استخدام المحاكاة للمقارنة بين مقدرات معلومة ومقترحة لمعلمة القياس ومعولية توزيع رالي ذي المعلمتين

م. أزهار عزيز عبداللطيف الرمضان
المعهد التقني/ العمارة

الخلاصة:

استخدم توزيع رالي ذي المعلمتين (α,β) بصورة واسعة في نمذجة بيانات اوقات الحياة للوحدات المنتجة، وله تطبيقات احصائية واسعة في تحليل اوقات الفشل، وتنبؤات اوقات الفشل، ولاهمية هذا التوزيع سوف يعتمد في هذا البحث خمسة طرائق لتقدير معلمة القياس β باعتبار ان معلمة الازاحة α معلومة، والطرائق هي الامكان الاعظم والعزوم ومقدر بيز، ثم نتحول الى مقدر مقترح اول لطريقة بيز المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة، ومقدر مقترح ثاني لطريقة بيز المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة، وتنفذ المقارنة بواسطة تجارب المحاكاة ولحجوم عينات مختلفة (n=10, 25, 50, 100)، وتكرار كل تجربة (R=1000)، واعتماد المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ كأساس للمقارنة. وسيتم اولاً عرض الجانب النظري وطرائق التقدير ثم جانب المحاكاة.

Abstract

The Rayleigh distribution has been widely used especially in the modeling of the life time event data. It provides a statistical model which has a wide variety of application in many areas and such as accurate analysis and failure forecasts and reliability estimate. In this research we explore and compare the performance of many estimators for the parameters and for reliability function approach used are Maximum Likelihood and, Moments and Bayesian using Jeffrey Prior and Proposed from Extension of Jeffery Prior methods.

Simulation experiments are performed to compare between estimators using MSE, and all the results are explained by table.

Key word: Rayleigh distribution, Maximum Likelihood Estimators, Moment Estimators, Bayes Estimators.

المقدمة:

يعتبر توزيع رالي من التوزيعات الاحصائية الاحتمالية المهمة في تحليل بيانات وقت البقاء للحوادث، وكذلك وصف توزيع الوقت المستغرق لحين حصول الفشل في الوحدات المنتجة، مما يساهم ذلك في توفير توقعات جيدة لاوقات الفشل المحتملة، خصوصاً في حالة العينات الصغيرة. وقد اعتمدت العديد من الطرائق الاحصائية لتقدير معلماته ومن ثم حساب معولية هذا التوزيع، ومن هذه الطرائق نذكر على سبيل المثال لاالحصر طريقة الامكان الاعظم والعزوم وطريقة بيز بالاعتماد على معلومات جيفري، اي باعتبار ان

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

المعلمات هي متغيرات عشوائية لها توزيعات احتمالية معينة تحدد من الخبرة السابقة والبيانات المتوفرة لدى الباحث.

سوف نتناول في هذا البحث خمسة طرائق لتقدير معلمة القياس β، ومن ثم اعتماد هذا المقدرات في حساب المعولية لتوزيع رايلي، وان المقارنة بين الطرائق ستتم بواسطة المحاكاة وعددياً، والطرائق هي الامكان الاعظم والعزوم وطريقة بيز ومقدر مقترح اول لطريقة بيز المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة، ومقدر مقترح ثاني لطريقة بيز المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة، وسوف يعتمد متوسط مربعات الخطأ (MSE) كاساس في المقارنة.

هدف البحث:

يهدف البحث الى المقارنة بين خمسة مقدرات لتقدير معلمة القياس β لتوزيع رايلي ذي المعلمتين (α,β) حيث α تمثل معلمة الازاحة، β معلمة القياس، وسوف نعتبر α معلومة، اما β فسوف تقدر بطريقة الامكان الاعظم والعزوم ومقدر بيز، ومقدرين مقترحين. والسبب في اعتبار α ثابتة فهي عامل مهم خاصة بالنسبة للتطبيقات الطبية والصناعية والدراسات السريرية، والتي يقوم بها الباحثون بعد مرور α من الزمن على البحوث الطبية سيما بالنسبة للمرضى المصابين بالسرطان[2] وغيرها من اختبارات الحياة التي تظهر فيها الاعراض واضحة بعد مرور مدة زمنية تسمى α، وسوف نعبر عنها بمعلمة الازاحة Shifting parameter. اما β فهي معلمة القياس والتي سيتم تقديرها عددياً بواسطة المحاكاة من خلال الطرائق الخمسة المشار اليها في اعلاه.

