استخدام توزيع Weibull
لإيجاد خطة المعاينة المفردة مع تطبيق عملي

د.محمد عبد العال النعيمي• **احمد نعيم فليح ••**

الخلاصة :

في هذا البحث قام الباحث بأستخدام توزيع weibull في ايجاد خطة المعاينة المفردة للمتغيرات (single sampling plan for variables) و ذلك بعد أن تم تحديد معالم هذا التوزيع . حيث من المعروف أن توزيع weibull يعتبر من التوزيعات المهمة خصوصا" في نظرية العول (Reliability theory) و السيطرة الاحصائية على النوعية لكونه يعتبر عن المتغير الذي يمثل عمر المعدات او الوحدات المنتجة . و قد قام الباحث بتطبيق خطة المعاينة المفردة المسندة على توزيع weibull في شركة النور الذهبي و خصوصا" في الخط الانتاجي المتمثل بانتاج البطارية الجافة نوع (1G) بهدف اتخاذ القرار المناسب بشان نوعية هذا المنتوج .

المقدمة :

قام الباحث ياستخدام توزيع وايبل Weibull للحصول على خطة المعاينة المفردة للمتغيرات حيث لم يسبق لآي دراسة ان استخدمت توزيع وايبل في أيجاد خطة المعاينة المفردة . حيث عادة ما يستخدم التوزيع الآسي في أيجاد خطة المعاينة المفردة للمتغيرات التي تعبر عن طول الحياة للوحدة المنتجة ومن المعروف لدى المهتمين انه يمكن استخدام توزيع وايبل ليمثل وقت الإخفاق لوحدة إنتاج معية أي الزمن الاستخدامي لتلك المفردة حيث تتضمن خطة المعاينة المفردة المستندة على توزيع وايبل تحديد اقل حجم للعينة الواجب فحصها و بالتالي تحديد أداة حسابية يمكن من خلالها التعرف على نوعية المنتوج . كما تضمن البحث تطبيق عملي في شركة النور الذهبي لانتاج البطاريات الجافة وقد تم أيجاد خطة المعاينة المستندة على توزيع وايبل للبطارية ذات الحجم الكبير 1Gالتي تتضمن تحديد اقل حجم للعينة الواجب فحصها و التي على أساسها يتم اتخاذ القرار المناسب بشان قبول آو رفض العملية الانتاجية (الدفعة الانتاجية) الخاص بالمنتوج 1G حيث يتم الاعتماد على البيانات التي تمثل العمر الاستخدام للبطارية 1G ولعينة حجمها (١٠٥) مفردة تم آخذها من سجلات وحدة السيطرة النوعية في شركة النور الذهبي و المسجلة خلال فترات متباينة لعام٢٠٠٠-٢٠٠١ وكان حد المواصفات الأدنى L1=48 ساعة .

• استاذ الاحصاء في كلية الادارة والاقتصاد /جامعة القادسية/سابقاً

•• مدرس الاحصاء في كلية الادارة والاقتصاد/جامعة القادسية

تسمى خطة المعاينة [3] التي تعتمد على الصفات الكمية القابلة للقياس خطة المعاينة باستخدام المتغيرات (Variables Sampling Plan) حيث تعتبر خطط المعاينة بشكل عام دراسة تطبيقية لأسلوب الفحص الإحصائي و الذي يتضمن اخذ وحدات معينة من مجتمع الدراسة تشكل مايسمي بالعينة .وتستخدم خطط المعاينة للتغيرات[1] في حالات تصنيف وحدات العينة المدروسة الى وحدات معيبة آو غير معيبة بالاعتماد على القياسات المأخوذة لصفة معينة من وحدة الانتاج ، حيث تتخذ هذه القياسات شكل أي توزيع مثل التوزيع الطبيعي ، توزيع وايبل ،آو توزيع بواسون وغير ذلك من التوزيعات.

استخدام توزيع Weibull لإيجاد خطة المعاينة المفردة :-

ن التطبيقات الممكنة لتوزيع وايبل [3] هو بمثابة توزيع للمتغير الذي يعبر عن وقت إكمال بعض المهام آو الأعمال آو لوقت الإخفاق لجزء عين من المعدات المنتجة آو قد يكون بمثابة توزيع لطول الحياة للوحدة المنتجة . ويرى [2] ان لتوزيع وايبل استخدامات هامة في موضوع الرقابة على الجودة (Quality Control) ، حيث يقال ان المتغير العشوائي X يتوزع كتوزيع وايبل إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير تأخذ الشكل آلاتي :

$$f(x)=\begin{cases}\alpha.\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & \text{; If x>0}\\ 0 & \text{; Otherwise}\end{cases} \quad \text{.....(1)}$$

كذلك ان الدالة التوزيعية في توزيع وايبل هي:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & \text{; If x>0}\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases} \quad \text{.....(2)}$$

حيث ان β >0، α >0 هما معلمتا التوزيع غير المعلومتين .

