المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (25) 2013
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي السادس لكلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص[198-216]

# مقارنة بين العملية التصادفية الهندسيةو عملية متعلقة بها مع التطبيق

د. مثنى صبحي سليمان* عمر رمزي جاسم**

**المستخلص**

تم في هذا البحث مقارنة العملية التصادفية الهندسية مع عملية متعلقة بها ألا وهي عملية متسلسلة α التصادفية، للوصول إلى أفضل عملية تُستخدم لتحليل البيانات ذوات الاتجاه الرتيب. وتستخدم طريقة العزوم المعدلة وطريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمات كل من العملية التصادفية الهندسية وعملية متسلسلة α على افتراض إن التوزيع الاحتمالي للتوقف الأول هو توزيع اللوغاريتم الطبيعي. وتجرى مقارنة بين هاتين العمليتين بالاعتماد على معايير المقارنة المقترحة في البحث. كذلك تُدرس أوقات التشغيل المتتالية بين الأعطال لطاحونة المواد الأولية التابع للشركة العامة للسمنت الشماليةو اختبار فيما إذا كانت البيانات تتبع العمليتين أم لا، فضلاً عن تقدير معلمات العمليتين التصادفية والمقارنة فيما بينهما.

الكلمات الدالة: العملية الهندسية، العزوم المعدلة، عملية متسلسلة α، الإمكان الاعظم، معمل السمنت.

# A Comparison Between The Geometric Stochastic Process and a Related Process with an Application

## Abstract

In this research, we compared the geometric stochastic process with a related process ($\alpha$-series stochastic process), in order to reach to the best process used to analyze monotone trend data, by using the modified moments and the maximum likelihood methods to estimate the parameters of the geometric stochastic process and $\alpha$-series stochastic process, on the assumption that the probability distribution for the first stop is lognormal. The comparison between these two processes, depending on the criteria proposed in the search.

*Keyword: geometric process, modified moment, α –Series Process, maximum likelihood, Cement factory.*

* أستاذ مساعد / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات / جامعة الموصل

** باحث / قسم الإحصاء والمعلوماتية / كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

**تاريخ استلام البحث** 2013/10/6 ———— **تأريخ القبول** 2013/11/21

We also studied the successive inter arrival between failures of the General Company of Northern Cement and test whether the data follow processes or not, as well as estimating the parameters of the processes and compared them.

**(1) المقدمــة:**

تُعدّ العمليات التصادفية (*Stochastic Processes*) إحدى العمليات التي لها أهمية خاصة في العديد من المجالات الحيوية، إذ توسعت وتشعبت تطبيقاتها في شتى المجالات الطبية والحياتية والفيزيائية والاقتصادية حتى أضحت من أكثر النظريات استخداماً في مجالات الحياة المختلفة[ جاسم ،2013 ].

وتُعرّف العملية التصادفية بأنها ظاهرة سلوكها غير حتمي( *Non-Deterministic*)، أي أن متغيراتها تضم قيماً لا يمكن قياسها بدقة أو السيطرة عليها بصورة تامة، وعليه فإن حالة النظام اللاحقة تكون محددة بكل من الأفعال المتوقّعة القابلة للتنبؤ بالعملية وكذلك من قبل عنصر عشوائي.

وتُعدّ العملية الهندسية (*Geometric Process*(*GP*)) أحدى أهم أنواع العمليات التصادفية ذات الأهمية البالغةو لاسيما في مجال التطبيقات الواقعية، وتعرّف بأنها عملية تصادفية ذات فضاء معلمة T مستمر والذي يمثل الزمن، وفضاء حالة S متقطع.

بينما تُعدّ عملية متسلسلة $\alpha$ (*$\alpha$ -Series Stochastic Process*) من العمليات التصادفية المرتبطة بالعملية الهندسية، أذ تُعدّ من العمليات التصادفية الرتيبة التي تمتاز في العديد من المميزات من ضمنها سهولة إجراءاتها وإمكانية معالجة العديد من المشكلات في المجالات المختلفة [ جاسم ،2013 ].

ويُعدّ نموذج العملية التصادفية الهندسية ونموذج عملية متسلسلة $\alpha$ التصادفية من الأدوات المفيدة لدراسة الأنظمة المتدهورة (*Deteriorating Systems*) القابلة للتصليح في مشكلة الصيانة(*Maintenance Problem* )، فضلاً عن كون كل من النموذجين يمتلكان عدة استخدامات كتحديد سياسة الاستبدال المثلى فضلاً عن تحديد السياسة المثلى لتصليح النظام(*The Optimal Inspection Repair Replacement Policy*)، كما يمثلان أداة رئيسة في تحليل البيانات ذوات الاتجاه الرتيب[*Chen et al.*,2010] .

**(2) العملية الهندسية: *Geometric Process(GP)***

تُعدّ العملية الهندسية (*GP*) من العمليات التصادفية ذوات الاتجاه الرتيب البسيط، فهي تعميماً لعملية التجديد ((*Renewal Process* (*RP*))، وتعود الفكرة الأولى للعملية الهندسية إلى الباحث [*Lam,1988*]، إذ إنه أول من قدّم هذه العملية ودرس خصائصها

ومميزاتها، وهناك العديد من الدراسات والبحوث الحديثة التي قامت بتطوير العملية الهندسية وتحسينها نظرياً وتطبيقياً من قبل العديد من الباحثين[ *Lam et al., 2004*] .

يُقال للعملية التصادفية $\{X_i, i = 1,2,...\}$ ذات المتغيرات العشوائية غير السالبة عملية هندسية $(GP)$، إذا كانت هناك قيمة مثل $a$ بحيث تمثل قيمة حقيقية أكبر من الصفر $(a > 0)$ يطلق عليها بنسبة العملية الهندسية$(Ratio\ \ of\ \ GP)$. وتقيس هذه النسبة الاتجاه وقوة الاتجاه للعملية الهندسية، كما أنها تحدد شكل العملية التصادفية الهندسية وكالآتي: [*Lam et al. ,2004* ]

- أذا كانت $(a > 1)$، تكون العملية الهندسية متناقصة عشوائياً أي *(Stochastically Decreasing)*

  أن: $X_i >_{st} X_{i+1} \qquad \forall\, i = 1,2,\ldots$

- أذا كانت $(0 < a < 1)$، تكون العملية الهندسية متزايدة عشوائياً أي *(Stochastically Increasing)*

  أن: $X_i \leq_{st} X_{i+1} \qquad \forall\, i = 1,2,\ldots$

- أذا كانت$(a = 1)$، فإن العملية الهندسية تصبح عملية تجديد(RP)، لذا فإن العملية الهندسية تُعدّ تعميماً لعملية التجديد[*Aydoğdu et al.,2010b*] .

