مقارنة طريقة بيز مع طريقة BM.Huber الحصينة المقيدة لتقدير انموذج الانحدار الذاتي لعدم تجانس التباين GARCH(1,1) باستعمال المحاكاة

أ. م. د. نزار مصطفى الصراف
كلية الادارة والاقتصاد
جامعة بغداد

م. م. جنان عبدالله عنبر
الكلية التقنية الادارية
الجامعة التقنية الوسطى

تاريخ استلام البحث: 2015/11/2 تاريخ قبول النشر: 2016/2/7

الخلاصة

تم في هذا البحث المقارنة بين طريقتي بيز (bayes) و BM.Huber المقيدة الحصينة لتقدير انموذج الانحدار الذاتي لعدم تجانس التباين GARCH(1,1) وستتم المقارنة بين الطريقتين باستعمال معيار المقارنة MSE ، عن طريق برنامج محاكاة خاص اعد لهذا الغرض من ثم عرض النتائج في جداول لتوضيح عملية المقارنة.

A Comparison between Bayes Method and Robust Bounded B. M. Huber Method to Estimate The Generilized Autoregressive Conditional Heteroscedastic GARCH (1,1) be using Special Simulation Program

Abstract

In this paper a comparison between (bayes) method and robust bounded B. M. Huber method was done to estimate the Generilized Autoregressive Conditional Heteroscedastic GARCH(1,1) , The comparison between the two methods will be using MSE criterion using special simulation program prepared for this purpose and then display the results in tables to illustrate the comparison process.

هدف البحث

يهدف البحث الى المقارنة بين طريقة بيز(Bayes) وطريقة BM.Huber الحصينة المقيدة (Robust Bounded M.Huber) لتقدير انموذج GARCH(1,1) من خلال عمل تجارب المحاكاة على احجام عينات مختلفة علاوة على اختيار قيم للمعلمات تختلف في قوة الارتباط فيما بينها (ضعيفة، متوسطة، قوية) واستعمال متوسط مربعات الخطأ (MSE) كمعيار للمقارنة وتكون الطريقة الافضل للتقدير هي التي تحقق اقل (MSE).

المقدمة

قدم العالم [1982] Robert Engle [8] انموذج الانحدار الذاتي لعدم تجانس التباين الشرطي (Autoregressive Conditional Heteroscedastic (ARCH)) وقام Bollerslev (1986) بتعميمه ليصبح (Generilized Autoregressive Conditional Heteroscedastic (GARCH)) وهي نماذج الهدف منها نمذجة التباين الشرطي للانحدار الذاتي اذ ان في هذه النماذج يكون محور الحل فيها هو التباين الشرطي (Conditional Variance) الذي يمثل دالة خطية لمربعات الاخطاء السابقة للسلسلة الزمنية حيث تعاني السلسلة من عدم الثبات او التقلبات (Volatility) وهو تغير التباين للسلسلة الزمنية عبر الزمن (t) ويطلق على هذا التغير بعدم التجانس (Heteroscedastic) ويحدث عادة في السلاسل الزمنية ذات التكرارات العالية كأسعار الاسهم او اسعار الصرف او اسعار بيع النفط او غيرها . وفي هذا المبحث سيتم استعراض لنوعين من هذه النماذج وهما نموذجي GARCH , ARCH وبعض الطرائق المعتمدة في تقدير هذه النماذج هي طريقة بيز (Bayes) وطريقة هوبر المقيدة الحصينة (BM.Huber) .

نماذج الانحدار الذاتي لعدم تجانس التباين الشرطي ARCH [1[[6][8][9]
(Autoregressive Conditional Heteroscedastic)

يعتبر انموذج (ARCH) اول النماذج التي تم تقديمها من قبل (Engle) في عائلة نماذج (ARCH) وتمثل نماذج ARCH (P) حالة خاصة من نماذج GARCH (p,q) عندما يكون q=0 , P≥1

P : تمثل درجة (رتبة) انموذج ARCH ويمثل عدد المعلمات في الانموذج .

ان صيغة نماذج ARCH من الدرجة (P≥1) هي كالاتي :

$$R_t = \mu + y_t \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$y_t = h^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \ldots \sim iidN\ (0,1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2 \qquad \ldots\ldots (2)$$

R_t : سلسلة غير مرتبطة (uncorrelated) وتمثل سلسلة الارتداد (Return Series) .

μ : متوسط سلسلة الارتداد

ε_t : سلسلة متغيرات مستقلة ومتماثلة التوزيع (Identically Independent Distribution) وتتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) وتباين (1) .

$\alpha_0 > 0$

$\alpha_i \geq 0$ لكل $i > 0$

α_0, α_i هي معلمات (parameters) الانموذج .

h_t : يمثل التباين الشرطي وهو دالة خطية لمربعات التباين (الاخطاء) والمشاهدات السابقة .

