بناء نموذج احتمالي لاوقات الفشل باستخدام تحويل انتروبي
لتوزيع Burr Type-XII

م . د. أسماء غالب جابر
كلية الأدارة والاقتصاد
جامعة بغداد

الباحث/ أسيل نوري صالح
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
دائرة القبول المركزي

المستخلص

تعرف الانتروبي بأنها مقياس لعدم التأكد . قد تم استعمال تحويل الانتروبي باستخدام دالة التوزيع التراكمية ودالة المعولية للتوزيع المستمر Burr Type-XII في حالة البيانات التي تعاني من التذبذب لبناء نموذج التوزيع التوزيع الأحتمالي الجديد من تطبيق تحويل انتروبي على التوزيع الأحتمالي المستمر Burr Type-XII واختبرت الدالة الجديدة ووجدت أنها تحقق شروط الدالة الأحتمالية ، وتم اشتقاق الوسط الحسابي والدالة الأحتمالية التجميعية لكي يتم إعتمادها في توليد البيانات لغرض تنفيذ تجارب المحاكاة . تم بعد ذلك تقدير معلمات التوزيع الأحتمالي التي تم إستخراجها من صيغة التوزيع لدالة أوقات الفشل باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وطريقة وايت وطريقة المقدر المختلط ، والمقارنة بينهما بإعتماد معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقارنة بين النتائج باستخدام اسلوب المحاكاة في الجانب التجريبي للوصول الى افضلية المقدرات ولحجوم عينات مختلفة لمعلمتي الشكل والقياس للتوزيع . حيث بينت النتائج ان مقدرات المقدر المختلط لمعلمة الشكل هي الأفضل اما مقدرات معلمة القياس فقد اظهرت النتائج ان مقدرات المقدر وايت هي الأفضل

المصطلحات الرئيسة للبحث/ المعولية- دالة شانون- تحويل انتروبي

مجلة العلوم
الاقتصادية والإدارية
المجلد 19
العدد 71
الصفحات 367- 383

1- المقدمة

في كثير من التطبيقات العملية غالبا من يواجه الباحث مشكلة عدم التأكد من البيانات ومن المعلومات المقترنة للتوزيع الاحتمالي لذلك استخدمت أساليب إحصائيا تساهم في التعبير عن التوزيع الاحتمالي الذي يمثل البيانات ضمن شروط وقيود معينة من خلال استخدام دالة تحويل انتروبي والتي تعتمد على دالة التوزيع التراكمي ودالة المعولية في التوصل إلى صيغة احتمالية تعبر عن توزيع البيانات في حالة وجود الاتأكد والاضطراب في البيانات وعليه ارتأيت البحث في هذا الموضوع باستخدام تحويل انتروبي وتطبيقه على دالة التوزيع التراكمي ودالة المعولية للتوزيع Burr type-xii وهو احد النماذج الاحتمالية لتوزيعات أوقات الفشل ، فعندما طبقت دالة انتروبي على هذا التوزيع تم الحصول على توزيع احتمالي جديد يسهم تمثيل توزيع المتغير العشوائي في حالة وجود حالة لا تأكد أو اضطراب في المعلومات المقترنة للتوزيع الاحتمالي في عام (2001) أشار كل من (Kaberger &Mansson) [8] إلى مفهوم الانتروبي والعمليات الاقتصادية واستخدام الطاقات. وفي عام (2003) بين الباحث (Ion Verboncu)[11] لبيان الاختلاف في قياسات الأرقام القياسية واقترحت دالة تحويل انتروبي موزون لقياس التشتت من الرتبة (α) والنوع (β) مع تطبيقات في مجال الإدارة المتنوعة، واستكمالا للبحث تم تطبيق الأفكار على توزيع Burr type-xii وتم الحصول على دالة جديدة من خلال تحويل انتروبي ،والعمل على تقدير معلماتها بطرائق مختلفة.

1.1- هدف البحث

يهدف البحث إلى بناء توزيع احتمالي لأوقات الفشل باستعمال تحويل انتروبي باستخدام دالة التوزيع التراكمية ودالة المعولية لتوزيع Burr type-xii للمعلمتين إضافة إلى اشتقاق مقدرات معلمة الشكل ومعلمة القياس بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة وايت وطريقة المقدر المختلط (طريقة مقترحة) والمقارنة بينها باستخدام المؤشر الإحصائي متوسط مربعات الخطأ اخذين بنظر الاعتبار حجوم عينات مختلفة بالنسبة للجانب التجريبي .