إن معلمات العملية التصادفية الهندسية تكون بالصيغة الآتية:

$$X_i = \frac{Y_i}{a^{i-1}} \qquad \ldots(1)$$

إذ إن $Y_i$ تمثل أول وقت أخفاق.

$$Y_i = a^{i-1} X_i \qquad \ldots(2)$$

ويمثل متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع $(i.i.d)$. وإن توقع $X_i$ يكون بالصيغة الآتية:[*Cheng and Li,2011*]

$$E[X_i] = \frac{E[Y_i]}{a^{i-1}} \qquad \ldots(3)$$

وبما أن $E[Y_i] = \mu$ فإن:

$$E[X_i] = \frac{\mu}{a^{i-1}} \qquad \ldots(4)$$

أما تباين $X_i$ فيكون بالصيغة الآتية:

$$Var[X_i] = Var\left[\frac{Y_i}{a^{i-1}}\right] = \frac{Var[Y_i]}{(a^{i-1})^2} = \frac{Var[Y_i]}{a^{2(i-1)}}$$

وبما أن $Var[Y_i] = \sigma^2$ ،عليه فإن:

$$Var\,[X_i] = \frac{\sigma^2}{a^{2(i-1)}} \qquad \ldots(5)$$

مما تقدم يُلاحظ أن $a$ و $\mu$ و $\sigma^2$ تمثل معلمات العملية الهندسية، وذلك لكون معرفة تقدير تلك المعلمات يؤدي إلى معرفة كل من توقع العملية الهندسية وتباينها فضلاً عن اتجاه العملية.

### (3) عملية متسلسلة $\alpha$ التصادفية: $\alpha$ -Series Stochastic Process (SP)

تُعدّ عملية متسلسلة $\alpha$ من العمليات التصادفية المرتبطة بالعملية الهندسية، فهّي من العمليات التصادفية الرتيبة التي تعود فكرتها إلى الباحث [*Braun et al.*,2005]، وهو أول من قّدم هذه العملية ودرس خصائصها.

إن عملية متسلسلة $\alpha$ تتشارك في العديد من المميزات مع العملية الهندسية، فضلاً عن كونها لا تحتاج إلى افتراضات أو توزيعات معينة ماعدا بعض الشروط المطلوبة، وكما تسمى أيضا **بعملية القوى $\alpha$** (*$\alpha$-Power Process*) وذلك لكون ثابت العملية مرفوع للقوى .

يُقال للعملية التصادفية $\{X_i, i=1,2,\ldots\}$ ذات المتغيرات العشوائية غير السالبة عملية متسلسلة $\alpha$ إذا كانت هنالك قيمة مثل $\alpha$ بحيث تمثل قيمة حقيقية يُطلق عليها أس العملية (*Exponent of the Process*)، وهي تقيس الاتجاه وقوة الاتجاه للعملية، فضلاً عن أنها تُحدد شكل عملية متسلسلة $\alpha$ وتكون بثلاث صور وكالآتي: [*Tang and Liu., 2006*]

- إذا كانت $(\alpha > 0)$، تكون عملية متسلسلة $\alpha$ متناقصة عشوائياً أي *(Stochastically Decreasing)*
  أن: $X_i >_{st} X_{i+1} \qquad \forall\, i = 1,2,\ldots$
- وإذا كانت $(\alpha < 0)$، تكون عملية متسلسلة $\alpha$ متزايدة عشوائياً أي *(Stochastically Increasing)*
  أن: $X_i \leq_{st} X_{i+1} \qquad \forall\, i = 1,2,\ldots$
- وإذا كانت $(\alpha = 0)$، تكون عملية متسلسلة $\alpha$ عبارة عن عملية تجديد ( *RP*) لذا فإن عملية متسلسلة $\alpha$ تُعدّ تعميماً لعملية التجديد.

وإن معلمات عملية متسلسلة $\alpha$ تكون بالصيغة الآتية:[*Yu-xia, 2007*]

$$X_i = \frac{Y_i}{i^\alpha} \qquad \ldots(6)$$

إذ إن $Y_i$ يمثل أول أوقات الإخفاق ويمثل متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة التوزيع ( *i.i.d* ).

كما إن توقع $X_i$ يكون بالصيغة الآتية:

$$E[X_i] = \frac{E[Y_i]}{i^{\alpha}} \quad \dots (7)$$

وبما أن $E[Y_i] = \mu$ فإن:

$$E[X_i] = \frac{\mu}{i^{\alpha}} \quad \dots (8)$$

أما تباين $X_i$ فيكون بالصيغة الآتية:[*Braun et al., 2008*]

$$Var(X_i) = \frac{Var[Y_i]}{i^{2\alpha}} = \frac{\sigma^2}{i^{2\alpha}} \quad \dots (9)$$

مما تقدم يُلاحظ أن $\alpha$ و $\mu$ و $\sigma^2$ تمثل معلمات لعملية متسلسلة $\alpha$، وذلك كون معرفة تلك المعلمات يؤدي إلى معرفة كل من توقع العملية وتباينها فضلاً عن اتجاه العملية وقوتها.