ان القيود الموجبة على معلمات الانموذج تضمن تباين شرطي موجب وتمثل المعادلة (2) معادلة عدم الثبات (volatility) ويمكن اعادة كتابتها بالشكل الاتي :-

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i}^2 \qquad \ldots\ldots (3)$$

ويطلق على المعادلة (3) معادلة عدم الثبات (volatility equation) ويعرف التباين غير الشرطي لـ y_t بالعلاقة الاتية:

$$V(y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i} \qquad \ldots\ldots (4)$$

عندما يكون P=1 فأن الانموذج يكون من الرتبة الاولى ARCH(1) وتكون صيغة التباين الشرطي كما في المعادلة (5)

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-i}^2 \qquad \ldots\ldots (5)$$

وقد لاحظ بعض الباحثين عند اجراء التطبيقات العملية باستعمال نماذج ARCH ان التوسع في قيم P قد ينتج عنه قيم سالبة لـ(α) وهذا يتناقض مع فرضية الانموذج بان تكون قيم $\alpha \geq 0$.

وكحل لهذه المشكلة اقترح (Bollerslov 1986) تعميما لإنموذج ARCH واطلق عليه انموذج GARCH وهو انموذج الانحدار الذاتي المعمم لعدم تجانس التباين الشرطي .

نماذج الانحدار الذاتي المعمم لعدم تجانس التباين GARCH [1[[5][9][10] [11[[14]

(Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic)

ان صيغة نماذج GARCH من الرتبة (p,q) هي :

$$R_t = \mu + y_{t\ldots}$$

$$y_t = h_t^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \ldots \sim iidN\ (0,1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \cdots \beta_q h_{t-1} \ldots\ldots (6)$$

وان $P \geq 1$, $q \geq 1$,

ويمكن كتابة المعادلة اعلاه (6) التي تمثل معادلة التباين الشرطي بالشكل الاتي :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_1 y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_j h_{t-j} \qquad \ldots\ldots (7)$$

ويعرف التباين غير الشرطي لـ y_t بالعلاقة الاتية

$$V(y_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j} > 0 \qquad \ldots\ldots(8)$$

R_t : سلسلة غير مترابطة (uncorrelated) وتمثل سلسلة الارتداد (Return Series) .

μ : متوسط سلسلة الارتداد.

ε_t : سلسلة متغيرات مستقلة ومتماثلة التوزيع (Identically Independent Distribution)

$E(\varepsilon_t) = 0$

$V(\varepsilon_t) = 1$

$\alpha_0 > 0$

$\alpha_i \geq 0$ لكل $i > 0$

$\beta_j \geq 0$ لكل $j > 0$

α_0 , α_i , β_j هي معلمات الانموذج (Parameters)

h_t : يمثل التباين الشرطي وهو دالة خطية لمربعات التباين والمشاهدات السابقة .

ان الشروط الموجبة على الانموذج تضمن تباين شرطي موجب. عندما تكون P=1 وq=1 فان الانموذج يكون GARCH(1,1) من الرتبة الاولى وهو حالة خاصة من انموذج GARCH(p,q) وهو الانموذج الذي ستتم دراسته في هذه الاطروحة وتكون صيغته كما في ادناه :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \qquad \ldots\ldots(9)$$

نلاحظ ان معادلتي التباين الشرطي (2) و(3) مفسرة بدلالة $\alpha_i > 0$ وبدلالة مربعات البواقي المتأخرة (y_{t-i}^2) وهي تمثل المعلومات الخاصة بالتذبذب في الفترات السابقة .

اما معادلتي التباين الشرطي في انموذج GARCH (6) , (7) فإنها مفسرة بدلالة $\alpha_i > 0$ والبواقي المتأخرة (y_{t-i}^2) و β_i وكذلك تنبؤ التباين بالاعتماد على الفترات السابقة h_{t-1}.

الجانب النظري

اسلوب تقدير بيز (Bayesian Estimation Method) [3][4] [7][16]

يعد تقدير بيز احد الاساليب المتبعة في تقدير نماذج عائلة ARCH , GARCH اذ سهل على الباحثين التغلب على الصعوبات التي تعاني منها الطرائق الكلاسيكية مثل طريقة الامكان الاعظم (MLE) والتي استعملت لفترة طويلة في تقدير النماذج اعلاه منذ بدأها Engle (1982) في بحثه عند تقدير نماذج ARCH وتبعه عدد من الباحثين في تقدير وايجاد نماذج اخرى مشابهة وتمديد ARCH من قبل Bollerslev (1986) ليعمم ويصبح انموذج GARCH.

ويمكن كتابة مراحل تطبيق طريقة تقدير بيز لإنموذج GARCH الموضحين في المعادلة (9) كالاتي :

لأجل كتابة دالة الامكان الاعظم لإنموذج ARCH(1) و GARCH(1,1) تم ايجاد المعاملات الاتية

$y = (y_1, \ldots\ldots\ldots, y_T)'$

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)'$

$\beta = (\beta)$

ومن تجميع المعاملات السابقة وكالاتي :

$\theta = (\alpha, \beta)$

وتحديد المصفوفة $\sum$ كمصفوفة قطرية (TXT)

$$\sum = \sum(\theta) = dig\,(h_t\,(\theta)_{t=1}^{T})$$

اذ ان :

$$h_t(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}(\theta)$$

ومن اعلاه يمكن كتابة دالة الامكان الاعظم لـ (θ) بالصيغة الاتية :

$$L(\theta/y) \propto (\det \textstyle\sum)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\, y\, \textstyle\sum^{-1} y\right] \qquad \ldots\ldots(10)$$

