0.5661	0.7535

جدول رقم (4)

يوضح قيم مجموع متوسطات مربعات الخطأ العشوائي للتوزيع كاما

Sample size	توزيع	الطرائق الأفضل		
		1 - 3	1 - 5	1 - 7
9	الطبيعي	M.W.	O.L.S	O.L.S
	المنتظم	O.L.S	O.L.S	O.L.S
	الأسي	L.R.	O.L.S	M.W.
	كاما	L.R.	L.R.	O.L.S

15	الطبيعي	O.L.S	O.L.S	O.L.S
	المنتظم	O.L.S	O.L.S	O.L.S
	الأسي	M.W.	M.W.	M.W.
	كاما	L.R.	L.R.	M.W.
35	الطبيعي	O.L.S	O.L.S	O.L.S
	المنتظم	O.L.S	O.L.S	O.L.S
	الأسي	O.L.S	O.L.S	O.L.S
	كاما	L.R.	L.R.	O.L.S

جدول رقم (5)

يوضح الطرائق الأفضل للتوزيع الطبيعي والتوزيع المنتظم والتوزيع الأسي وتوزيع كاما