**(4) الإجراءات المتبعة لاختبار العملية الهندسيةو عملية متسلسلة $\alpha$:**

***Procedures for Testing Geometric Process and $\alpha$ − Series Process***

يُعدّ اختبار ملاءمة البيانات للعملية التصادفية الهندسية وعملية متسلسلة $\alpha$ من المواضيع الضرورية لدراسة سلوك العمليتين، فعند تطبيق العملية الهندسية وعملية متسلسلة $\alpha$ على بيانات حقيقية نواجه عدة مشكلات أساسية أهمها مدى ملاءمة بيانات الدراسة للعمليتين، ولغرض نمذجة مجموعة البيانات$\{X_i, i = 1,2,...\}$ يتطلب الامر اتباع الخطوتين الاتيتين:

**أولاً: اختبار الاتجاه الرتيب في مجموعة البيانات:**

***Testing for Monotone Trend in the Data Set***

لغرض إجراء التحليل الإحصائي للعمليتين، يجب أولا اختبار فيما إذا كان هناك اتجاه رتيب في البيانات، فإذا ما اثبت الاختبار عدم وجود اتجاه، فإن عملية التجديد(*RP*) تكون أفضل للاستخدام، إذ إن هذه الحالة عادةً ما تكون نادرة لكون أوقات التشغيل المتعاقبة عادةً ما تتبع اتجاهاً رتيباً سواء كان متزايداً أم متناقصاً بسبب التأثير المتراكم للأعطال، فضلاً عن تلف بعض مكونات النظام[*Aydoğdu et al.,2010b*] .

وهناك العديد من التقنيات المستخدمة لاختبار الاتجاه الرتيب والتي ناقشها الباحثين [*Cox and Lewis,1966*] ، وقد تم استخدام الاختبار الاتي:

**اختبار مان للاتجاه:** ***Mann Test for Trend***

يُعدّ اختبار مان من الاختبارات اللامعلميه المهمة لاختبار الاتجاه الرتيب في مجموعة البيانات، ولإجراء ذلك نحتاج إلى صياغة الفرضيتين الآتيتين:[*Aydoğdu & Kara, 2012*]

$H_0$: لا يوجد اتجاه رتيب في البيانات

$H_1$: يوجد اتجاه رتيب في البيانات

لقد اقترح الباحثان [Ascher and Feingold ,1984] استخدام جميع المعلومات المعنية في مجموعة البيانات، وعلى افتراض أن أوقات التشغيل المتعاقبة (Working Time) هي $\{X_i, i = 1,2,\ldots,n\}$، فإنه يتم تعريف المتغير العشوائي(M) وذلك من خلال مقارنة كافة أوقات التشغيل المتتالية $X_i$ مع $X_j$ عندما ($i < j$)، وحساب عدد مرات $(X_i < X_j)$ عندما ($i < j$) أي أن:

$$M = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} I(X_i < X_j) \qquad ; \ \forall\, i < j \qquad \ldots (10)$$

إذ إن $I(A)$ يمثل المؤشر للحدث A والذي يساوي أما صفراً أو واحداً.

كما أن توقع وتباين $M$ يكون بالصيغتين الآتيتين:

$$\mathrm{E}[M] = \frac{n(n-1)}{4} \qquad \ldots (11)$$

$$Var(\mathrm{M}) = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{72} \qquad \ldots (12)$$

عليه فإن المُختبر الإحصائي لاختبار الفرضية أعلاه يكون على النحو الآتي:

$$R = \frac{M + 0.5 - \mathrm{E}[M]}{\sqrt{\mathrm{Var(M)}}} \qquad \ldots (13)$$

إذ إن: $R \sim N(0,1)$

أما الثابت 0.5 الذي أُضيف فهو لغرض تصحيح الاستمرارية.

**ثانياً: اختبار فيما إذا كانت البيانات تتفق مع العملية الهندسية وعملية متسلسلة-$\alpha$:**

***Testing Whether the Data Come from the GP and $\alpha -$ Series Process***

بعد التحقق من وجود اتجاه رتيب في البيانات ولغرض اختبار فيما إذا كانت البيانات تتفق مع العمليتين، فإننا نحتاج إلى صياغة الفرضية الآتية:

$H_0$: البيانات تتبع العملية التصادفية

$H_1$: البيانات لا تتبع العملية التصادفية

ولاختبار الفرضية أعلاه فقد تم استخدام الطريقة البيانية وكما يلي:

- **الطريقة البيانية لاختبار العملية التصادفية الهندسية:**

تُعدّ الطريقة البيانية من الطرائق السهلة لاختبار فيما إذا كانت مجموعة البيانات تتفق مع العملية الهندسية ام لا[Lam, 1992] .

ومن خلال المعادلة (2) وبعد أخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين يتم الحصول على:

$$\ln Y_i = (i-1)\ln a + \ln X_i \qquad i = 1,2,3,\dots \qquad \dots(14)$$

وبما أن $Y_i$ عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع (من تعريف العملية الهندسية) عليه يمكن تعريف نموذج الانحدار الخطي البسيط بالآتي:

$$\ln Y_i = \lambda + e_i \qquad i = 1,2,3,\dots \qquad \dots(15)$$

إذ إن:

$$E[\ln Y_i] = \lambda \qquad \text{and} \qquad Var[\ln Y_i] = \tau^2 \qquad \dots(16)$$

كما أن الأخطاء تتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي صفر وتباين $\tau^2$ أي أن:

$$e_i \sim N(0,\tau^2)$$

وبمساواة المعادلتين (14) و (15) مع بعضهما يتم الحصول على العادلة الآتية:

$$\ln X_i = \lambda - (i-1)\ln a + e_i \qquad i = 1,2,3,\dots \qquad \dots(17)$$

وعليه فإن:

$$\ln X_i = (\lambda + \ln a) - i\ln a + e_i \qquad i = 1,2,3,\dots \qquad \dots(18)$$

ثم يرسم اللوغاريتم الطبيعي للعملية الهندسية مع الزمن، فإذا كان الرسم الانتشاري يظهر نمطاً معيناً أو علاقة خطية فهذا يدل على إن مجموعة البيانات تتفق مع العملية الهندسية.

- **الطريقة البيانية لاختبار عملية متسلسلة-$\alpha$ التصادفية:**

بما أن:[*Aydoğdu & Kara, 2012*]

$$Y_i = i^{\alpha} X_i \qquad i = 1,2,\dots,n$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين يتم الحصول على:

$$\ln Y_i = \alpha \ln i + \ln X_i \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad \dots(19)$$

وبما أن $Y_i$ عبارة عن متغير عشوائي مستقل وله نفس التوزيع، عليه يمكن استخدام نموذج الانحدار الخطي البسيط (*Simple Linear Regression Model*) وبالشكل الآتي:

$$\ln Y_i = \beta + e_i \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad \dots(20)$$

إذ إن:

$$E[\ln Y_i] = \beta \quad ; \quad E[e_i] = 0$$

كما إن:

$$Var(\ln Y_i) = Var(e_i) = \sigma_e^2 \qquad \dots(21)$$

وبدمج المعادلتين (19) و(20) مع بعضهما واعادة ترتيبها يتم الحصول على:

$$\ln X_i = \beta - \alpha \ln i + e_i \qquad \dots(22)$$

ثم يرسم اللوغاريتم الطبيعي لعملية متسلسلة α $(\ln X_i)$ ضد اللوغاريتم الطبيعي للزمن $(\ln i)$، فإذا كان الرسم الانتشاري يظهر نمطاً او علاقة خطية فهذا يدل إن مجموعة البيانات تتفق مع عملية متسلسلة α .