ولغرض ايجاد الموائمة (التوافق) استعملت المشاهدة الاولى كشرط اولي والتباين الاولي ثابت (fixed) لـ α_0
ان دالة الامكان اعلاه تشير الى دالة الامكان الشرطية لإنموذج GARCH في (6)
لقد اقترح الباحث (Daived Ardia 2006) التقدير السابق للمعلمات (proper priors) (α,β) للإنموذج السابق

$$P(\alpha) \propto N_2 \ (\alpha \,/\, \mu_\alpha \,, \Sigma_\alpha) \prod\nolimits_{[\alpha>0]}$$
$$P(\beta) \propto N \ (\beta \,/\, \mu_\beta, \Sigma_\beta) \prod\nolimits_{[\beta>0]}$$

Σ_0 , μ_0 تمثل المعلمات الفوقية (Hyper parameters)
$\Pi_{(\alpha)}$ هو مؤشر الدالة يساوي (1) في حالة اعتماد الشرط على المعلمة اعلاه و (صفر) في الحالات الاخرى .
N_d هو التوزيع الطبيعي من (d) من الابعاد اذ (d >1) وان α و β مستقلة عن بعضها وتحقق:
P(θ) = P(α) P(β)
وعليه يكون التوزيع المشترك اللاحق بناءاً على نظرية بيز هو :

$$P(\theta/y) \propto L\left(\frac{\theta}{y}\right) \ P(\theta) \qquad \dots\dots (11)$$

التوزيع المشترك اللاحق The joint Posterior [3][4] [16]

ان الطبيعة المتكررة للتباين في المعادلة (9) لا تسمح لوجود مرافق او مرافقة (conjugacy) بين دالة الامكان الاعظم والتوزيع المسبق (الاولي) (preior) في (11) لذا تم الاعتماد على خوارزمية (M-H) (Metropolis – Hastings) لتحديد العينات من التوزيع المشترك اللاحق . وان الخوارزمية المستعملة التي وضعت لإيجاد التوزيع اللاحق هي حالة خاصة من الخوارزمية التي وضعت من قبل [Nakatsuma 1998]
تم ايجاد قيمة اولية لـ θ من التوزيع المشترك المسبق (الاولي) :-

$$\theta^{[0]} = \alpha^{[0]} \,, \beta^{[0]}$$

وتوليد J من المكررات يمر لـ θ مرور مفرد وكالاتي :

$$\alpha^{[j]} \sim P(\alpha \,/\, \beta^{[j-1]} \,, y)$$
$$\beta^{[j]} \sim P(\beta \,/\, \alpha^{[j]} \,, y)$$

ولعدم معرفة التوزيع الشرطي تحليلاً (analytically) تم تحديد α و β من خلال توزيعين مقترحين اعتمدت على انموذج ARMA(1.1) لـ $\{y_1^2\}$ ومن خلال تحديد الوزن

$$w_t = y_t^2 - h_t$$

يمكننا من تحويل صيغة التباين الشرطي

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \, y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

وكالاتي :

$$y_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) y_{t-1}^2 - \beta w_{t-1} + w_t$$

ويمكن كتابة w_t كالاتي :

$$w_t = y_t^2 - h_t = \left(\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right) h_t = (X_1^2 - 1) h_t$$

ومن البناء اعلاه (constraction) فان $\{w_t\}$ هو عملية فروق (Martingale) مع تباين $(2h_t^2)$ وذلك لان التوقع الشرطي لـ w_t يساوي (صفر) بالاعتماد على F_{t-1} (الذي يمثل المنقي الطبيعي للزمن t-1) ، والمتغير X_1^2 له متوسط يساوي (1) وتباين (2) . وكما هو ملاحظ عند [Nakatsuma] انه من الصعوبة توليد θ مباشرة من معادلة التباين الشرطي (9) لذلك تم تقريب قيمة w_t بواسطة المتغير Z_t الذي يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط يساوي (صفر) وتباين $(2h_t^2)$.
وهذا يقودنا الى الانموذج المساعد او الاحتياطي الاتي :

$$y_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) y_{t-1}^2 - \beta z_{t-1} + z_t$$

مع ملاحظة ان كل من z_t و h_t هما دالتان لـ θ وعلى الترتيب :

$$Z_t(\theta) = y_t^2 - \alpha_0 - (\alpha_1 + \beta) y_{t-1}^2 + \beta z_{t-1}(\theta) \qquad \dots\dots (12)$$

$$h_t(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}(\theta)$$

ومن تعريف المصفوفة (TXT) :Λ بانها مصفوفة قطرية

$$\Lambda := \Lambda(\theta) = daig\,(\{\, 2h_t^2(\theta)\}_{t=1}^{T})$$

$$Z := (Z_1, \dots \dots, Z_t)'$$

ويمكن تعريف دالة الامكان الاعظم لـ θ من النموذج المساعد (الاحتياطي) وكالاتي :

$$L(\theta|y) \propto (\det \Lambda)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\, Z' \Lambda_Z^{-1}\right] \qquad \dots\dots (13)$$