2- الجانب النظري:

2-1- مفهوم دالة الانتروبيي [3] :-

تم استخدام لوغاريتم مقلوب الاحتمال (أي سالب لوغاريتم الاحتمال) كمقياس للمعلومات وتعرف بدالة الانتروبي (Entropy) ولتعريف الانتروبي لجميع الإحداث الممكن وقوعها في ظاهرة معينة نأخذ القيمة المتوقعة لهذه المعلومات وبذلك تعرف دالة الانتروبي للظاهرة $\left(-\sum p_i \log p_i\right)$ للأساس(2) وبذلك يكون وحدات القياس لهذا المقدار(bits) (رقم ثنائي).

وتعرف دالة الانتروبي بأنها مقياس لعدم التأكد (un certainty) المتضمن لرسالة (Massage) قبل أن تستلم .

أما دالة الانتروبي المتماثل (انتروبي شانون) (Shannon Entropy) فهي عبارة عن الكمية

$$H_n = H_n\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k$$

وعندما $p_k = 0$ فأن $p_k \log p_k = 0$

تعرف دالة شانون انتروبي (Shannon Entropy) للمعلومات المتقطعة أي للتجربة العشوائية التي فضائها متقطع بالصيغة التالية :

$$H = \frac{S}{K} = -\sum_{i=1}^{s} p_i \ln p_i \qquad k>0 \qquad \ldots (1)$$

p_i احتمال حصول النتيجة أو الحالة i
s عدد الحالات الممكنة
S دالة شانون انتروبي
K ثابت قياس

إن المعادلة (1) تخضع لقيد طبيعي هو مجموع الاحتمالات يساوي واحد

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = 1 \qquad \ldots(2)$$

وقيد العزوم هو

$$E(F_r) = \langle F_r \rangle = \sum_{i=1}^{s} p_i F_{ri} \qquad , r = 1,\ldots,R \qquad \ldots(3)$$

وعند تطبيق طريقة مضاعفات لاكرانج على شانون انتروبي معادلة (1) طبقاً للقيود (2) و(3) فان دالة لاكرانج هي :

$$L = \sum_{i=1}^{s}\left[-P_i \ln p_i - (\lambda_o - 1)p_i - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r p_i F_{ri} \right] \qquad \ldots(4)$$

حيث λ_r, λ_o هي مضاعفات لاكرانج و $r = 1,2,\ldots,R$ ، وان $(\lambda_o - 1)$ اختير للملائمة .

وباشتقاق المعادلة (4) بالنسبة إلى p_i ومساواة المشتقة مع الصفر نحصل على قيمة p_i^* المثلى وهي :

$$p_i^* = e^{-\lambda_O - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r F_{ri}} \qquad \ldots(5)$$

وبالإمكان تعويض القيود في دالة لاكرانج (4) وباحتمال التوازن P_i^* ،ويؤدي ذلك إلى الحصول على دالة شانون انتروبي المقيدة والمعرفة بالمعادلة (6) .

$$L = H^c \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \; - p_i \ln \frac{p_i}{p_i^*} + p_i \qquad \ldots(6)$$

حيث أن H^c صيغة معدلة لدالة شانون انتروبي وتكون صحيحة لكل الأنظمة الرياضية بغض النظر عن شكل وعدد القيود .

2-2 - كيفية بناء النماذج الاحتمالية باستخدام دالة انتروبي [9, 6]

أن دالة شانون انتروبي (Shannon Entropy) $H(f)$ للمتغير العشوائي المستمر (X) يمكن القول أنها نطاق المعلومات المقترنة بالتوزيع الاحتمالي $f(x;\theta)$ ، حيث θ تمثل متجه المعلمات التي تصف المتغير العشوائي (X) ، ويمكن أن نعبر عنها :

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\ln f(x;\theta)dx \qquad \dots (7)$$

ويمكن الحصول على معلمات التوزيع من خلال تعظيم $H(f)$ Maximum.