**(5) تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية:**

***Parameters Estimation of Geometric Stochastic Process***

يُعدّ التقدير *(Estimation)* احد الأركان الأساسية للاستدلال الإحصائي*(Statistical Inference)*، إذ إن عملية التقدير لمعلمات مجتمع معين ما هو إلا تقريب للخصائص الاصلية للمجتمع الذي سحبت منه العينات، كما يتم من خلاله الحصول على الاستنتاجات حول المجتمع على أساس النتائج المستخرجة من العينة المسحوبة من ذلك المجتمع.

**(1-5) طريقة العزوم المعدلة:** ***Modified Moments Method ( MME)***

تُعدّ طريقة العزوم من الطرائق البسيطة في إيجاد التقديرات اللامعلمية لمعلمات العملية التصادفية الهندسية، إذ إنها تعتمد على فكرة مساواة عزوم المجتمع مع عزوم العينة للحصول على تقديرات لمعلمات المجتمع، والصيغ الآتية تُوضح التقديرات اللامعلمية لمعلمات العملية الهندسية باستخدام طريقة العزوم المعدلة:*[Cheng and Li,2011]* .

$$\hat{a}_{MM} = \hat{a}_{Log-LSE} \qquad \dots(23)$$

$$\hat{\mu}_{MM} = \begin{cases} \bar{\hat{Y}} & ,a \neq 1 \\ \bar{X} & ,a = 1 \end{cases} \qquad \dots(24)$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{MM} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2}{(n-1)} & ,a \neq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)} & ,a = 1 \end{cases} \qquad \dots(25)$$

إذ إن: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ , $\bar{\hat{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i}{n}$ , $\hat{Y}_i = \hat{a}^{i-1}{}_{Log-LSE} X_i$

**(2-5) طريقة الإمكان الأعظم :** ***Maximum Likelihood Method(MLE)***

لغرض تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية بطريقة معلمية يتطلب ذلك افتراض إن المتغير العشوائي $Y_i$ يتبع احد توزيعات الحياة *(Lifetime Distribution)* منها التوزيع الأُسي وتوزيع كاما والتوزيع اللوغاريتم الطبيعي وتوزيع وايبل. إذ إن لهذه التوزيعات أهمية كبيرة في تطبيقات الهندسة الوثوقية*(Reliability Engineering)*. وكخطوة أولى يتم

تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية بطريقة لامعلمية، ومن ثم يتم إيجاد قيمة المتغير العشوائي $Y_i$ وذلك من خلال المعادلة الآتية:

$$\hat{Y}_i = \hat{a}^{i-1} X_i \qquad \dots(26)$$

ليكن لدينا العملية التصادفية الهندسية $\{X_i, i = 1,2,\dots,n\}$ وعلى فرض أن $(Y_i)$ يتبع توزيع اللوغاريتم الطبيعي وذلك بدالة كثافة احتمالية بالشكل الاتي:

$$f(Y_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}\, Y_i} exp\left[-\frac{1}{2\tau^2}(ln\, Y_i - \mu)^2\right] & , \quad Y_i > 0 \\ 0 & , \quad Y_i \le 0 \end{cases} \qquad \dots(27)$$

إذ إن توقع وتباين $Y_i$ والعزوم من الدرجة (K) يكون حسب المعادلات الآتية:

$$E[Y_i] = \lambda = \exp(\mu + \frac{1}{2}\tau^2),$$

$$Var[Y_i] = \sigma^2 = \lambda^2[\exp(\tau^2) - 1] \qquad \dots(28)$$

$$E[Y_i^k] = M_k = \lambda^k \exp\{\frac{1}{2}k(k-1)\tau^2\} \quad , k = 1,2,\dots$$

وباستخدام التحويل الجاكوبي *(Jacobian Transformation)* بعد تعويض المعادلة (2) فيها يتم الحصول على:[*Lam and Chan*,1998]

$$f(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}\, X_i} exp\left[-\frac{1}{2\tau^2}\left(\ln(a^{i-1}X_i) - \mu\right)^2\right] \qquad X_i > 0 \qquad \dots(29)$$

وإن دالة الإمكان للعملية الهندسية في حالة توزيع اللوغاريتم الطبيعي تكون بالشكل الآتي:

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\tau^2)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n} X_i} exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(a^{i-1}X_i) - \mu\right)^2\right\} \qquad \dots(30)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (30) يتم الحصول على:

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\tau^2) - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(a^{i-1}X_i) - \mu\right)^2 \qquad \dots(31)$$

عليه فإن مقدّر الإمكان الأعظم للمعلمات $\ln \hat{a}_L$، $\hat{\mu}_L$ و $\hat{\tau}^2{}_L$ تكون في الصيغ الاتية:

$$\ln \hat{a}_L = \frac{6}{(n-1)n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(n - 2i + 1)\ln X_i \qquad \dots(32)$$

$$\hat{\mu}_L = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(2n - 3i + 2)\ln X_i \qquad \dots(33)$$

$$\hat{\tau}^2{}_L = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right)^2 - \frac{1}{2}\ln \hat{a}_L \sum_{i=1}^{n} (n-2i+1)\ln X_i\right\} \quad ...(34)$$

عليه فإن مقّدِات الإمكان الأعظم لمعلمات العملية التصادفية الهندسية في حالة التوزيع اللوغاريتم الطبيعي يكون حسب الصيغ الآتية:

$$\hat{a}_{MLE} = exp\,(\ln \hat{a}_L) \quad ...(35)$$

$$\hat{\mu}_{MLE} = \exp\left(\hat{\mu}_L + \frac{\hat{\tau}^2{}_L}{2}\right) \quad ...(36)$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{MLE} = \hat{\mu}^2_{MLE}[\exp(\hat{\tau}^2{}_L) - 1] \quad ...(37)$$