الجانب النظري:

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع رايلي ذي المعلمتين (α,β)، تاخذ الصيغة الآتية:

$$f(t;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{2(t-\alpha)}{\beta}\,e^{-\dfrac{(t-\alpha)^2}{\beta}} & \alpha<t<\infty;\ \beta>0 \\ 0 & o/w\end{cases} \qquad \text{Eq.(1)}$$

حيث α تمثل معلمة الازاحة، β معلمة القياس.

اما دالة التوزيع الاحتمالية التراكمية $c.d.f$ فهي:

$$F(t,\alpha,\beta)=\Pr(T\le t)=\int_{\alpha}^{t} f(u)\,du=1-e^{-(t-\alpha)^2/\beta} \qquad \text{Eq.(2)}$$

ودالة المعولية R(t) فهي:

$$R(t)=Pr(T>t)=1-F(t)$$

$$=\int_{t}^{\infty} f(u;\alpha,\beta)\,du$$

$$=\int_{t}^{\infty} \frac{2(u-\alpha)}{\beta}\,e^{-(u-\alpha)^2/\beta}\,du$$

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

وبعد التكامل يكون الناتج كالآتي:

$$R(t)=e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\beta}} \qquad \alpha<t<\beta\ ;\ \beta>0 \qquad \text{Eq.(3)}$$

وطبقاً لذلك تكون دالة المخاطرة لهذا التوزيع وهي تمثل معدل الفشل h(t) ويكون متغير مع الزمن هو:

$$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{2(t-\alpha)}{\beta} \qquad \text{Eq.(4)}$$

وكما اشرنا فان المعادلة ٤ تمثل معدل الفشل والذي يكون متغير مع الزمن.

ولكي نقدر دالة المعولية، هناك العديد من الطرائق التقليدية منها الامكان الاعظم والعزوم، وهذه الطرائق لها صفات احصائية مختلفة ولكنها بالمقابل تهمل المعلومات الاولية المتوفرة حول المعلمات المطلوب تقديرها، لذلك تم اشتقاق مقدرات لتقدير دالة المعولية بتوظيف معلمات جيفري، ولصعوبة الحصول على التوزيع النظري الخاص بالمقدرات هذه، سيتم اجراء المقارنة بواسطة المحاكاة للتوصل الى افضل تقدير لدالة المعولية لهذا التوزيع واعتماد المعيار الاحصائي المعروف بمتوسط مربعات الخطأ MSE للمقارنة، وفيما يلي شرح لطرائق التقدير الاربعة:

طرائق تقدير معلمة القياس β:

اولاً: طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood Method (MLM)

تهدف هذه الطريقة الى جعل دالة الامكان في نهايتها العظمى، فاذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, ..., t_n)$ تتبع التوزيع في المعادلة (١)، فان دالة الامكان الاعظم هي:

$$L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\alpha,\beta) \qquad \text{Eq.(5)}$$

$$=2^n\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\ e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\alpha)^2}{\beta}}$$

وباخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (٥):

$$LnL=nLn(2)-nLn(\beta)+\sum_{i=1}^{n}Ln(t_i-\alpha)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta} \qquad \text{Eq.(6)}$$

$$t_i>\alpha\ ;\ i=1,2,...,n$$

وباشتقاق المعادلة (٦) بالنسبة الى β ومساواة المشتقة مع الصفر، نحصل على:

$$\frac{\partial LnL}{\partial\beta}=\frac{-n}{\beta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta^2}$$

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

ومنها نجد ان مقدر الامكان الاعظم $\hat{\beta}_{ML}$ هو :

$$\hat{\beta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2}{n} \qquad \text{Eq.(7)}$$

وطبقا لخاصية الثبات التي تتمتع بها مقدرات الامكان الاعظم، فان مقدر دالة المعولية حسب طريقة الامكان الاعظم سيكون:

$$\hat{R}_{ML}(t) = e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\hat{\beta}_{ML}}} \qquad \text{Eq.(8)}$$

ثانياً: طريقة العزوم Method of Moments

تتميز طريقة العزوم بسهولتها وهي تعتمد على فرضية مساواة عزوم المجتمع μ_r مع عزوم العينة m_r ، حيث ان:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^r}{n} \qquad \text{Eq.(9)}$$

$$\mu_r = E(t^r)$$

ومن ثم حل المعادلات الناتجة.