إن هذا التوزيع ضمنيا سيمثل تمثيلاً جيد من خلال عينة تم الحصول من خلالها على المعلومات السابقة ، ويمكن القول إذا كان المرغوب فيه توفيق توزيع احتمالي خاص من بيانات العينة فأن (POME) ، هي الوحيدة التي تحقق القيود (أو المعلومات) التي نحتاجها لاشتقاق دالة هذا التوزيع أما معلمات التوزيع فهي تلك التي تقترن بالقيود ، وللمزيد من المعلومات حول هذا الموضوع مراجعة المصدر[9] وفيما يأتي توضيح للأفكار السابقة .

لتكن لدينا مجموعة m من القيود الخطية المستقلة (C_i) حيث أن $i=1,2,\dots,m$ وهي مكتوبة بالصيغة :

$$C_i = \int \omega_i(x) f(x;\theta)dx \qquad \dots (8)$$

وان $\omega_i(x)$ بعض الدوال التي معدلها على $f(x;\theta)$ معلوم فان أعظم قيمة لـ(H)طبقاً للقيود (8) هي تلك التي تعطي التوزيع (9).

$$f(x;\theta) = e^{\left[-a_o - \sum_{i=1}^{m} a_i\omega_i(x)\right]} \qquad \dots (9)$$

حيث ان a_i هي مضاعفات لاكرانج

وبتعويض المعادلة (9) في المعادلة (7) نحصل على انتروبي للدالة $f(x;\theta)$ بدلالة القيود ومضاعفات لاكرانج وهي :

$$H(f) = a_o + \sum_{i=1}^{m} a_i C_i \qquad \dots (10)$$

إن تعظيم الدالة $H(f)$ يؤسس العلاقة بين القيود ومضاعفات لاكرانج ، ولتوضيح ذلك تم استخدام صيغة (POME) لتقدير معلمات توزيع باريتو الثلاثي (a,b,c) والمعرف بالدالة الاحتمالية .

$$f(x) = \frac{1}{b}\left[1 - \frac{a(x-c)}{b}\right]^{\frac{1}{a}-1}, a \neq 0 \qquad \dots (11)$$

$$f(x) = \frac{1}{b}e^{\frac{-(x-c)}{b}} \qquad , a = 0$$

ولكي نشتق طريقة لتقدير معلمات التوزيع في المعادلة (11) باستخدام (POME) يتطلب تطبيق ثلاث خطوات وهي :

I – تحديد القيود المناسبة .

II – اشتقاق دالة انتروبي للتوزيع .

III – اشتقاق العلاقة بين مضاعفات لاكرانج والقيود .

3-2- توزيع Burr Type-XII [4,5,7,10]

تم استعمال هذا التوزيع لأول مرة من قبل العالم (Irving W.Burr) في عام (1942) ، وقد كسب هذا التوزيع أهمية حقيقية لكثرة استعماله في الحالات العملية وان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Burr Type-XII ذي المعلمتين (b,p) لها الصيغة والشكل الآتي

$$f(x;p,b)=pbx^{b-1}(1+x^{b})^{-(p+1)}\quad x>0,\ p>0, b>0 \qquad \dots (12)$$

حيث أن

p معلمة الشكل (Shape parameter)

b معلمة القياس (Scale parameter)

أما دالة التوزيع التراكمية (c.d.f) للمتغير العشوائي X الذي يتوزع توزيع Burr Type-XII ذي المعلمتين (p,b) فلها الصيغة التالية

$$F(x;p,b)=1-(1+x^{b})^{-p}\quad x>0, p>0, b>0 \qquad \dots (13)$$

ودالة المعولية للمتغير العشوائي X الذي يتوزع توزيع Burr Type-XII فلها الصيغة التالية

$$R(x;p,b)=(1+x^{b})^{-p}, x>0, b>0, p>0 \qquad \dots (14)$$

وسوف نبدأ بتعريف دالة انتروبي (Entropy) المعرفة بالمعادلة (15)

$$H=-\int f(x)\ \ln f(x)\ dx \qquad \dots (15)$$

حيث إن f(x) هي دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X ، وهذه الفكرة تستخدم لتعريف الدالة المقترحة g(x) والتي مشتقتها تساوي