**(6) تقدير معلمات عملية متسلسلة $\alpha$ التصادفية:**

***Parameters Estimation of $\alpha$ -Series Stochastic Process***

**(1-6) طريقة العزوم المعدلة:** ***Modified Moments Method (MME)***

سميت بهذا الاسم وذلك لكون إن معلمة عملية متسلسلة $\alpha$ يتم تقديرها باستخدام طريقة المربعات الصغرى، في حين يتم تقدير كل من معلمة المتوسط ومعلمة التباين باستخدام طريقة العزوم. والصيغ الآتية توُضح التقديرات اللامعلمية لمعلمات عملية متسلسلة $\alpha$ باستخدام طريقة العزوم المعدلة: *[Cheng and Li,2011]*

$$\hat{\alpha}_{MM} = \hat{\alpha}_{Log-LSE} \quad ...(38)$$

$$\hat{\mu}_{MM} \begin{cases} \bar{\hat{Y}} & ,\alpha \neq 0 \\ \bar{X} & ,\alpha = 0 \end{cases} \quad ...(39)$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{MM} \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}}\right)^2}{(n-1)} & ,\alpha \neq 0 \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)} & ,\alpha = 0 \end{cases} \quad ...(40)$$

أذ إن: $\hat{Y}_i = i^{\hat{\alpha}_{Log-LSE}} X_i \quad , \quad \bar{\hat{Y}} = \sum_{i=1}^{n} {\hat{Y}_i}/{n} \quad , \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} {X_i}/{n}$

**(2-6) طريقة الإمكان الأعظم :** ***Maximum Likelihood Method(MLE)***

كما هو معلوم فالغرض تقدير معلمات عملية متسلسلة $\alpha$ بطريقة معلمية يتطلب ذلك وضع شرط إضافي على البيانات ألا وهو إن المتغير العشوائي $Y_i$ يتبع إحدى توزيعات الفشل

المعروفة، إذ تم افتراض إن المتغير العشوائي $Y_i$ يتبع توزيع اللوغاريتم الطبيعي وعلى النحو الآتي:

من خلال المعادلة (27) وباستخدام التحويل الجاكوبي بعد تعويض المعادلة (6) فيها يتم الحصول على:

$$f(X_i) = f(Y_i) * \left|\frac{\partial Y_i}{\partial X_i}\right|_{Y_i = i^{\alpha} X_i} \qquad ...(41)$$

وعليه فإن:

$$f(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}\, X_i} exp\left[-\frac{1}{2\tau^2}(\ln(i^{\alpha} X_i) - \mu)^2\right] \quad ; \quad X_i > 0 \qquad ...(42)$$

إن دالة الإمكان لعملية متسلسلة $\alpha$ مع التوزيع اللوغاريتم الطبيعي تكون بالشكل الآتي:

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\tau^2)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n} X_i} exp\left\{-\frac{1}{2\,\tau^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln(i^{\alpha} X_i) - \mu)^2\right\} \qquad ...(43)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين يتم الحصول على:

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\tau^2) - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln(i^{\alpha} X_i) - \mu)^2 \qquad ...(44)$$

وعليه فإن مقدّر الإمكان الأعظم للمعلمة $\mu$ يتم الحصول عليه باشتقاق المعادلة(44) بالنسبة إلى $\mu$ ومساواتها بالصفر أي إن:

$$-\frac{1}{2\tau^2} * 2\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(i^{\hat{\alpha}_L} X_i\right) - \mu\right) * (-1) = 0 \qquad ...(45)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(i^{\hat{\alpha}_L} X_i\right) - n\hat{\mu}_L = 0 \qquad ...(46)$$

$$\hat{\mu}_L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(i^{\hat{\alpha}_L} X_i\right) \qquad ...(47)$$

ولإيجاد مقدّر الإمكان الأعظم لمعلمة عملية متسلسلة $\alpha$ يتم اشتقاق المعادلة(44) بالنسبة إلى المعلمة ($\alpha$) ثم مساواتها بالصفر وكالآتي:

$$-\sum_{i=1}^{n} [\hat{\alpha}_L \ln i + \ln X_i - \hat{\mu}_L] * \ln i = 0$$

$$-\hat{\alpha}_L \sum_{i=1}^{n} (\ln i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \ln i \ln X_i + \hat{\mu}_L \sum_{i=1}^{n} \ln i = 0 \qquad ...(48)$$

وبتعويض المعادلة (47) في المعادلة (48) يتم الحصول على:

$$-\hat{\alpha}_L \sum_{i=1}^{n} (\ln i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \ln i \ln X_i + \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\hat{\alpha}_L \ln i + \ln X_i]\right] \sum_{i=1}^{n} \ln i = 0$$

وبعد إجراء بعض التبسيطات على المعادلة أعلاه يتم الحصول على:

$$\hat{\alpha}_L \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \ln i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} (\ln i)^2\right] - n\sum_{i=1}^{n} \ln i \ln X_i + \sum_{i=1}^{n} \ln i \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = 0 \qquad \dots (49)$$

عليه فإن مقدّر الإمكان الأعظم لمعلمة عملية متسلسلة $\alpha$ يكون بالشكل الآتي:

$$\hat{\alpha}_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln i \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - n\sum_{i=1}^{n} \ln i \ln X_i}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln i\right)^2} \qquad \dots (50)$$

وبتعويض المعادلة(50) في المعادلة (47) يتم الحصول على:

$$\hat{\mu}_L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln i \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - n\sum_{i=1}^{n} \ln i \ln X_i}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln i\right)^2}\right] \ln i + \ln X_i\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln i \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - n\sum_{i=1}^{n} \ln i \ln X_i}{n\sum_{i=1}^{n} (\ln i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln i\right)^2} \sum_{i=1}^{n} \ln i + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right] \qquad \dots (51)$$

وبأجراء بعض التبسيطات للمعادلة (51) يتم الحصول على:

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln i \sum_{i=1}^{n} \ln i \ln X_i - \sum_{i=1}^{n} (\ln i)^2 \sum_{i=1}^{n} \ln X_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} \ln i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} (\ln i)^2} \qquad \dots (52)$$