تقدير معاملات α ARCH (ARCH Coefficients Estimation) [3][4] [16]

اقترح كل من (Greenberg) , (Ghib) تحويلات اولية متكررة وكالاتي :

$$L_t^* = 1 + \beta L_{t-1}^*$$

$$v_t^* = v_{t-1} + \beta V_{t-1}^*$$

اذ ان القيم الاولية L_0^* , v_0^* تكون مساوية للصفر

ومن خلال تلك التحويلات يمكن ان تكون الدالة $Z_t(\theta)$ في (12) كدالة خطية لـ (α) لتكن

$$v_t = y_t^2$$

$$v = (v_1, \dots \dots \dots, v_t)'$$

$$C_t = (L_t^*, v_t^*)$$

اذ ان C مصفوفة من درجة (TX2) وان الصف الـ t هو C_t وان

$$z = v - C_\alpha$$

ومنها يمكن التعبير عن دالة الامكان الاعظم لـ α وكالاتي :

$$L(\alpha/\beta, y) \propto (\det \Lambda)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\,(v - C_\alpha)'\, \Lambda^{-1} (v - C_\alpha)\right]$$

وتم ايجاد التوزيع المقترح لعينة (sample) α بعد الجمع بين دالة الامكان الاعظم اعلاه والتوزيع الاولي (المسبق priore) بواسطة التعديل لمقدر بيز

$$q_\alpha(\tilde{\alpha}, \alpha) \propto N_2(\alpha \,/\, \widehat{\mu_\alpha}\,, \widehat{\Sigma_\alpha}) \prod_{[\,\alpha>0]}$$

$$\widehat{\Sigma_\alpha^{-1}} = C' \widetilde{\Lambda^{-1}} C + \Sigma_\alpha^{-1}$$

$$\widehat{\mu_\alpha} = \widehat{\Sigma_\alpha}\,(\, C' \Lambda^{-1} v + \Sigma_\alpha^{-1} \mu_\alpha)$$

اذ ان (TXT) مصفوفة قطرية

$$\widetilde{\Lambda}^{-1} = diag\,(\{2\, \widetilde{h_t^2}\}_{t-1}^{T})$$

$$\tilde{h_t} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1\, y_{t-1}^2 + \beta\, \tilde{h}_{t-1}$$

القيمة $\tilde{\alpha}$ هي القيمة السابقة المختارة لـ α في اسلوب معاينة (M.H)

α* اخذت من التوزيع اعلاه وتم قبولها مع الاحتمال

$$\lambda = \min\{\frac{P(\alpha^*, \beta/y)\; q_\alpha(\alpha^*, \tilde{\alpha})}{P(\alpha^{\sim}, \beta/y)\; q_\alpha(\alpha^{\sim}, \alpha^*)}\,, 1\}$$

تقدير β معامل GARCH Estimating β GARCH Cofficien [3][4][16]

سبق في المبحث السابق ان عبرنا عن الدالة $Z_t(\theta)$ في (12) كدالة خطية لـ α لكن لا يمكن التعبير عنها كدالة خطية لـ β ولتخطي المشكلة نجعل $Z_t(\beta)$ دالة خطية (linearize) باستعمال صيغة تايلور (Taylor expansion) من الدرجة الاولى عند β وكالاتي :

$$Z_t(\beta) \cong Z_t(\hat{\beta}) + \frac{dz_t}{d\beta}|_{\beta=\tilde{\beta}}(\beta - \tilde{\beta})$$

اذ ان $\tilde{\beta}$ هو الاختيار السابق لـ β في اسلوب معاينة M–H ليكن

$$r_t = Z_t(\tilde{\beta}) + \tilde{\beta}\nabla_t$$

$$\nabla_t = \frac{dz}{d\beta}|_{\beta=\tilde{\beta}}$$

ويمكن ايجاد ∇_t كالاتي :

$$\nabla_t = y_{t-1}^2 - Z_{t-1}(\tilde{\beta}) + \tilde{\beta}\nabla_{t-1}$$

اذ ان القيمة الاولية لـ $\nabla_0 = 0$ وبترتيب الحدود اعلاه في متجهات

$$r = (r_1, \dots \dots \dots, r_t)'$$

$$\nabla = (\nabla_1, \dots \dots \dots, \nabla_t)'$$

وبعدها يتم تقريب قيمة (exp) في (13) بواسطة

$$exp\,[-\tfrac{1}{2}(r - \beta\nabla)' \Lambda^{-1}(r - \beta\nabla)]$$

وقد تم ايجاد توزيع β بتجميع دالة الامكان الاعظم المقربة والتوزيع السابق بواسطة تعديل مقدر بيز (Bayes ‘ update)

$$q_\beta(\tilde{\beta}, \beta) \propto N(\beta / \widehat{\mu_\beta}, \widehat{\Sigma_\beta}) \prod_{[\beta>0]}$$

$$\Sigma_\beta^{\wedge-1} = \acute{\nabla}\tilde{\Lambda}^{-1}\nabla + \Sigma_\beta^{-1}$$

$$\hat{\mu}_\beta = \widehat{\Sigma_\beta(}\, [\acute{\nabla}\Lambda_r^{-1} + \Sigma_\beta^{-1}\mu_\beta)$$