ان تقدير الإمكان الأعظم MLE لمعلمتا التوزيع [5] يمكن ايجاده من خلال حل المعادلة الاتية :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\ \ell n\, x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ell n\, x_i \quad \text{.....(3)}$$

من المعادلة (3) يمكن تحديد قيمة $(\hat{\alpha})$ باستخدام طريقة (Newton-Raphson) العددية و بعد تحديد قيمة $(\hat{\alpha})$ يمكن ايجاد قيمة $(\hat{\beta})$

من المعادلة الاتية :

$$\hat{\beta}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}xi^{\hat{\alpha}}}{n}\right)^{1/\hat{\alpha}} \quad \text{.....(4)}$$

وتعتبر خطة المعاينة بمثابة مخطط يستفاد منة في السيطرة على نوعية المنتوج حيث يتم تحديد اقل حجم للعينة الواجب فحصها من قبل المسؤولين في قسم السيطرة النوعية وبالتالي اتخاذ القرار

المناسب بشان نوعية المنتوج آو بكلام آخر يتم اتخاذ القرار بقبول آو رفض العملية الإنتاجية (الدفعة الإنتاجية آو الفرضية الإحصائية) ولنفرض انه لدينا الفرضية :

H0: P=P0
V.s H1: P=P1

حيث ان :P0 نسبة الوحدات المعيبة في الانتاج بالظروف الطبيعية.
وان :P1 نسبة الوحدات المعيبة في الانتاج بالظروف غير الطبيعية

وعادة ما يرغب المنتج قبول فرضية العدم Ho ،لنفترض ان x يمثل صفة النوعية القابلة للقياس و الذي يعبر عن طول الحياة للوحدة المنتجة وان L1 يمثل الحد الأدنى للمواصفات لطول الحياة . وكما نعلم ان المتغير X يمتلك توزيع وايبل بالمعلمتين (α , β) إذا وفقط إذا كان المتغير يمتلك التوزيع الآسي بالمعلمة وبهذا إذا فرضنا ان يتوزع وفقا للتوزيع الآسي عندئذ فان :

$$Y_2 = \frac{2x^{\alpha}}{\beta^{\alpha}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

حيث ان Y2,Y2n يتوزعان وفقا لتوزيع كاي بدرجة حرية 2,2n على التوالي :

$$Y_{2n} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{\beta^{\alpha}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$ وباستخدام المعادلة (5) يكون لدينا :

$$\frac{2L_1^{\alpha}}{\beta^{\alpha}} = x_{2;p}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$ وبتعويض المعادلة (7) في المعادلة (6) نجد ان :

$$Y_{2n} = \frac{n x_{2;p}^2 \overline{x^{\alpha}}}{L_1^{\alpha}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

وبالتالي ترفض فرضية العم Ho عندما تكون القيمة المشاهدة y2n اصغر ما يمكن وبهذا فان المنطقة الحرجة هي :

$$y_{2n} = \frac{n X_{2;p}^2 \overline{x}^{\alpha}}{L_1^{\alpha}} < x_{2n;\alpha_0}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

حيث ان α_0 تمثل مخاطرة المنتج وتمثل احتمال رفض الدفعة الانتاجية الجيدة من قبل المستهلك وهي احتمال الخطاء من النوع الاول :
وان المنطقة الحرجة هي :

$$K_1 \overline{X}^{\alpha} < L_1^{\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

حيث ان:

$$K_1 = \frac{N x_{2;p_0}^2}{x_{2n;\alpha_0}^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

وان قوة الاختبار لاي قيمة من قيم p هي :

$$Power = P_r\left(\frac{N\,x^2_{2;p_o\overline{X}^{\alpha}}}{L_1} < x^2_{2n;\alpha_o}\right) \quad \text{.....(12)}$$

و التي يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$Power = P_r\left(Y_{2n} < x^2_{2n;\alpha_o}\right) \quad \text{.....(13)}$$

ولكي تكون قوة الاختبار اكبر من او تساوي $1-\beta_1$ عندما p=p1 فيجب ان يكون :

$$\frac{x^2_{2;p_1}}{x^2_{2;p_o}}\, x^2_{2n;\alpha_o} \geq x^2_{2n;1-\beta_1} \quad \text{.....(14)}$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل الأتي:

$$\frac{x^2_{2n;1-\beta_1}}{x^2_{2n;\alpha_o}} \leq \frac{x^2_{2;p_1}}{x^2_{2;p_o}} \quad \text{.....(15)}$$

حيث ان β_1 تمثل مخاطرة المستهلك وتمثل احتمال قبول الدفعة الإنتاجية غير الجيدة وهي احتمال الخطأ من النوع الثاني .