$$g'(x)=u(x;p,b)$$

لنأخذ بنظر الاعتبار تحويل انتروبي مشابه وممثل بالدالة [13]

$$g(x)=F(x)+R(x)\ln R(x) \qquad \dots (16)$$

وباستخدام الدالة الاحتمالية التراكمية F(x) ودالة المعولية R(x) للمتغير العشوائي X الذي يتوزع توزيع Burr Type-XII ، والمعرفتان في المعادلتين (13) و (14) وبتطبيقها على المعادلة (16) نحصل على

$$g(x)=1-(1+x^{b})^{-p}+(1+x^{b})^{-p}(-p)\ln(1+x^{b}) \qquad \dots (17)$$

وعند اشتقاق دالة $g(x)$ نحصل على

$$g'(x)=p^{2}bx^{b-1}\left(1+x^{b}\right)^{-p-1}\ln\left(1+x^{b}\right) \qquad \dots (18)$$

ولإثبات أنها دالة احتمالية $(p.d.f)$ تكامل الدالة بطريقة التجزئة

$$g'(x)=p^2\int_0^\infty \ln\left(1+x^b\right)\left(1+x^b\right)^{-p-1}bx^{b-1}dx$$

$$u=\ln\left(1+x^b\right) \qquad ,dv=\left(1+x^b\right)^{-p-1}bx^{b-1}$$

$$du=\frac{1}{\left(1+x^b\right)}.bx^{b-1}dx \quad ,v=\frac{\left(1+x^b\right)^{-p}}{-p}$$

$$g'(x)=p^2\left[\left.\frac{\left(1+x^b\right)^{-p}}{p^2}\right|_0^\infty\right]=1$$

وبعد إثبات الدالة الناتجة هي دالة كثافة ،فأن التوزيع الجديد هو احد أشكال نموذج الفشل العام .

2-4- توزيع الفشل العام General Linear Failure Rate Distribution

ان دالة الكثافة الاحتمالية التي تم الحصول عليها من اشتقاق المعادلة (17) سوف نرمز لها $u(x;p,b)$.

$$u(x;p,b)=p^2bx^{b-1}(1+x^b)^{-p-1}\ln(1+x^b) \qquad \text{... (19)}$$

وفيما يلي اشتقاق صيغة الدالة التراكمية التجميعية للتوزيع الجديد الناتج من تحويل انتروبي

$$F(x)=p_r(X\le x)=\int_0^x f(z)dz$$

$$=p^2b\int_0^x z^{b-1}(1+z^b)^{-p-1}\ln(1+z^b)dz \qquad \text{... (20)}$$

تكامل الدالة بالتجزئة حيث

$$u=\ln(1+z^b)\Rightarrow du=\frac{bz^{b-1}}{(1+z^b)}dz$$

$$dv=(1+z^b)^{-p-1}bz^{b-1}\Rightarrow v=\frac{(1+z^b)^{-p}}{-p}$$

$$=p^2\left[\frac{\ln(1+z^b)(1+z^b)^{-p}}{-p}-\int\frac{(1+z^b)^{-p}bz^{b-1}}{-p(1+z^b)}dz\right]$$

$$=p^2\left[\frac{\ln(1+z^b)(1+z^b)^{-p}}{-p}-\left[\frac{1}{p^2}(1+z^b)^{-p}\right]_0^x\right]$$

$$=p^2\left[\ln(1+x^b)(1+x^b)^{-p}-\frac{1}{p^2}(1+x^b)^{-p}\right]-\left[0-\frac{1}{p^2}\right]$$

$$\Rightarrow F(x) = 1 - p\ln(1+x^b)(1+x^b)^{-p} - (1+x^b)^{-p} \qquad \dots (21)$$

2-4- طرائق التقدير

اولا:- طريقة الامكان الاعظم (MLE) [12]

تعد طريقة الإمكان الأعظم من الطرائق التقديرية المهمة وتتميز بخصائص جيدة نذكر منها خاصية الثبات، وعدم التحيز التي تميزها عن بقية الطرائق ، إن دالة الإمكان الأعظم $L(x,p,b)$ لعينة عشوائية حجمها (n) مأخوذة من الدالة الاحتمالية $u(x,p,b)$، عند افتراض إن المعلمة (b) معلومة فأن مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة (p) سيكون

$$Lu_i(x,b,p) = p^{2n} b^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{b-1} \prod_{i=1}^{n} \left(1+x_i^b\right)^{-p-1} \prod_{i=1}^{n} \ln\left(1+x_i^b\right) \qquad \dots (22)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (22)

$$\ln L(x,b,p) = 2n\ln p + n\ln b + (b-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - (p+1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^b\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\ln\left(1+x_i^b\right)$$