اذ ان $\tilde{\Lambda}$ مصفوفة قطرية (TXT)

$$\Lambda^{\sim} = diag\,(\{2\ \widetilde{h_t^2}\}_{t-1}^T)$$

$$h_t^{\sim} = \alpha_0 + \alpha_1\ y_{t-1}^2 + \tilde{\beta}\, h_{t-1}^{\sim}$$

β^* قدرت بأسلوب المعاينة (is sampled) من التوزيع المقترح وتم قبولها مع احتمال

$$\min\{\frac{P(\beta^*, \alpha/y)\ q_\beta(\beta^*, \widetilde{\beta})}{P(\beta^{\sim}, \alpha/y)\ q_\beta(\beta^{\sim}, \beta^*)}, 1\}$$

طريقة التقدير M- الحصينة المقيدة [12][13][15]

Bounded Robust – M estimation Method (BM)

وهي طرائق مطورة لتقديرات M- الحصينة تتضمن الية اضافية تقيد من انتشار (propagation) تأثير التلويث في المشاهدات ويكون تأثير (influence) التباينات السابقة على المشاهدة الحالية محدد او مقيد (bounded) وذلك من خلال استعمال دالة الوزن p المقيدة وتكون مشتقتها الاولى $\acute{p}$ مقيدة ايضاً. وان تقديرات (BM) متسقة ذات توزيع طبيعي تقريبي وتمتلك الخصائص التي اقترحها الباحث هوبر [Huber 1973] مما اعطاها كفاءة عالية في تقدير معلمات انموذج GARCH التي لا تتأثر كثيرا بوجود التلويث او المشاهدات الشاذة في البيانات .

ولإنموذج GARCH , في (9)، اوضح كل من (Hall and Yao 2003) ان صيغة التباين تكون كالاتي :

$$h_t = \frac{\propto_0}{1 - \sum_{i=1}^{q} \beta i} + \sum_{i=1}^{p} \propto_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \propto_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{jk=1}^{q} \dots \beta_{j1} \dots \beta_{jk}\, x_{t-1-j1-\dots-jk} \dots (14)$$

$$Var\ (y_t) = \frac{\propto_0}{1 - (\ \sum_{i=1}^{p} \propto_i + \ \sum_{i=1}^{q} \beta_i)} \qquad \ldots \ldots (\ 15\ )$$

وتكون صيغة التباين لإنموذج GARCH (1,1) كالاتي :

$$Var\ (y_t) = \frac{\propto_0}{1 - (\ \propto_1 + \ \beta)}$$

ولإيجاد التقدير الحصين للإنموذج في المعادلة (9) نتبع الخطوات الاتية :
لتكن

$$x_t = \log(y_t^2)$$
$$w_t = \log(\varepsilon_t^2)$$

وعليه

$$x_t = w_t + logh_t$$

اذا كانت دالة الكثافة f لـ ε_t متماثلة حول الصفر فان g هي دالة الكثافة لـ w وتأخذ الصيغة الاتية :

$$g(w) = \mathrm{f}(e^{\frac{w}{2}})e^{\frac{w}{2}} \qquad \ldots \ldots (16)$$

وبصورة خاصة عندما تتبع f التوزيع الطبيعي $f \sim N(0\ ,\ 1)$ فأن :

$g = g_0$

$$g_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \ e^{-\frac{1}{2}\ (e^w - w)} \qquad \ldots \ldots . (17)$$

لتكن $C=(\ a\ ,\ b\ )$ حيث

$$a = (\ a_0\ , a_1\ , \ldots \ldots \ldots \ldots . . , a_p\ )$$
$$b = (\ b_1\ , \ldots \ldots \ldots \ldots . . , b_q\ )$$

وتمثل قيم المعلمات لجميع قيم t

$$\sigma_t^2(c) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i}^2\ + \ \sum_{i=1}^{q} b_i \sigma_{t-i}^2\ (c) \qquad \ldots \ldots (\ 18)$$

وتمثل الصيغة (18) اعلاه التباين الشرطي عندما لا يكون هناك تلويث او قيم شاذه في البيانات ،
وعندما تكون $y_{t=0}$ لكل قيم $t \le 0$ فأن :

$$\sigma_t^2(c) = \frac{a_0}{1 - \ \sum_{i=1}^{\alpha} bi}$$

الان لكل قيم $t \le 0$ من الصيغة (14) اوجدنا الاتي :

$$\sigma_t^2(c) = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^{q} bi} + \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\ y_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \quad \sum_{ji=1}^{q} \ldots . \sum_{jk=1}^{q} b_{j1} \ldots \ldots . . b_{jk}\ y_{t-i-j1 \ldots\ldots jk}^2 I_{t-i-j1 \ldots\ldots jk} \ge |$$