وبهذا يمكننا استخدام المتباينة (١٥) لايجاد اقل حجم للعينة n او حجم العينة الامثل الواجب فحصها وذلك باستخدام جداول مربع كاي بتطبيق مبدأ التجربة و الخطأ .

الجانب العملي:-

وصف البيانات:- ان البيانات التي استخدمت في البحث تؤلف عينة حجمها (١٠٥) مفردة تم تسجيلها من قبل المسؤولين في وحدة السيطرة النوعية التابعة لشركة النور الذهبي لصناعة البطاريات الجافة والتي تعبر عن العمر الاستخدامي او طول الحياة للبطارية الجافة 1G وخلال فترات زمنية متباينة لعام ٢٠٠٠-٢٠٠١ حيث تم سحبها بشكل عشوائي من العملية الانتاجية اضافة الى ذلك تم اخذ قيمة الحد الادنى للمواصفات L1 والذي بلغت قيمتة L1=48 ساعة(عمل متواصلة) .

والجدول التالي يبين البيانات التي تم الحصول عليها:

جدول رقم (1)
العمر الاستخدامي لـ 105 بطارية مقاسه بالساعة

N	x_i	No	x_i	No	x_i	No	x_i	No	x_i	No	x_i

o.											
1	50.37	20	5	39	0.55	58	51.3	77	50.1	96	51.77
2	50.56	21	51	40	50.8	59	50.4	78	50.32	97	51.5
3	50.5	22	51.05	41	51.2	60	51.5	79	51.012	98	50.92
4	50.571	23	51.4	42	50.01	61	51.73	80	50.43	99	51.42
5	50.57	24	51.01	43	551.02	62	50.9	81	50.7	100	50.33
6	50.556	25	51.1	44	51.76	63	50.4	82	51.02	101	51.2
7	51.71	26	51.3	45	50.8	64	50.6	83	50.31	102	51.38
8	50.4	27	50.4	46	51.28	65	50.14	84	50.21	103	51.5
9	50	28	51.8	47	51.11	66	50.9	85	50.03	104	51.68
10	51.66	29	50.9	48	51.5	67	50.3	86	50.32	105	51.82
11	51.76	30	51.12	49	50.9	68	50.7	87	51.72		
12	50.7	31	50.6	50	51.06	69	50.6	88	50.14		
13	50.5	32	51	51	50.7	70	50.2	89	50.16		
14	50.5	33	51.21	52	51	71	51.027	90	51.1		
15	51.2	34	51.13	53	51.22	72	50.4	91	51.3		
16	51.32	35	51	54	51.03	73	51.1	92	50.72		
17	51.1	36	51.09	55	51.6	74	50.5	93	51.43		
18	51.3	37	51	56	51.3	75	50.7	94	52		
19	51.6	38	51.2	57	51.4	76	50.87	95	51.31		

اختبار حسن مطابقة البيانات لتوزيع وايبل:-

لتطبيق المتباينات الخاصة بخطة المعاينة المفردة للمتغيرات المستندة على توزيع وايبل يجب التأكد اولاً من ان البيانات التي تمثل طول الحياة للوحدة المنتجة المتمثلة بالبطارية الجافة 1G تتبع توزيع وايبل ، ولهذا فاننا نستخدم اختبار مربع كاي لحسن المطابقة حيث تم اجراء هذا الاختبار باستخدام البرنامج الجاهز QSB ضمن فقرة السيطرة الاحصائية على النوعية حيث تم

فرض الفرضية الاتية:

Ho: X ~ Weibull ( )

V.S

$$\hat{\alpha} = 130.89, \hat{\beta} = 49.42$$

H1: X ~ Weibull ($\hat{\alpha}=130.89, \hat{\beta}=49.42$)

حيث ان القيم المقدرة تم حسابها بمن خلال الصيغ (٣)،(٤) حيث تبين أن :

$$\hat{\alpha}=130.89$$

حيث تم الحصول على قيمة $(\hat{\alpha})$باستخدام التكرار للصيغة (3) و بطريقة (Newton-Raphson)