وطالما ان العزم الاول لتوزيع رايلي هو:

$$\mu_1 = E(t) = \frac{\sqrt{\pi\beta}}{2} + \alpha$$

وان:

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \bar{t}$$

$$\mu_1 = m_1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi\hat{\beta}}}{2} + \alpha = \bar{t}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi\hat{\beta}}}{2} = \bar{t} - \alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi\hat{\beta}} = 2(\bar{t} - \alpha)$$

والتي تبسط الى:

$$\hat{\beta}_{MOM} = \frac{4}{\pi}(\bar{t} - \alpha)^2 \qquad \text{Eq.(10)}$$

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

وطبقاً لذلك يكون مقدر المعولية حسب طريقة العزوم هو:

$$\hat{R}_{MOM}(t)= e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\hat{\beta}_{MOM}}} \qquad \text{Eq.(11)}$$

ثالثاً: مقدر بيز بالاعتماد على معلومات Jeffrey الاولية:

اذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, ..., t_n)$ من توزيع رايلي المعرف بالمعادلة (١)، بمعلمة ازاحة α ومعلمة قياس β ، فان معلومات جيفري الاولية عن المعلمة يتم حسابها من العلاقة:

$$g(\theta)=k\sqrt{I(\theta)} \qquad \text{Eq.(12)}$$

ويمثل المقدار $I(\theta)$ معلومات فيشر Fisher information، ويساوي:

$$I(\theta)=-E(\frac{\partial^2 Log(L)}{\partial\theta^2})$$

واذا اعتبرنا ان المعلومات الاولية عن β هي:

$$g(\beta)=k\frac{\sqrt{n}}{\beta} \qquad \text{Eq.(13)}$$

فان التوزيع اللاحق $h(\beta \backslash t)$ سيكون:

$$h(\beta \backslash t_1,t_2,...,t_n)=\frac{L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)\,g(\beta)}{\int_0^\infty L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)\,g(\beta)\,d\beta} \qquad \text{Eq.(14)}$$

وبالنسبة للمقدار في مقام المعادلة (١٤) فهو:

$$\int_0^\infty L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)g(\beta)d\beta=\int_0^\infty \frac{2^n}{\beta^n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}}\frac{k\sqrt{n}}{\beta}d\beta$$

$$=2^n k\sqrt{n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\int_0^\infty \beta^{-(n+1)}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}}d\beta$$

وبعد تطبيق التكامل حسب قاعدة كـاما نجد ان ناتج التكامل هو:

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

$$= 2^n k\sqrt{n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\frac{\Gamma(n)}{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^n} \qquad \text{Eq.(15)}$$

وطبقاً لذلك تكون الدالة الاحتمالية الشرطية اللاحقة للمعلمة β بوجود بيانات العينة $(t_1, t_2, ..., t_n)$ هي:

$$h(\beta \setminus t_1,t_2,...,t_n) = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}}}{\beta^{n+1}\Gamma(n)} \qquad \beta > 1 \qquad \text{Eq.(16)}$$

وفي حالة دالة الخسارة التربيعية Squared Error Loss Function يكون مقدر بيز للمعلمة β هو توقع التوزيع اللاحق:

$$\hat{\beta}_{Bayes} = E(B \setminus t) = \int_0^{\infty} \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}}}{\beta^{n+1}\Gamma(n)} d\beta$$

$$\therefore \hat{\beta}_{Bayes} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{n-1} \qquad \text{Eq.(17)}$$

ويمكننا استخدام نفس دالة الخسارة لايجاد مقدر بيز لدالة المعولية ومتوسط التوزيع اللاحق سيكون هو ايضاً التوقع لدالة المعولية بالنسبة الى التوزيع اللاحق كما يلي:

$$\hat{R}_{Bayes}(t) = E_{post}\,R(t) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\beta}} \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}}}{\beta^{n+1}\Gamma(n)} d\beta$$

$$\therefore \hat{R}_{Bayes}(t) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2 + (t-\alpha)^2}\right]^n \qquad \text{Eq.(18)}$$

رابعاً: طريقة بيز الاولى المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة:

ان طريقة بيز المحورة تعتمد عل استخدام المعلومات الاولية التي تاخذ الصيغة التالية:

$$g(\beta) = \frac{k}{\sqrt{\beta^3}} \qquad \text{Eq.(19)}$$

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

حيث k يمثل ثابت.