وللحصول على مقدّر الإمكان الأعظم لمعلمة تباين التو يع اللوغاريتم الطبيعي$\tau^2$، نقوم باشتقاق المعادلة (44) بالنسبة إلى $\tau^2$ ومساواتها بالصفر أي إن:

$$\hat{\tau}_L^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(i^{\hat{\alpha}_L} X_i) - \hat{\mu}_L\right)^2 \qquad \dots (53)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\hat{\alpha}_L \ln i + \ln X_i - \hat{\mu}_L]^2 \qquad \dots (54)$$

وبتعويض المعادلة (47) في المعادلة (54) يتم الحصول على:

$$\hat{\tau}_L^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{\alpha}_L \ln i + \ln X_i - \frac{\hat{\alpha}_L}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right]^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\ln X_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln X_j\right)+\hat{\alpha}_L\left(\ln i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln j\right)\right]^2 \quad \dots(55)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\ln X_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln X_j\right)^2 + 2\hat{\alpha}_L\left(\ln X_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln X_j\right)\left(\ln i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln j\right) + \hat{\alpha}_L{}^2\left(\ln i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln j\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\ln X_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln X_j\right)^2-2\hat{\alpha}_L\{\sum_{i=1}^{n}\ln i\sum_{j=1}^{n}\ln X_j - n\sum_{i=1}^{n}\ln i\ln X_i\}+\hat{\alpha}_L{}^2\sum_{i=1}^{n}\left(\ln i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln j\right)^2\right] \quad \dots(56)$$

وبعد إجراء بعض التبسيطات على المعادلة (56) يتم الحصول على المعادلة الآتية:

$$\hat{\tau}_L^2=\frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i)^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2\right)-\hat{\alpha}_L{}^2\left(\sum_{i=1}^{n}(\ln i)^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln i\right)^2\right)\right] \quad \dots(57)$$

عليه فإن مقّدر الإمكان الأعظم لمعلمات عملية متسلسلة α في حالة التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي يكون حسب الصيغ الآتية:

$$\hat{\alpha}_{MLE}=\hat{\alpha}_L \quad \dots(58)$$

$$\hat{\mu}_{MLE}=\exp\left(\hat{\mu}_L+\frac{\hat{\tau}^2{}_L}{2}\right) \quad \dots(59)$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{MLE}=\hat{\mu}_{MLE}^2[\exp(\hat{\tau}^2{}_L)-1] \quad \dots(60)$$

## (7) اختبار جودة التوافق: ***Goodness of Fit Test***

هنالك العديد من المعايير المستخدمة في اختبار جودة التوافق، اذ تم في هذا البحث استخدام المعيارين التاليين للمقارنة :

### (1-7) متوسط مربعات الخطأ: ***Mean Squares Error(MSE)***

ُيعدّ هذا المعيار من المعايير الشائعة الاستخدام في هذا المجال، وذلك لكونه يقيس التركيب العام المناسب فضلاً عن إنهُ مقياس عام يضم كلاً من التباين والتحيز، ويكون بالصيغة الآتية:

$$MSE=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{X}_i)^2 \quad \dots(61)$$

إذ إن $\hat{X}_i$ تمثل القيمة المقدّرة لمجموعة البيانات $\{X_i, i = 1,2,\dots,n\}$، ويتم الحصول عليها من خلال المعادلة الآتية بالنسبة إلى العملية الهندسية:

$$\hat{X}_i = \frac{\hat{\mu}}{\hat{a}^{i-1}} \quad \dots(62)$$

في حين يتم الحصول عليها من خلال المعادلة الاتية بالنسبة إلى عملية متسلسلة $\alpha$.

$$\hat{X}_i = \frac{\hat{\mu}}{i^{\hat{a}}} \quad \dots(63)$$

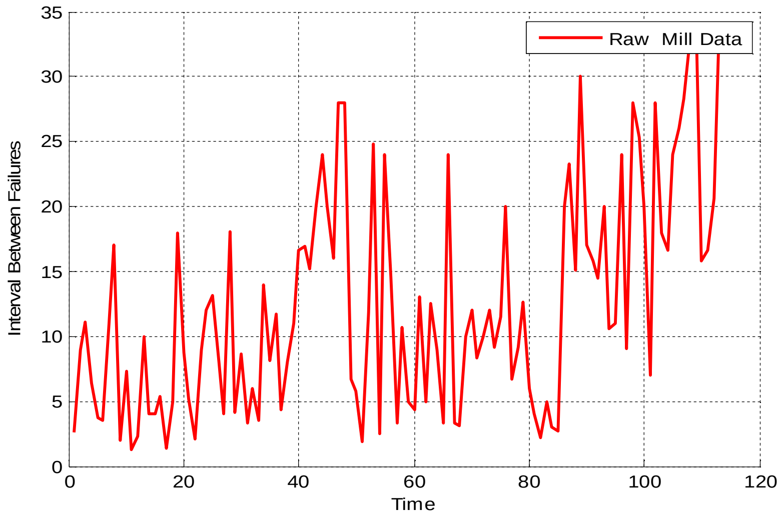
**(2-7) متوسط الخطأ المطلق:** ***Mean Absolute Error (MAE)***

يستخدم هذا المعيار لحساب مدى قرب النتائج التي تم التوصل إليها من القيمة الحقيقية، ويكون حسب الصيغة الآتية.

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - \hat{X}_i\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|e_i\right| \quad \dots(64)$$

**(8) الجانب التطبيقي:**

تُعدّ الشركة العامة للسمنت الشمالية ثاني شركة تم تأسيسها لإنتاج السمنت في العراق وأول شركة تقوم بإنتاج السمنت بالطريقة الجافة. وكجانب تطبيقي للبحث تم جمع البيانات من معمل سمنت بأدوش التوسيع التابع الى الشركة العامة للإسمنت الشمالية[ جاسم، 2013 ]. أذ شملت أوقات التشغيل المتتالية بين الأعطال لطاحونة المواد الأولية A وذلك للفترة من 2012/6/24 إلى 2012/10/1*. والشكل (1) يُوضح أوقات التشغيل المتتالية بين الأعطال لطاحونة المواد الأولية A، إذ يلاحظ من خلال الرسم عشوائية البيانات، فضلاً عن كونها متزايدة في فترة معينة ومستقرة وكذلك متناقصة في فترات أخرى.