و بعد الحصول على قيمة $(\hat{\alpha})$يمكن ايجاد قيمة $(\hat{\beta})$من المعادلة (4) و بالشكل الاتي :

$$\hat{\beta}=(\frac{5.83E+225}{105})^{1/130.89}=49.427$$

و الجدول التالي يبين العمليات الحسابية الضرورية لاقامة اختبار حسن المطابقة لتوزيع وايبل :

جدول رقم (٢)
العمليات الضرورية لاختبار x^2

04-09-2001	Mu=50.9476	Sigma= 0.4908	No. points	No. cell=10
18:11:55	Max.=52.1111	Min.=49.8889	Range =2.2222	Cell width=0.2222
No.	From value	To value	Actual frequency	Expected frequency
1	49.8889	50.1111	4	2.1400
2	50.1111	50.3333	10	2.1279
3	50.3333	50.5556	12	11.6684
4	50.5556	50.7778	13	14.7060
5	50.7778	51.0000	14	15.7563
6	51.0000	51.2222	22	14.8958
7	51.2222	51.4444	13	12.6454
8	51.4444	51.6667	7	9.7298
9	51.6667	51.8889	9	6.8215
10	51.8889	52.1111	1	4.3714
	Skewness=-0.0246	Kurtosis=-08550	Alpha =0.0500	Deg. Frdm.=6
	Chi-square=	10.6369	Critical value=	12.5961
	weibull	distribution	Chi-square test	Is passed!!

ويتضح من الجدول اعلاه ان قيمة المحسوبة هي chi-Square=10.6369وهي اقل من قيمة x^2 الجدولية و المبينة ايضا في الجدول أعلاه chi-Square=12.5916 وهذا يعني قبول فرضية العدم Ho أي ان البيانات التي تمثل خاصة طول الحياة للبطارية الجافة 1G تتبع توزيع وايبل بالمعالم $\hat{\alpha}=130.89, \hat{\beta}=49.427$

تطبيق خطة المعاينة المفردة المستندة على توزيع وايبل:-بعد ان تم التاكد من ان خاصية المنتج المتمثلة بطول الحياة تتبع توزيع وايبل يمكننا الان استخدام المتباينات الخاصة بخطة المعاينة المفردة المستندة على توزيع وايبل والتي تتضمن تحديد اقل حجم للعينة الواجب فحصها وكذلك ايجاد قيمة K1 حيث يتم ايجاد حجم العينة الامثل باستخدام مبدأ التجربة والخطأ مع جداول توزيع مربع كاي من خلال المتباينة (١٥) بعد ان تم تحديد قيم المؤشرات التالية من قبل السادة المسؤولين في شركة النور الذهبي لانتاج البطاريات الجافة :

Po =0.05 $0.05 = \alpha_o$

P1 =0.10 $0.05 = \beta_1$

وبتعويض هذه القيم في المتباينة (١٦) نجد ان :

$$\frac{x^2_{2n;0.95}}{x^2_{2n;0.05}} \le \frac{x^2_{2;0.10}}{x^2_{2;0.05}}$$

وباستخدام جداول توزيع مربع كاي (٤) نجد ان الطرف الايمن للمتباينة اعلاه هو:

$$\frac{x^2_{2;0.10}}{x^2_{2;0.05}} = \frac{0.211}{0.103} = 2.048$$

ولتحقيق المتباينة (١٦) يجب تحديد اقل حجم للعينة n الذي يكون من خلاله الطرف الايسر اقل من الطرف الايمن وذلك باستخدام مبدأ التجربة و الخطأ بمساعدة جداول توزيع مربع كاي ، أي ان :

١- عندما n=1 نجد ان الطرف الايمن للمتباينة (١٦) هو :

$$\frac{x^2_{2;0.95}}{x^2_{2;0.05}} = \frac{5.991}{0.103} = 58.16$$

وبما ان الطرف الايمن اكبر من الطرف الايسر فذلك يعني عدم تحقق المتباينة .

$$\frac{x^2_{2(2);0.95}}{x^2_{2(2);0.05}} = \frac{9.488}{0.711} = 13.34$$

٢-عندما n=2 نجد ان الطرف الايمن للمتباينة هو :
مما يعني عدم تحقق المتباينة .

$$\frac{x^2_{2(3);0.95}}{x^2_{2(3);0.05}} = \frac{12.592}{1.635} = 7.70$$

٣-عندما n=3 نجد ان الطرف الايمن هو:
مما يعني عدم تحقق المتباينة .

٤- عندما n=4 نجد ان الطرف الايمن هو:

$$\frac{x^2_{2(4);0.95}}{x^2_{2(4);0.05}} = \frac{15/507}{2.733} = 5.673$$

مما يعني عدم تحقق المتباينة .