الشروط في اعلاه هي نفسها التي استعملت من قبل Hall&Yao (2003)
عندما يكون p=1 , q=1 اي في حالة GARCH (1,1) فان الصيغ اعلاه تكون بالشكل الاتي:

$$\partial = (\ \alpha_0\ , \alpha_1\ \ )$$
$$b = b \qquad \qquad c = (\ \alpha_0\ , \alpha_1, b\ \ )$$

$$\sigma_t^2(c) = a_0 + a_i y_{t-1}^2 + b_i \sigma_{t-1}^2$$

وعندما $y_t = 0$ لكل قيم $t \le 0$ فأن

$$\sigma_t^2(c) = \frac{a_0}{1 - b}$$

ان صيغة تقدير -M الحصين هي

$$M_T(c)=\frac{1}{T-P}\sum_{t=p+1}^{T}\mathrm{p}\ \left(x_t-\log\sigma_t^2(c)\right) \qquad \ldots\ldots(19)$$

اذ ان p دالة محدبه (conrex) مقيدة (bounded) ومعرفة حسب [Huber 1973] وان :

p : عدد معلمات الانموذج

P=log(g)

P_0=log (g_0)

ان تقديرات M– الحصين لنماذج GARCH تكون وفق الصيغة الاتية [15]

$$\hat{\theta}=\underset{c\in C}{\operatorname{argmin}}\,M_T\ (c) \qquad \ldots\ldots(20)$$

C : مجموعة مدمجة ملائمة

ويمكن اعتبار هذه التقديرات بانها تعميم لفئة من تقديرات M– الحصين المقترحة من قبل (Huber 1964) للموقع و (Huber 1973) للانحدار لمجموعة C .

تقدير BM.Huber المقيد الحصين [2][12][13][15]

Robust bounded M- Huber estimation

قدم الباحثان (Muler . N. and yohai.V 2008) مقدراً مطوراً لتقدير نموذج GARCH وذلك باستعمال الدالة (p) المقيدة التي اقترحها [Huber 1973] في بحثه لتقدير انموذج الانحدار وباستعمالها لتلك الدالة المقيدة ادخلا الية جديدة لتقيد انتشار تأثير التلويث في عملية التقدير .

ان الصيغة العامة لدالة Huber المقيدة للانحدار هي:

$$P(x)=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\,x^2 & for\ |x|<h\\ h\,|x|-\frac{1}{2}\,h^2 & for|x|\ \geq h\end{Bmatrix}$$

إذ h عدد ثابت يأخذ القيم 1 , 1.5 , 2 وان

$$\psi(x)=\begin{Bmatrix}x & for & |x|<h\\ h & sing(x) & |x|\ \geq h\end{Bmatrix}$$

$\psi(x)$: المشتقة الاولى لـ P

Sing(x) : هي اشارة x

ولأجل ايجاد مقياس للثبات (invariant) فان قيمة h قد تعتمد على المشاهدات x_i .

وللحصول على حصانة التقديرات تم التعديل على تقديرات M لنماذج GARCH في (15) لتقيد تأثير التلوث (القيم الشاذة)على $\sigma_t^2(\acute{c})s$ المقدرة اذ ان كبر القيم الشاذة في الوقت t يؤثر على قيم $\sigma_{\acute{t}}^2(c)$ لكل $t>\acute{t}$ وذلك باستبدال صيغة $\sigma_t^2(c)$ في(16) لتقدير M بالصيغة الاتية :

$$(\sigma_{t,h}^{BMH})^2(c)=a_0+\sum_{i=1}^{p}a_i(\sigma_{t-1,h}^{BM1}\ )^2(c)r_h\ \left(\frac{y_{t-i}^2}{(\sigma_{t-1,h}^{BM1}\ )^2(c)}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{q}b_i(\sigma_{t-1,h}^{BM1}\ )^2(c)\ \ldots(21)$$

اذ $y_t=0$ لكل $t\geq 0$ عندما

$$r_h(u)=\begin{Bmatrix}u & if & u\leq h\\ h & if & u>h\end{Bmatrix}$$

h ثابت بأخذ القيم 1 , 1.5 , 2

وعندما يكون p=1 , q=1 تكون الصيغة اعلاه لإنموذج GARCH (1.1)

$$(\sigma_{t,h}^{BMH})^2(c) = a_0 + a_1(\sigma_{t-1,h}^{BM1}\ )^2(c)r_h\left(\frac{y_{t-1}^2}{(\sigma_{t-1,h}^{BM1}\ )^2(c)}\right)$$
$$+ b_1(\sigma_{t-1,h}^{BM1}\ )^2(c) \dots (22)$$

عندما تكون h كبيرة فان $\sigma_t^2(c)$ و $(\sigma_t^{BM})^2(c)$ تكون قريبة جداً ، اضافة لذلك فأن تأثير قيمة شاذة واحدة على $(\sigma_{t,h}^{BM})^2(c)$ في الزمن t , t´> t يختفي بعد فترات قليلة ، لذلك قام الباحثان (Muler ,yohai 2008) بتطوير مقدر M– عندما تكون y_t تتبع انموذجGARCH وتحتوي على التلويث (القيم الشاذة) ليصبح بالصيغة الاتية :

$$\widehat{\theta_{huber}^{BM}} = \underset{c\in C}{\operatorname{argmin}} M_T^{BM1}(c) \qquad \dots \dots (23)$$

وتصبح :

$$M_{Th}^{BM1}(c) = \frac{1}{T-P}\sum_{t=p+1}^{T} \mathrm{P}\ \left(x_t - \log(\sigma_{t,k}^{BM1})^2(c)\right) \dots \dots \dots . (24)$$