واذا كانت $(t_1, t_2, ..., t_n)$ عينة عشوائية من الدالة الممثلة بالمعادلة (١)، فان التوزيع اللاحق بالاعتماد على معلومات جيفري الأولية المحورة يتم الحصول عليه بتطبيق صيغة بيز التالية: سيكون:

$$h(\beta \backslash t_1,t_2,...,t_n)=\frac{L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)\, g(\beta)}{\int_0^\infty L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)\, g(\beta)\, d\beta}$$

وبعد تطبيق التكامل واجراء تبسيطات معينة يكون التوزيع اللاحق لمعلمة القياس β بوجود العينة $(t_1, t_2, ..., t_n)$ هو:

$$\int_0^\infty L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)\, g(\beta)\, d\beta = \int_0^\infty \frac{2^n}{\beta^n} \prod_{i=1}^{n} (t_i-\alpha) e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}} \frac{k}{\sqrt{\beta^3}} d\beta$$

$$= 2^n k \prod_{i=1}^{n} (t_i-\alpha) \frac{\Gamma(n+0.5)}{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^{n+0.5}}$$

وبذلك فان دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية اللاحقة للمعلمة β بوجود بيانات العينة $(t_1, t_2, ..., t_n)$ ستكون:

$$h(\beta \backslash t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^{n+0.5} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}}}{\beta^{n+3/2}\,\Gamma(n+0.5)} \qquad \text{Eq.(20)}$$

وعند استخدام دالة خسارة تربيعية، فان مقدر بيز والذي سنرمز له $\hat{\beta}_{bm1}$ هو متوسط التوزيع اللاحق $E(\beta \backslash t)$ ويساوي:

$$\hat{\beta}_{bm1} = \mathrm{E}_{post}(\beta) = \int_0^\infty \beta \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^{n+0.5}}{\beta^{n+3/2}\,\Gamma(n+0.5)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}} d\beta$$

$$\hat{\beta}_{bm1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{n-0.5} \qquad \text{Eq.(21)}$$

وان مقدر بيز لدالة المعولية سيكون ايضاً التوقع لدالة المعولية بالاعتماد على التوزيع اللاحق وكما يلي:

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

$$\hat{R}(t)_{bm1} = \mathrm{E}_{post}\, R(t)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\beta}} \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^{n+0.5}}{\beta^{n+3/2}\,\Gamma(n+0.5)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}} d\beta$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2 + (t-\alpha)^2}\right]^{n+0.5} \qquad \text{Eq.(22)}$$

خامساً: طريقة بيز الثانية المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة:

ان طريقة بيز المحورة تعتمد عل استخدام المعلومات الاولية التي تاخذ الصيغة التالية:

$$g(\beta) = \frac{k}{\sqrt{\beta^5}} \qquad \text{Eq.(23)}$$

حيث k ثابت.

واذا كانت $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ عينة عشوائية من الدالة الممثلة بالمعادلة (١)، فان التوزيع اللاحق بالاعتماد على معلومات جيفري الأولية المحورة يتم الحصول عليه بتطبيق صيغة بيز التالية: سيكون:

$$g(\beta \backslash t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{L(t_1, t_2, \ldots, t_n; \alpha, \beta)\, g(\beta)}{\int_0^{\infty} L(t_1, t_2, \ldots, t_n; \alpha, \beta)\, g(\beta)\, d\beta}$$

وان تكامل المقام هو:

$$\int_0^{\infty} L(t_1, t_2, \ldots, t_n; \alpha, \beta)\, g(\beta)\, d\beta = \int_0^{\infty} \frac{2^n}{\beta^n} \prod_{i=1}^{n} (t_i - \alpha) e^{-\frac{T}{\beta}} \frac{k}{\sqrt{\beta^5}} d\beta$$

$$= 2^n k \prod_{i=1}^{n} (t_i - \alpha) \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^{n+\frac{5}{2}}} e^{-\frac{T}{\beta}} d\beta$$

حيث $T = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha)^2$.