٥- عندما n=5 نجد ان الطرف الايمن هو:

$$\frac{x^2_{2(5);0.95}}{x^2_{2(5);0.05}} = \frac{18.307}{3.940} = 4.646$$

مما يعني عدم تحقق المتباينة

وهكذا نستمر بزيادة قيمة n بمقدار واحد ونجدها لا تحقق المتباينة حتى عند القيمة n=21 ، أي ان :

٦- عندما n=21 نجد ان الطرف الايمن هو:

$$\frac{x^2_{2(22);0.95}}{x^2_{2(22);0.05}} = \frac{60.196}{29.509} = 2.0399$$

مما يعني عدم تحقق المتباينة

٦- عندما n=22 نجد ان الطرف الايمن هو:

$$\frac{x^2_{2(21);0.95}}{x^2_{2(21);0.05}} = \frac{57.839}{27.86} = 2.076$$

مما يعني تحقق المتباينة

وبالتالي وعند زيادة قيم n 22 نجد ان المتباينة تتحقق ولذلك سنختار اقل عدد لـ n والذي يحقق المتباينة وهو (n=22) والذي يمثل اقل حجم للعينة الواجب فحصها .

وبما ان قيمة $K_1\overline{X^{\alpha}}$ اكبر من قيمة حد المواصفات الادنى L_1^{α} فذلك يعني اننا نقبل العملية الانتاجية (الدفعة الانتاجية او الفرضية الاحصائية) أي اننا سنقبل الفرضية Ho القائلة بان نسبة المعيب في الظروف الطبيعية هي 0.05 وهذا يعني ان العملية الانتاجية ضمن المواصفات الموضوعة لها .

الاستنتاجات و التوصيات :

الاستنتاجات : مما تقدم يمكن تلخيص النتائج الاتية:

١- وجد ان خطة المعاينة المفردة الملائمة لفحص البطارية الجافة 1G بالاعتماد على خاصية طول الحياة هي :

n=22 , K1=0.0768

٢- وجد ان المنطقة الحرجة التي تعتبر بمثابة اداة حسابية لاتخاذ القرار المناسب بشان نوعية المنتوج هي :

$$0.0768\overline{X^{\alpha}} < L_1^{\alpha}$$

٣- وجد ان نوعية المنتوج المتمثل بالبطارية الجافة 1G انها جيدة لانها قد حققت متطلبات قوة الاختبار حيث تم قبول فرضية العدم القائلة بان نسبة الوحدات المعيبة في الظروف الطبيعية هي Po=0.05 وهذا يعني ان على الشركة قبول انتاجها بثقة لاتقل عن $1-\beta_1 = 0.95\%$ وذلك بعد سحب عينة عشوائية حجمها n=22 .

التوصيات: من خلال النتائج التي تم التوصل اليها نوصي بمايأتي :

١- الاخذ بنتائج هذا البحث والصيغة المعتمدة في اتخاذ القرار المناسب بشان نوعية المنتوج المتمثلة بالمنطقة الحرجة المبينة بالصيغة (١٠) وذلك بالاعتماد على الاسلوب العلمي الملائم في اختيار حجم العينة الامثل وبالتالي توفير في وقت الفحص وقلة في تكاليف الفحص والجهد المبذول في سبيل ذلك .

٢- نوصي بتطبيق هذا البحث على الخطوط الانتاجية لانواع البطاريات ذات الحجم المتوسط 2G و الحجم الصغير 3G لمعرفة نوعيتها .
٣- الاعتماد على الاساليب الاحصائية المستخدمة في موضوع السيطرة على النوعية من قبل المسؤولين في وحدة السيطرة النوعية في شركة النور الذهبي .

المصادر :

المصادر العربية :-

١- البياتي ، شمعون كوركيس ، ١٩٨٨ ، السيطرة النوعية والمواصفات القياسية للاغذية ، وزارة التعليم العالي و البحث العلمي ، جامعة الموصل ، الطبعة الاولى ، دار الكتب للطباعة والنشر .
٢- هرمز ، امير حنا ، ١٩٩٠ ، " الاحصاء الرياضي " وزارة التعليم العالي و البحث العلمي ، جامعة الموصل ، دار الكتب للطباعة والنشر .

المصادر الاجنبية :-

3- Guter ,w.c ,(1977) ,"sampling inspecting in statistical quality control "; Charles Griffin and cop . ltd. (London).
4- Murdoch ,J. and Barenes , JA, (1969) , "statistical tables " , macmillan education . LTD . England .
5- Thoman, D.R ., L.J.bain , and C.E. Aulte ,(1969),