**الشكل(1):أوقات التشغيل المتتابعة بين الأعطال لطاحونة المواد الأولية A**

ومن خلال استخدام المعادلة (13) تم إيجاد قيمة المُختبر الإحصائي لأختبار مان للاتجاه، والذي يستخدم لاختبار الفرضية الآتية:

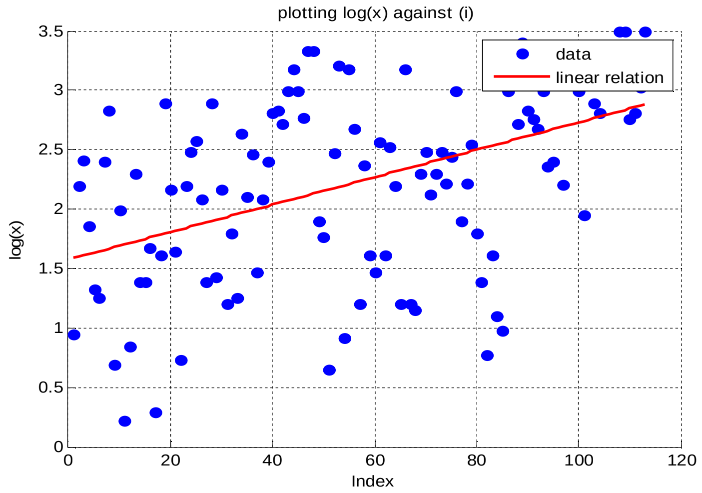
$H_0$: لا يوجد اتجاه رتيب في البيانات

$H_1$: يوجد اتجاه رتيب في البيانات

إذ أن قيمة ($R$=5.0842)، وإن قيمة P المحسوبة لأختبار مان للإتجاه ولبيانات الطاحونة A هي$(\mathrm{P}_R = 0.0000)$. ويلاحظ أنها أقل من (0.05)، عليه يتم رفض فرضية العدم وقبول الفرضية البديلة، ما يدل على وجود اتجاه رتيب في مجموعة البيانات.

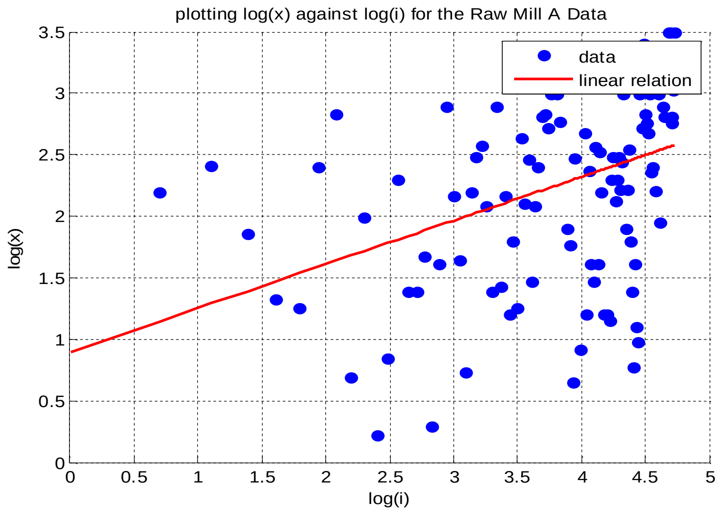
ويبين الشكل(2)، بأن هنالك علاقة خطية بين كل من $\log(X(i))$ و( $i$)، ما يدل على إن البيانات تتفق مع العملية الهندسية.

* تم اختبار بيانات أعطال الطاحونة A باستخدام برنامج Easy Fit، وتم التوصل إلى أن البيانات تتبع التوزيع اللوغارتمي الطبيعي.




**الشكل(2): اختبار ملاءمة بيانات الطاحونة A للعملية الهندسية باستخدام الطريقة البيانية**

في حين يبين الشكل(3) استخدام الطريقة البيانية لغرض اختبار فيما إذا كانت بيانات الطاحونة A تتبع عملية متسلسلة $\alpha$ .




**الشكل (3): اختبار ملاءمة بيانات الطاحونة A لعملية متسلسلة $\alpha$ باستخدام الطريقة البيانية.**

ومن خلال الشكل(3)، تبين بأن هنالك علاقة خطية بين كل من $\log(X(i))$ و $log(i)$ ، ما يدل على إن بيانات الطاحونة A تتبع عملية متسلسلة $\alpha$ .

### (8-1) تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية:

***Estimating the Parameters of the Geometric Stochastic Process***

بعد أن تبين لنا بأن بيانات أعطال الطاحونة A تتبع العملية الهندسية وملاءمة لها، لذا تم تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية وذلك باستخدام الطرائق المقترحة في البحث وكما موضح في الجدول (1) :

**الجدول (1): تقدير معلمات العملية الهندسية لبيانات الطاحونةA.**

| ***Method*** | ***Parameters Estimation*** | | |
|---|---|---|---|
| | $\hat{a}$ | $\hat{\mu}$ | $\hat{\sigma}^2$ |
| ***MLE*** | **0.9885** | **6.2727** | **25.3954** |
| ***MME*** | **0.9885** | **6.0737** | **14.0990** |

**(2-8) تقدير معلمات عملية متسلسلة α التصادفية:**

***Estimating the Parameters of the α − Series Stochastic Process***

بعد ملاحظة أن بيانات أعطال الطاحونة A تتبع عملية متسلسلة α وملاءمه لها، تم في هذه الفقرة تقدير معلمات عملية متسلسلة α باستخدام الطرائق المقترحة في البحث وكما موضح في الجدول (2):

**الجدول (2): تقدير معلمات عملية متسلسلة α لبيانات الطاحونةA.**

| ***Method*** | ***Parameters Estimation*** | | |
|---|---|---|---|
| | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\mu}$ | $\hat{\sigma}^2$ |
| ***MLE*** | **-0.3552** | **3.2056** | **7.1996** |
| ***MME*** | **-0.3552** | **3.0878** | **3.6089** |

**(3-8) المقارنة بين نموذج العملية الهندسية ونموذج عملية متسلسلة α:**

في هذه الفقرة تمت المقارنة بين نموذج العملية الهندسية ونموذج عملية متسلسلة α، وذلك لغرض الوصول إلى أفضل نموذج يتم من خلاله تحليل البيانات ذوات الاتجاه الرتيب، والجدول (3) يبين قيم *MSE* و*MAE* لكل من العملية التصادفية الهندسية وعملية متسلسلة α ولبيانات الطاحونة A.