وبافتراض ان:

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

$$y=\frac{T}{\beta} \;\Rightarrow\; \beta=\frac{T}{y}$$
$$d\beta=-\frac{T}{y^2}dy \qquad \text{Eq.(24)}$$

وبعد تطبيق هذا التحويل واجراء التكامل، نجد ان:

$$2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\int_0^{\infty}\left(\frac{T}{y}\right)^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)} e^{-y}\,\frac{T}{y^2}\,dy$$
$$=2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\int_0^{\infty} y^{n+\frac{5}{2}-2} e^{-y}\,dy$$
$$=2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\int_0^{\infty} y^{\left(n+\frac{3}{2}\right)-1} e^{-y}\,dy$$
$$=2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

وبالتالي يكون التوزيع اللاحق لمعلمة القياس β بوجود العينة $(t_1, t_2, ..., t_n)$ هو:

$$g(\beta\backslash t)=\frac{\dfrac{2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)}{\beta^{n+\frac{5}{2}}}\,e^{-\frac{T}{\beta}}}{2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$
$$=\frac{\dfrac{1}{\beta^{n+\frac{5}{2}}}\,e^{-\frac{T}{\beta}}}{T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$
$$\therefore g(\beta\backslash t)=\frac{T^{n+\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\beta^{n+\frac{5}{2}}}\,e^{-\frac{T}{\beta}} \qquad \text{Eq.(25)}$$

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

وبالاعتماد على دالة الخسارة التربيعية، يكون مقدر بيز بالاعتماد على التعريف الجديد لتوزيع المعلمة β، والذي سنرمز له $\hat{\beta}_{bm2}$ هو متوسط التوزيع اللاحق $E(\beta \backslash t)$ ويساوي:

$$\hat{\beta}_{bm2} = \mathrm{E}(\beta \backslash t) = \int_0^\infty \beta \; g(\beta \backslash t)\, d\beta$$

$$= \frac{T^{n+\frac{3}{2}}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \int_0^\infty \beta \; \frac{1}{\beta^{n+\frac{5}{2}}} e^{-\frac{T}{\beta}} \; d\beta$$

$$\hat{\beta}_{bm2} = \frac{T^{n+\frac{3}{2}}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \int_0^\infty \frac{1}{\beta^{n+\frac{3}{2}}} e^{-\frac{T}{\beta}} \; d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \int_0^\infty \left(\frac{T}{\beta}\right)^{n+\frac{3}{2}} e^{-\frac{T}{\beta}} \; d\beta$$

وبافتراض ان:

$$y = \frac{T}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{T}{y}$$

$$d\beta = -\frac{T}{y^2} dy \qquad \text{Eq.(26)}$$

$$\hat{\beta}_{bm2} = \frac{1}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \int_0^\infty y^{n+\frac{3}{2}} e^{-y} \; \frac{T}{y^2} dy$$

$$= \frac{T}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \int_0^\infty y^{n-\frac{1}{2}} e^{-y} \, dy$$

$$= \frac{T}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \hat{\beta}_{bm2} = \frac{T \; \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \qquad \text{Eq.(27)}$$

كما ان مقدر بيز لدالة المعولية سيكون ايضاً التوقع لدالة المعولية بالاعتماد على التوزيع اللاحق وكما يلي:

$$\hat{R}(t)_{bm2} = \mathrm{E}_{post} \, R(t)$$

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\beta}} \frac{T^{n+\frac{3}{2}}}{\beta^{n+\frac{5}{2}}\Gamma(n+\frac{3}{2})} e^{-\frac{T}{\beta}} d\beta$$

$$= \left[\frac{T}{T+(t-\alpha)^2}\right]^{n+1.5} \qquad \text{Eq.(28)}$$

الجانب التجريبي

لغرض المقارنة بين المقدرات الخمسة لمعلمة القياس β اعتمدت المحاكاة، حيث تم توليد البيانات من التوزيع المنتظم وتحويلها الى بيانات تتبع توزيع رايلي ذي المعلمتين وباستخدام دالة التوزيع التجميعية وحسب طريقة التحويل العكسية التالية:

$$F(t,\alpha,\beta)=1-e^{-(t-\alpha)^2/\beta}$$

$$U=1-e^{-(t-\alpha)^2/\beta}$$

$$e^{-(t-\alpha)^2/\beta}=1-U$$

وبعد اجراء بعض التبسيطات، نحصل على:

$$\frac{-(t-\alpha)^2}{\beta}=Ln(1-U)$$

$$(t-\alpha)^2=-\beta\, Ln(1-U)$$

$$\therefore\ t=\alpha+\sqrt{-\beta\, Ln(1-U)} \qquad \text{Eq.(29)}$$

وتستخدم المعادلة (٢٨) في توليد البيانات لحجوم عينات مختلفة وقيم مفترضة للمعلمة ($\alpha=0.5,\ 1.0,\ 1.5$) والمعلمة ($\beta=0.5, 1.0, 1.5$). وتستخرج المقدرات للمعلمة β من تطبيق المعادلات (٧، ١٠، ١٧، ٢١، ٢٧)، ويعتمد المقياس متوسط مربعات الخطأ Mean Squared Error (MSE) في المقارنة.