وبالاشتقاق الجزئي للدالة $(\ln L)$ بالنسبة (P) ومساواة هذه المشتقة الجزئية بالصفر فنحصل على :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{2n}{p} - \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^b\right) = 0 \qquad \dots (23)$$

$$\hat{p}_{MLE} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^b\right)} \qquad \dots (24)$$

أما إذا اعتبرت أن (b) أيضا مجهولة فأن مقدرها بطريقة الإمكان الأعظم هو كما يأتي :

$$\ln L(x,b,p) = 2n\ln p + n\ln b + (b-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - (p+1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+x_i^b\right) + \sum_{i=1}^{n}\ln\ln\left(1+x_i^b\right)$$

وبالاشتقاق الجزئي للدالة $(\ln L)$ بالنسبة (b) ومساواة هذه المشتقة بالصفر نحصل على

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b}=\frac{n}{b}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-(p+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^b(1)\ln x_i}{\left(1+x_i^b\right)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+x_i^b\right)}\cdot\frac{x_i^b(1)\ln x_i}{\left(1+x_i^b\right)}=0 \qquad \text{...(25)}$$

$$\hat{b}_{MLE}=\frac{n}{(\hat{p}+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln x_i x_i^b}{\left(1+x_i^b\right)}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^b\ln x_i}{\ln\left(1+x_i^b\right)\left(1+x_i^b\right)}} \qquad \text{...(26)}$$

وهذه المعادلة غير خطية يمكن حلها باستخدام طريقة النقطة الصامدة (Fixed Point) .

▪ ثانيا: ▪ طريقة وايت [1,2]

تعتمد الفكرة الأساسية لهذه الطريقة على دالة التوزيع التجميعية (c.d.f) في صياغة أنموذج انحدار خطي بسيط وكما يلي

$$F(x)=1-p\ln(1+x^b)(1+x^b)^{-p}-(1+x^b)^{-p}$$

لتكن

$$R=1-F$$

$$\Rightarrow R(1+x^b)^p=1+p\ln(1+x^b) \qquad \text{... (27)}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للصيغة (27) وكالاتي

$$\ln R+p\ln(1+x^b)=\ln(1+p\ln(1+x^b)) \qquad \text{... (28)}$$

نفرض أن

$$X=\ln(1+x^b) \qquad \text{... (29)}$$

$$\ln R+pX_i=Y_i$$

لتقدير المعلمة b نرجع للمعادلة (29)

$$X_i=\ln(1+x_i^b)$$

$$e^{X_i}-1=x_i^b$$

إذ أن

$$Z_i=e^{X_i}-1$$

إذن

$$Z_i=x_i^b \qquad \text{... (30)}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (30) نحصل على

$$\hat{b}_W=\frac{\ln(e^{X_i}-1)}{\ln x_i} \qquad \text{... (31)}$$

وبتشبيه المعادلة (28) بمعادلة الانحدار الخطي الآتية

$$Y_i = \ln R + pX_i$$

إذ إن

$$Y_i = \ln(1 + p\ln(1 + x_i^b))$$

وهي دالة ضمنية من p و b

$$E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$$

يمكن الحصول على $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ باستعمال طريقة المربعات الصغرى (OLS) وكالاتي

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2} \qquad \ldots (32)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \qquad \ldots (33)$$

وبعد إيجاد $\hat{\beta}$ و $\hat{\alpha}$ نعود ونقدر مقدر الانحدار للمعلمة p

$$\hat{p}_W = -\frac{1}{\hat{\beta}} \qquad \ldots (34)$$

▪ ثالثا:▪ المقدر المختلط (طريقة مقترحة) (Mix)

تعتمد هذه الطريقة المقترحة على استخراج قيمة D التي تجعل متوسط مربعات الخطأ للمقدر المقترح اقل ما يمكن ، لتكن β أي معلمة وان