**الجدول (3): قيم *MSE* و*MAE* لنموذج العملية الهندسية ونموذج عملية متسلسلة α .**

| **Model** | **Method** | ***MSE*** | ***MAE*** |
|---|---|---|---|
| ***Geometric Process*** | **MLE** | 50.3279 | 5.8702 |
| | **MME** | 49.9560 | 5.8021 |
| ***α − Series Process*** | **MLE** | 55.0575 | 6.1516 |
| | **MME** | 54.9942 | 6.0838 |

يتضح من الجدول(3) أن قيم *MSE* للعملية الهندسية أقل من قيم *MSE* لعملية متسلسلة α ولجميع الطرائق فضلاً عن قيم (MAE).

## (9)الاستنتاجات: *Conclusions*

من خلال البحث تم التوصل الى مجموعة من الاستنتاجات يمكن اجمالها بالنقاط الآتية:

1- من خلال الجدول رقم (3)، تم التوصل إلى أن طريقة الإمكان الأعظم (MLE) المستخدمة لتقدير معلمات العمليتين، أفضل من طريقة العزوم المعدلة (MME) .

2- من خلال إجراء اختبار مقارنة جودة التوافق بين النماذج، تبين أن نموذج العملية التصادفية الهندسية أفضل من نموذج عملية متسلسلة $\alpha$ التصادفية في تمثيل بيانات الطاحونة A .

3- أن بيانات الطاحونة A عبارة عن عملية تصادفية متزايدة، سواء كان النموذج المستخدم نموذج العملية الهندسية أم نموذج عملية متسلسلة $\alpha$، ممّا يدل على اتباع إدارة المعمل صيانة وقائية جيدة لمعالجة المشكلات قبل حدوثها.

## (10) التوصيات: *Recommendations*

1- على ضوء النتائج التي تم التوصل اليها من خلال اختبار معايير جودة التوفيق، نوصى باستخدام نموذج العملية الهندسية لتحليل البيانات ذات الاتجاه الرتيب، وذلك لامتلاك النموذج أقل $MSE$ و$MAE$ فضلاً عن سهولة الإجراءات المستخدمة لتقدير معلماته.

2- لبيان أهمية العملية التصادفية الهندسية فضلاً عن عملية متسلسلة $\alpha$ التصادفية، نوصى بإجراء مقارنة مع نماذج تصادفية أخرى مثل نموذج العملية البواسونية غير المتجانسة (*NHPP*) ونموذج عملية وايبل(*WP*) ولتطبيقات حياتية أخرى.

3- كما نوصّي الإدارة العامة في الشركة العامة للإسمنت الشمالية بالاعتماد على النتائج التي تم التوصل اليها لغرض تحديد فترات الصيانة للطاحونة *A* ، فضلاً عن تعميم النتائج إلى جميع معامل الشركة.

## المصادر: *References*

1- جاسم، عمر رمزي،(2013)،" **تقدير معلمات العملية التصادفية الهندسية وعملية متعلقة بها مع التطبيق** " رسالة ماجستير غير منشوره، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

2- *Ascher, H. and Feingold, H. (1984),"**Repairable Systems Reliability**". Marcel Dekker, New York.*

3- *Aydoğdu, H., Senoglu, B. and Kara, M. (2010a),"**Application Of MML Methodology to An α-Series Process with Weibull Distribution**". Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39, 449 - 460.*

4- *Aydoğdu, H., Senoglu, B. and Kara, M.(2010b),"* ***Parameter Estimation in Geometric Process with Weibull Distribution*** *". Applied Mathematics and Computation, 217,2657-2665.*
5- *Aydoğdu, H. and Kara, M.(2012),"* ***Nonparametric Estimation in α-Series Processes*** *". Computational Statistics and Data Analysis, 56,190-201.*
6- *Braun, W. J., Li, W. and Zhao, Y. Q.(2005),"* ***Properties of the Geometric and Related Processes*** *". Naval Research Logistics, 52, 607-616.*
7- *Braun, W. J., Li, W. and Zhao, Y.Q.(2008)," ****Some Theoretical Properties of the Geometric and α-Series Processes*** *". Communications in Statistics-Theory and Methods, 37, 1483-1496.*
8- *Chen , J. , Li ,Kim-Hung and Lam ,Y.(2010) "* ***Bayesian Computation for Geometric Process in Maintenance Problems*** *". Mathematics and Computers in Simulation, 81,771-781.*
9- *Cheng, G. Q. and Li, L.(2011), ''* ***Two Different General Monotone Process Models for a Deteriorating System and Its Optimisation '',*** *International Journal of System Science ,42:1,57-62.*
10- *Cox, D.R. and Lewis, P.A. (1966), ''* ***Statistical Analysis of Series of Events"*** *. Chapman and Hall, London, United Kingdom.*
11- *Lam, Y. (1988), ''* ***A Note on the Optimal Replacement Problem*** *''. Advances in Applied Probability, 20, 479-782.*
12- *Lam, Y. (1992), ''* ***Nonparametric Inference for Geometric Processes''*** *. Communications in Statistics Theory and Methods, 21, 2083-2105.*
13- *Lam, Y. and Chan, S. K. (1998), ''* ***Statistical Inference for Geometric Processes with Lognormal Distribution*** *''. Computational Statistics and Data Analysis, 27, 99-112.*
14- *Lam, Y., Zhu, L. X., Chan, S. K. and Liu, Q. (2004), ''* ***Analysis of Data from a Series of Events by a Geometric Process Model*** *''. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 20, 263-282.*
15- *Tang, Ya. and Liu, Ya .(2006), ''* ***Analysis of Data from a Series of Event by Using the $\alpha-$Power Process Model'',*** *Management Science and Statistical Decision ,Special Issue,11-18.*
16- *Yu-xia, Z.(2007), ''* ***Monotonicity of the Optimal Replacement Policy for the $\alpha-$Power Process Maintenance Model*** *''. Journal of Sichuan University,44,4,221-224.*