ولتنفيذ تجارب المحاكاة على قيم t_i المولدة من المعادلة (٢٨)، وقد اخذت اربعة حجوم للعينات هي (n=10, 25, 50, 100)، وكررت كل تجربة (1000) مرة. واعطيت قيمة افتراضية لكل من (α, β)، والجداول التالية تلخص نتائج المحاكاة التي استخرجت من تنفيذ البرنامج الذي تم كتابته باستخدام تطبيق البرنامج Matlab.

جدول (1): يوضح تقديرات معلمة القياس $\hat{\beta}$

n	β	α	$\hat{\beta}$

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

			$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}_{Mom}$	$\hat{\beta}_{Bay}$	$\hat{\beta}_{bm1}$	$\hat{\beta}_{bm2}$
10	0.5	0.5	0.5035600	0.5144600	0.5595200	0.5300700	0.4795900
		1.0	0.5044500	0.5172100	0.5605000	0.5310000	0.4804300
		1.5	0.5041900	0.5159600	0.5602100	0.5307200	0.4801800
	1.0	0.5	0.9981500	1.0288500	1.1090500	1.0506800	0.9506200
		1.0	0.9833300	1.0080800	1.0925900	1.0350800	0.9365000
		1.5	0.9952300	1.0262100	1.1058100	1.0476100	0.9478400
	1.5	0.5	1.5056200	1.5586800	1.6729100	1.5848600	1.4339200
		1.0	1.4560200	1.4921200	1.6178000	1.5326500	1.3866900
		1.5	1.4708100	1.5121800	1.6342400	1.5482200	1.4007700
25	0.5	0.5	0.5111200	0.5163600	0.5324100	0.5215500	0.5011000
		1.0	0.5029300	0.5062600	0.5238900	0.5132000	0.4930700
		1.5	0.5034300	0.5089700	0.5244000	0.5137000	0.4935500
	1.0	0.5	0.9922200	1.0001500	1.0335600	1.0124700	0.9727700
		1.0	1.0035700	1.0122600	1.0453800	1.0240500	0.9838900
		1.5	1.0040800	1.0177400	1.0459200	1.0245700	0.9843900
	1.5	0.5	1.4914700	1.5066600	1.5536200	1.5219100	1.4622300
		1.0	1.5305700	1.5476300	1.5943500	1.5618100	1.5005600
		1.5	1.5168500	1.5372600	1.5800500	1.5478000	1.4871000
50	0.5	0.5	0.5017800	0.5047400	0.5120200	0.5068400	0.4968100
		1.0	0.4951800	0.4975300	0.5052900	0.5001900	0.4902800
		1.5	0.5014700	0.5039900	0.5117000	0.5065300	0.4965000
	1.0	0.5	0.9989800	1.0066100	1.0193700	1.0090700	0.9890900
		1.0	0.9968700	1.0013400	1.0172100	1.0069400	0.9870000
		1.5	1.0040900	1.0083100	1.0245900	1.0142400	0.9941500
	1.5	0.5	1.4960000	1.5001800	1.5265400	1.5111200	1.4811900
		1.0	1.4773100	1.4867500	1.5074600	1.4922300	1.4626800
		1.5	1.4842700	1.4924300	1.5145500	1.4992600	1.4695700
100	0.5	0.5	0.4965500	0.4969600	0.5015700	0.4990500	0.4940800
		1.0	0.4978300	0.4991900	0.5028600	0.5003300	0.4953500
		1.5	0.4964600	0.4968700	0.5014700	0.4989500	0.4939900
	1.0	0.5	1.0055000	1.0061900	1.0156500	1.0105500	1.0004900
		1.0	0.9962500	0.9991200	1.0063100	1.0012600	0.9912900
		1.5	1.0027900	1.0076600	1.0129200	1.0078300	0.9978000
	1.5	0.5	1.5076700	1.5086600	1.5229000	1.5152500	1.5001700
		1.0	1.5013900	1.5058500	1.5165600	1.5089400	1.4939200
		1.5	1.4993500	1.5023900	1.5144900	1.5068800	1.4918900