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_{MLE}$$

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_W$$

$$\therefore \hat{\beta}_{Mix} = D\hat{\beta}_1 + (1-D)\hat{\beta}_2$$

$$\hat{\beta}_{Mix} - \beta = D\hat{\beta}_1 + (1-D)\hat{\beta}_2 - \beta$$

$$\hat{\beta}_{Mix} - \beta = D(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) + (\hat{\beta}_2 - \beta) \qquad \ldots (35)$$

وبتربيع المعادلة (35) المذكورة انفاً واخذ التوقع لها نحصل على

$$E(\hat{\beta}_{Mix} - \beta)^2 = D^2 E(\hat{\beta}_1 - \beta)^2 - 2D^2 E(\hat{\beta}_1 - \beta)(\hat{\beta}_2 - \beta)$$
$$+ D^2 E(\hat{\beta}_2 - \beta)^2 + 2DE(\hat{\beta}_2 - \beta)(\hat{\beta}_1 - \beta) - 2DE(\hat{\beta}_2 - \beta)^2$$
$$+ E(\hat{\beta}_2 - \beta)^2$$

$$MSE(\hat{\beta}_{Mix}) = D^2 MSE(\hat{\beta}_1) - 2D^2 E(\hat{\beta}_1 - \beta)(\hat{\beta}_2 - \beta) + D^2 MSE(\hat{\beta}_2)$$
$$+ 2DE(\hat{\beta}_2 - \beta)(\hat{\beta}_1 - \beta) - 2DMSE(\hat{\beta}_2) + MSE(\hat{\beta}_2) \qquad \ldots (36)$$

نشتق المعادلة (36) بالنسبة الى D

$$\frac{\partial MSE}{\partial D} = 2DMSE(\hat{\beta}_1) - 4DE(\hat{\beta}_1 - \beta)(\hat{\beta}_2 - \beta) + 2DMSE(\hat{\beta}_2)$$

$$+ 2E(\hat{\beta}_2 - \beta)(\hat{\beta}_1 - \beta) - 2MSE(\hat{\beta}_2)$$

وعليه فان

$$D = \frac{MSE(\hat{\beta}_2) - E(\hat{\beta}_1 - \beta)(\hat{\beta}_2 - \beta)}{MSE(\hat{\beta}_1) - 2E(\hat{\beta}_1 - \beta)(\hat{\beta}_2 - \beta) + MSE(\hat{\beta}_2)} \quad \dots (37)$$

-3 الجانب التجريبي

-3-1- مراحل بناء تجربة المحاكاة:

تتضمن بناء تجربة المحاكاة على أربع مراحل أساسية ومهمة لتقدير المعلمات (p,b) توزيع $u(x;p,b)$ وهي كالآتي :-

- المرحلة الأولى (مرحلة تعيين القيم الافتراضية)

يتم في هذه المرحلة تعيين القيم الافتراضية وكما يأتي :

أولا: تحديد قيم افتراضية للمعلمات (p,b)

تم اختيار قيم افتراضية للمعلمات والتي تتمثل بأخذ ست نماذج لقيم المعلمات وقد اختيرت هذة النماذج على اساس التجريب وهي

$$A_1:(p=0.5, b=0.2), A_2:(p=0.05, b=2), A_3:(p=1, b=0.1)$$
$$A_4:(p=0.5, b=1), \quad A_5:(p=0.1, b=2.5), A_6:(p=0.02, b=1.5)$$

- المرحلة الثانية : اختيار حجم العينة (n)

تم اختيار حجوم مختلفة للعينة ، فقد أخذت حجوم العينة تتصف بالصغر وهي (n=15,25) وحجم عينة متوسطة وهي (n=50) وأخذت حجوم عينة كبيرة وهي (n=75,100) .

ثالثاً :- اختيار عدد تكرارات العينة (N)

تم اختيار عدد تكرارات عينة وهي (N=1000) .