الجانب التجريبي

المحاكاة

وصف تجربة المحاكاة

الخطوات الاتية تبين كيفية بناء تجربة المحاكاة من خلال استخدام لغة البرمجة R بالاعتماد على ما تم وصفه في البند السابق:

1. تم توليد بيانات حسب الانموذج الموصوف في المعادلة رقم (9) وتم افتراض قيم المعلمات النظرية $(\alpha_0 = 0.5\ , \alpha_1 = 0.4\ , \beta_1 = 0.5)$، واضافة حد خطأ عشوائي بمتوسط مساوي الى الصفر وتباين مساوي الى الواحد الصحيح باحجام العينات التي ذكرت في البند السابق.
2. تم توليد بيانات حسب الانموذج الموصوف في المعادلة رقم (9) وتم افتراض قيم المعلمات النظرية $(\alpha_0 = 0.5\ , \alpha_1 = 0.2\ , \beta_1 = 0.6)$، وتم اضافة حد خطأ عشوائي بمتوسط مساوي الى الصفر وتباين مساوي الى الواحد الصحيح باحجام العينات التي ذكرت في البند السابق
3. تم توليد بيانات حسب الانموذج الموصوف في المعادلة رقم (9) وتم افتراض قيم المعلمات النظرية $(\alpha_0 = 0.067\ , \alpha_1 = 0.063\ , \beta_1 = 0.922)$ ومن ثم اضافة حد خطأ عشوائي بمتوسط مساوي الى الصفر وتباين مساوي الى الواحد الصحيح باحجام العينات التي ذكرت في البند السابق.
4. تم توليد بيانات تتبع التوزيع الطبيعي بمقدار نسب التلويث المفترضة سابقا بمتوسط مساوي الى 15 وتباين مساوي الى الواحد الصحيح.
5. تم توليد بيانات تتبع التوزيع الطبيعي بمقدار نسب التلويث المفترضة سابقا بمتوسط مساوي الى 10 وتباين مساوي الى الواحد الصحيح.
6. تعويض القيم في الفقرة الرابعة مكان القيم الحقيقية للسلسلة الزمنية وبشكل عشوائي لتصبح لدينا سلسلة زمنية جديدة ملوثة.
7. تعويض القيم في الفقرة الخامسة مكان القيم الحقيقية للسلسلة الزمنية وبشكل عشوائي لتصبح لدينا سلسلة زمنية جديدة ملوثة.
8. تقدير معلمات الانموذج باستعمال طريقة Bayes
9. تقدير معلمات الانموذج باستعمال الطريقة الحصينة المعتمدة على دالة Huber.
10. لجميع المقدرات في الطرائق السابقة تم احتساب MSE لكل تجربة محاكاة.
11. كررت التجربة المحاكاة بمقدار 1000 مرة وفي كل مرة يتم حساب الخطوات السابقة ليتكون لدينا 1000 قيمة من قيم MSE ولكل طريقة من الطرائق المستخدمة.
12. تم احتساب الوسط الحسابي لمتوسط مربعات الاخطاء MSE عند كل تجارب المحاكاة المستخدمة ليمثل الاساس في المقارنة بين نتائج الطرائق.

وفي ادناه استعراض لنتائج المحاكاة لطرائق التقدير وفق قيم المعلمات ونسب التلويث واحجام العينات المدروسة وبعد القيمة الشاذة عن متوسط العينة.

جدول رقم (1)

قيم MSE لطرائق التقدير عند احجام العينات وقيم المعلمات المدروسة عندما d=10 ونسبة تلويث 0%

الطرائق	$\alpha_0=0.5, \alpha_1=0.4, \beta=0.5$			$\alpha_0=0.5, \alpha_1=0.2, \beta=0.6$			$\alpha_0=0.067, \alpha_1=0.063, \beta=0.92$		
	n=500	n=1000	n=1500	n=500	n=1000	n=1500	n=500	n=1000	n=1500
Bayes	0.0792774	0.0771585	0.0787063	0.050076	0.049769	0.048812	0.091257	0.089048	0.087359
BM.Huber	0.1193318	0.1186976	0.1179176	0.053473	0.053451	0.053208	0.098593	0.096604	0.096312

جدول رقم (2)

قيم MSE لطرائق التقدير عند احجام العينات وقيم المعلمات المدروسة عندما d=10 ونسبة التلويث 10%

الطرائق	$\alpha_0=0.5, \alpha_1=0.4, \beta=0.5$			$\alpha_0=0.5, \alpha_1=0.2, \beta=0.6$			$\alpha_0=0.067, \alpha_1=0.063, \beta=0.92$		
	n=500	n=1000	n=1500	n=500	n=1000	n=1500	n=500	n=1000	n=1500
Bayes	0.339385	0.3300592	0.348621	0.327786	0.257826	0.273976	0.263450	0.309638	0.284192
BM.Huber	0.226916	0.218922	0.214279	0.160467	0.157959	0.156301	0.203706	0.204551	0.202386

جدول رقم (3)

قيم MSE لطرائق التقدير عند احجام العينات وقيم المعلمات المدروسة عندما d=10 ونسبة التلويث 15%