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

جدول (2) يوضح متوسط مربعات الخطأ لتقديرات معلمة القياس $\hat{\beta}$

n	β	α	متوسط مربعات الخطأ لتقديرات معلمة القياس				
			$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}_{Mom}$	$\hat{\beta}_{Bay}$	$\hat{\beta}_{bm1}$	$\hat{\beta}_{bm2}$
10	0.5	0.5	0.0023665	0.0026128	0.0032742	0.0027111	0.0021870
		1.0	0.0024798	0.0029041	0.0034250	0.0028416	0.0022858
		1.5	0.0023133	0.0027046	0.0032162	0.0026556	0.0021359
	1.0	0.5	0.0095321	0.0112518	0.0129568	0.0108184	0.0088895
		1.0	0.0097468	0.0116162	0.0128560	0.0108920	0.0092186
		1.5	0.0105451	0.0123176	0.0141354	0.0119085	0.0098348
	1.5	0.5	0.0231347	0.0269832	0.0315472	0.0263507	0.0214176
		1.0	0.0228927	0.0259168	0.0294115	0.0252582	0.0218730
		1.5	0.0202630	0.0218366	0.0267128	0.0225902	0.0192865
25	0.5	0.5	0.0003874	0.0004292	0.0004570	0.0004168	0.0003676
		1.0	0.0003810	0.0004123	0.0004358	0.0004033	0.0003678
		1.5	0.0004248	0.0005018	0.0004842	0.0004493	0.0004095
	1.0	0.5	0.0016321	0.0018417	0.0018134	0.0017031	0.0015961
		1.0	0.0016077	0.0017650	0.0018263	0.0016966	0.0015552
		1.5	0.0014995	0.0017534	0.0017107	0.0015848	0.0014504
	1.5	0.5	0.0041076	0.0046101	0.0045689	0.0042932	0.0040024
		1.0	0.0044770	0.0051648	0.0051733	0.0047755	0.0042672
		1.5	0.0035274	0.0038178	0.0040714	0.0037524	0.0033861
50	0.5	0.5	0.0000973	0.0001122	0.0001042	0.0001002	0.0000956
		1.0	0.0000967	0.0001025	0.0001007	0.0000982	0.0000962
		1.5	0.0000980	0.0001025	0.0001047	0.0001008	0.0000963
	1.0	0.5	0.0004057	0.0004694	0.0004299	0.0004155	0.0004000
		1.0	0.0003830	0.0004043	0.0004046	0.0003916	0.0003787
		1.5	0.0004250	0.0004649	0.0004542	0.0004373	0.0004169
	1.5	0.5	0.0009560	0.0010695	0.0010092	0.0009776	0.0009440
		1.0	0.0008426	0.0009361	0.0008678	0.0008504	0.0008438
		1.5	0.0009021	0.0010026	0.0009384	0.0009154	0.0008980
100	0.5	0.5	0.0000227	0.0000246	0.0000231	0.0000229	0.0000227
		1.0	0.0000241	0.0000261	0.0000246	0.0000243	0.0000240
		1.5	0.0000237	0.0000255	0.0000241	0.0000239	0.0000237
	1.0	0.5	0.0000964	0.0001040	0.0001005	0.0000982	0.0000951
		1.0	0.0001034	0.0001099	0.0001058	0.0001044	0.0001030
		1.5	0.0001045	0.0001100	0.0001083	0.0001061	0.0001035
	1.5	0.5	0.0001905	0.0002108	0.0001990	0.0001941	0.0001880
		1.0	0.0002516	0.0002821	0.0002594	0.0002549	0.0002495
		1.5	0.0002186	0.0002566	0.0002251	0.0002212	0.0002171