المرحلة الثانية : (مرحلة توليد البيانات)

في هذه المرحلة يتم توليد بيانات عشوائية من خلال معكوس الدالة التوزيعية لتوزيع Burr Type-XII وكما يأتي :

$$z = \frac{1 - \sqrt{13 + 8(F(x) - 1)}}{4} \quad \dots (38)$$

ملاحظة (المعادلة (38) تم اشتقاقها من قبل الباحث للتوصل الى قيم التوليد)

وبافتراض U=F حيث إن U تمثل متغيراً عشوائياً مستمراً منتظماً ومعرفاً على الفترة (0,1) فأن الصيغة (38) تصبح كالآتي :

$$z = \frac{1 - \sqrt{13 + 8(U - 1)}}{4} \quad \dots (39)$$

ومن خلال الصيغة(39) يتم توليد بيانات تتبع توزيع Burr Type-XII بعد إعطاء قيم حقيقية للمعلمات (p,b) .

$$x = (z^{(-1/p)} - 1)^{(1/b)} \qquad \dots (40)$$

- المرحلة الثالثة (مرحلة إيجاد المقدرات)

يتم في هذه المرحلة تقدير كل من المعلمات (p,b) لأنموذج الفشل المستخدم وهو توزيع $u(x;p,b)$ من خلال طرائق التقدير المتناولة في هذا البحث .

- المرحلة الرابعة (مرحلة المقارنة)

يتم في هذه المرحلة المقارنة بين المقدرات المستحصلة للمعلمات (p,b) لتوزيع $u(x;p,b)$ التي تم الحصول عليها من المرحلة الثالثة إذ تم استخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) Mean square Error و الصيغة العامة لــ(MSE) لهذه المقدرات كالأتي:

$$MSE(\hat{\rho}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\rho}_i - \rho)^2$$

حيث تمثل N عدد التكرارات لحجم العينة المولدة

3.2. نتائج المحاكاة

يتم في هذا المبحث عرض نتائج محاكاة طرائق التقدير (MLE,W,Mix) وتحليلها وذلك للوصول إلى أفضل المقدرات المستحصلة لمعلمات لتوزيع $u(x;p,b)$ من خلال المفاضلة بين قيم هذه المقدرات بالاعتماد على معايير المقارنة المستخدمة.

- أولا:- نتائج تقديرات معلمة (p)

جدول (1) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة P في حالة النموذج الأول

n	$\hat{P}_{MLE}$	$\hat{p}_W$	$\hat{p}_{Mix}$	Best
15	0.79241	0.24726	0.14543	$\hat{p}_{Mix}$
25	0.77236	0.24818	0.17871	$\hat{p}_{Mix}$
50	0.77005	0.24859	0.19534	$\hat{p}_{Mix}$
75	0.76925	0.24870	0.20723	$\hat{p}_{Mix}$
100	0.76642	0.24877	0.19660	$\hat{p}_{Mix}$

جدول (2) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة P في حالة النموذج الثاني

N	$\hat{p}_{MLE}$	$\hat{p}_{W}$	$\hat{p}_{Mix}$	Best
15	0.00799	0.00079	0.00068	$\hat{p}_{Mix}$
25	0.00782	0.00070	0.00032	$\hat{p}_{Mix}$
50	0.00772	0.00073	0.00026	$\hat{p}_{Mix}$
75	0.00767	0.00077	0.00027	$\hat{p}_{Mix}$
100	0.00746	0.00080	0.00028	$\hat{p}_{Mix}$

جدول (3) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة P في حالة النموذج الثالث

N	$\hat{p}_{MLE}$	$\hat{p}_{W}$	$\hat{p}_{Mix}$	Best
15	0.17845	0.99987	0.00057	$\hat{p}_{Mix}$
25	0.17718	0.99989	0.00026	$\hat{p}_{Mix}$
50	0.17647	0.99990	0.00015	$\hat{p}_{Mix}$
75	0.17597	0.99991	0.00013	$\hat{p}_{Mix}$
100	0.17566	0.99992	0.00010	$\hat{p}_{Mix}$

جدول (4) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة P في حالة النموذج الرابع

N	$\hat{p}_{MLE}$	$\hat{p}_{W}$	$\hat{p}_{Mix}$	Best
15	0.79900	3.74300	0.08364	$\hat{p}_{Mix}$
25	0.78251	4.15255	0.07588	$\hat{p}_{Mix}$
50	0.77252	4.08154	0.06365	$\hat{p}_{Mix}$
75	0.76770	4.14006	0.05958	$\hat{p}_{Mix}$
100	0.76459	4.17908	0.05020	$\hat{p}_{Mix}$