الطرائق	$\alpha_0=0.5, \alpha_1=0.4, \beta=0.5$			$\alpha_0=0.5, \alpha_1=0.2, \beta=0.6$			$\alpha_0=0.067, \alpha_1=0.063, \beta=0.92$		
	n=500	n=1000	n=1500	n=500	n=1000	n=1500	n=500	n=1000	n=1500
Bayes	0.466521	0.482482	0.469814	0.462599	0.400306	0.412575	0.469789	0.400319	0.469789
BM.Huber	0.279279	0.283094	0.272538	0.212619	0.215414	0.217886	0.256718	0.255355	0.255777

جدول رقم (4)

قيم MSE لطرائق التقدير عند احجام العينات وقيم المعلمات المدروسة عندما d=10 ونسبة التلويث 20%

الطرائق	$\alpha_0=0.5, \alpha_1=0.4, \beta=0.5$			$\alpha_0=0.5, \alpha_1=0.2, \beta=0.6$			$\alpha_0=0.067, \alpha_1=0.063, \beta=0.92$		
	n=500	n=1000	n=1500	n=500	n=1000	n=1500	n=500	n=1000	n=1500
Bayes	0.530246	0.555172	0.521343	0.537566	0.507587	0.496615	0.460736	0.479016	0.460736
BM.Huber	0.326434	0.328806	0.322017	0.266687	0.267850	0.262851	0.305914	0.310988	0.305914

الاستنتاجات

1- عندما تكون السلسلة الزمنية خالية من التلويث في البيانات المدروسة كانت الطريقة الافضل هي (Bayes) التي حققت اقل قيمة لمعيار المقارنة (MSE) ولجميع احجام العينات، وجميع قيم المعلمات.

2- كانت الافضلية لطريقة (BM.Huber) لكل نسب التلويث ولجميع احجام العينات عندما يكون الارتباط بين المعلمتين قوي ومتوسط وضعيف .

3- اكدت النتائج تأثير قيم التلويث على قيمة (MSE) فكلما زادت نسبة التلويث زادت قيمة المعيار.

4- لوحظ وجود استقرار نسبي لقيم (MSE) عند حجم العينة الكبير .

5- هناك تأثير لقيم معلمات الانموذج على ارتفاع او انخفاض قيم (MSE) حسب قوة الارتباط بين تلك المعلمات .

6- لم يكن هناك تأثير لأحجام العينات على اختيار الطريقة الافضل.

المصادر

1. عبد الله، سهيل نجم، (2008)، **"تحليل نماذج السلاسل الزمنية اللاخطية من نوع (ARCH & GARCH) للرتب الدنيا باستعمال المحاكاة"**. أطروحة دكتوراه، جامعة بغداد.
2. كاظم، علي جواد، (1999)، **المقدرات الحصينة لمركبات التباين في النموذج العشوائي (دراسة مقارنة باستخدام المحاكاة)**، رسالة ماجستير، جامعة بغداد كلية الادارة والاقتصاد.
3. Ardia, D., (2006), "**Bayesian Estimation of the GARCH(1,1) Model with Normal Innovations**". Student. Vol. 5, No. 3-4: 283-298. Available online at: http://ssrn.com/abstract=153409
4. Ardia,D , (2007), "**Bayesian Estimation of the GARCH (1, 1) Model Innovations in R**". Available online at: http://journal.r-project.org/
5. Bollerslev, T., (1986), "**Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity**". Journal of Econometrics, Vol.31, pp. 307-327.
6. Bollerslev, T., R.Y. Chou and K.F. Kroner (1992), "**ARCH Modeling in Finance: A Selective Review of the Theory and Empirical Evidence**". Journal of Econometrics, 52, 5-59.
7. Chib, S. and Greenberg, E., (1995),"**Understanding the Metropolis-Hastings algorithm**". The American Statistician. 49(4): (327–335).
8. Engel, R.F.(1982),"**Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom**". Econometric, Vol. 50, No (4), July.
9. Engle, R. F., (2001), "**The Use of ARCH/GARCH Models in Applied**". Journal of Economic Perspectives-Volume 15, Number 4, (157-168).
10. Francq, C., and Zakoian J.M., (2010), "**GARCH Models**". John Wiley & Sons.
11. Heston, S.L., Nandi, S., (2000), "**A Closed-Form GARCH Option Valuation Model**". Review of Financial Studies, pp. 585–625.
12. Huber, P. j., (1973), "**Robust Regression: Asympotics, Conjectures and Monte Carlo**". The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 1, N. 5, (799-821).
13. Huber, P. J., Ronchetti, E. M. (2009), "**Robust statistics**". John Wiley & Sons.
14. Hwang, S., Satchell, E., and Pedro, L., (2004), "**How Persistent is Volatility? An Answer with Stochastic Volatility Models with Markov Regime Switching State Equations**". Cass Business School, London.
15. Muler, N., and Yohai, V.J., (2008), "**Robust Estimates for GARCH Models**". J Statist Plan Inference.138, (2918–2940).
16. Nakatsuma, T., (1998), "**A Markov-Chain Sampling Algorithm for GARCH Models**". Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 3: (107–117).