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

جدول (3) يوضح تقديرات دالة المعولية لمعلمة القياس $\hat{\beta}$

n	β	α	المعولية				
			$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}_{Mom}$	$\hat{\beta}_{Bay}$	$\hat{\beta}_{bm1}$	$\hat{\beta}_{bm2}$
10	0.5	0.5	0.5875200	0.5929600	0.5959200	0.5810800	0.5526000
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.5878600	0.5928000	0.5962400	0.5814400	0.5530200
	1.0	0.5	0.7617600	0.7665200	0.7647400	0.7546900	0.7350400
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.7586600	0.7632300	0.7617400	0.7516300	0.7318400
	1.5	0.5	0.8327800	0.8370100	0.8342900	0.8268500	0.8122000
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.8307900	0.8342900	0.8323100	0.8247800	0.8099500
25	0.5	0.5	0.6047200	0.6072300	0.6078000	0.6018300	0.5900900
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.5991800	0.6012100	0.6023500	0.5963400	0.5845100
	1.0	0.5	0.7700800	0.7709100	0.7711600	0.7671800	0.7593000
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.7732100	0.7750400	0.7742500	0.7703200	0.7625200
	1.5	0.5	0.8394600	0.8404500	0.8400000	0.8370900	0.8313000
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.8431400	0.8448700	0.8436400	0.8407900	0.8351100
50	0.5	0.5	0.6032200	0.6044100	0.6047700	0.6017500	0.5957600
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.6029700	0.6043300	0.6045200	0.6015000	0.5955100
	1.0	0.5	0.7750800	0.7761200	0.7755900	0.7736300	0.7697200
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.7759800	0.7765000	0.7764900	0.7745300	0.7706300
	1.5	0.5	0.8433500	0.8434500	0.8436000	0.8421700	0.8393100
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.8423100	0.8428400	0.8425600	0.8411200	0.8382500
100	0.5	0.5	0.6023400	0.6024200	0.6031200	0.6016000	0.5985700
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.6021800	0.6022600	0.6029500	0.6014300	0.5984100
	1.0	0.5	0.7782600	0.7782700	0.7785100	0.7775400	0.7755900
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.7775600	0.7784300	0.7778000	0.7768300	0.7748800
	1.5	0.5	0.8461200	0.8461100	0.8462300	0.8455300	0.8441200
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.8451400	0.8452200	0.8452600	0.8445500	0.8431300

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

الاستنتاجات

يلاحظ من نتائج المحاكاة:

١-ان مقدرات طريقة بيز الثانية المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة لمعلمة القياس β تمتلك اصغر MSE ولجميع حجوم العينات، ثم تاتي مقدرات طريقة بيز الاولى المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة بالدرجة الثانية، تليها مقدرات الامكان الاعظم تم مقدرات طريقة العزوم بينما اعطت مقدرات بيز اعلى متوسط مربعات خطأ.

٢-وجد ان قيم MSE تتناقص كلما ازداد حجم العينة ولجميع المقدرات والحالات المدروسة من القيمة الاولية وهذا يتطابق مع النظرية الاحصائية.

التوصيات

١ـ نوصي بتصميم نتائج البحث لتشمل توزيعات احتمالية مستمرة أخرى .

٢ـ نوصي بعمل تطبيق متقدم للبحث بحيث تعميم خطط عينات قبول مختلفة ، إذا كان الوقت المستغرق لحين حصول الفشل في الوحدات المنتجة هو متغير عشوائي يتبع توزيع رالي ذو المعلمتين .

1- References

1- Abu-Taleb A. A., Smadi, M. M. and Alwaneh, A. J., (2007). "Bayes Estimation of the Life Time Parameters for the Exponential Distribution"; J. Math. Statist. 3(3), 106-108.

2- Dey, S. & Das, M. K., (2007), "A Note on Prediction Interval for a Rayleigh Distribution: Bayesian Approach"; American Journal of Mathematical and Management Science 27 (1&2), 43-48.

3- Johnson, V. E. and D. Rossell, (2010), "On the Use of Non-Local Prior Densities in Bayesian Hypothesis Tests"; J. R. Statist. Soc. B., 72: 143-170.

4- Muhammad Saleem and Muhammad Aslam, (2009); "On Bayesian Analysis of the Rayleigh Survival Time Assuming the Random Censor Time"; Pak. J. Statist. 2009, Vol. 25(2), 71-82.

5- Rao, G. S., (2009), "Reliability Test Plans for Marshall-Olki Extended Exponential Distribution"; App. Math. Science, 55(3), 2745-2755.

6- Sanku Dey (2008), "Minimax Estimation of the Parameter of the Rayleigh Distribution under Quadratic Loss Function"; Data Science Journal, Vol. 7, 23 February 2008.

7- Serge B. Provost, Abdus Saboor and Munir Ahmad, (2011); "The Gamma – Weibull Distribution"; Pak. J. Statist. 2011, Vol. 27(2), 111-131.

ISSN-1994-697X

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)