جدول (5) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة P في حالة النموذج الخامس

N	$\hat{p}_{MLE}$	$\hat{p}_{W}$	$\hat{p}_{Mix}$	Best
15	0.03196	16.67975	0.91147	$\hat{p}_{MLE}$
25	0.03130	10.80149	0.63454	$\hat{p}_{MLE}$
50	0.03090	8.74535	0.53493	$\hat{p}_{MLE}$
75	0.03070	8.12916	0.50447	$\hat{p}_{MLE}$
100	0.03058	7.77785	0.48671	$\hat{p}_{MLE}$

جدول (6) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة P في حالة النموذج السادس

N	$\hat{p}_{MLE}$	$\hat{p}_{W}$	$\hat{p}_{Mix}$	Best
15	0.00126	0.00040	0.00020	$\hat{p}_{Mix}$
25	0.00124	0.00040	0.00021	$\hat{p}_{Mix}$
50	0.00123	0.00040	0.00021	$\hat{p}_{Mix}$
75	0.00123	0.00040	0.00020	$\hat{p}_{Mix}$
100	0.00122	0.00040	0.00021	$\hat{p}_{Mix}$

ثانياً : نتائج تقديرات معلمة القياس(b)

جدول (7) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة b في حالة النموذج الأول

N	$\hat{b}_{MLE}$	$\hat{b}_{W}$	$\hat{b}_{Mix}$	Best
15	0.10577	0.02906	0.08628	$\hat{b}_{W}$
25	0.08575	0.02083	0.06909	$\hat{b}_{W}$
50	0.07500	0.01630	0.05977	$\hat{b}_{W}$
75	0.07135	0.01482	0.05662	$\hat{b}_{W}$
100	0.06896	0.01394	0.05458	$\hat{b}_{W}$

جدول (8) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة b في حالة النموذج الثاني

N	$\hat{b}_{MLE}$	$\hat{b}_{W}$	$\hat{b}_{Mix}$	Best
15	0.25062	0.08535	0.00096	$\hat{b}_{Mix}$
25	0.07466	0.11840	0.00099	$\hat{b}_{Mix}$
50	0.01641	0.14792	0.00198	$\hat{b}_{Mix}$
75	0.00701	0.15920	0.00336	$\hat{b}_{Mix}$
100	0.00387	0.16544	0.00421	$\hat{b}_{Mix}$

جدول (9) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة b في حالة النموذج الثالث

N	$\hat{b}_{MLE}$	$\hat{b}_{W}$	$\hat{b}_{Mix}$	Best
15	0.13624	0.04584	0.05510	$\hat{b}_{W}$
25	0.07897	0.03831	0.04665	$\hat{b}_{W}$
50	0.05482	0.03383	0.04160	$\hat{b}_{W}$
75	0.04876	0.03241	0.04003	$\hat{b}_{W}$
100	0.04600	0.03163	0.03919	$\hat{b}_{W}$

جدول (10) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة b في حالة النموذج الرابع

N	$\hat{b}_{MLE}$	$\hat{b}_{W}$	$\hat{b}_{Mix}$	Best
15	5.62231	1.93286	2.49242	$\hat{b}_{W}$
25	3.31554	1.53211	2.01289	$\hat{b}_{W}$
50	2.30620	1.31509	1.75502	$\hat{b}_{W}$
75	2.04003	1.24014	1.66702	$\hat{b}_{W}$
100	1.91355	1.18958	1.60921	$\hat{b}_{W}$

جدول (11) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة b في حالة النموذج الخامس

N	$\hat{b}_{MLE}$	$\hat{b}_{W}$	$\hat{b}_{Mix}$	Best
15	0.47071	0.00690	0.00440	$\hat{b}_{Mix}$
25	0.15317	0.01958	0.00131	$\hat{b}_{Mix}$
50	0.04148	0.03568	0.00135	$\hat{b}_{Mix}$
75	0.02143	0.04269	0.00141	$\hat{b}_{Mix}$
100	0.01408	0.04703	0.00142	$\hat{b}_{Mix}$

جدول (12) يبين قيم MSE لمقدرات المعلمة b في حالة النموذج السادس

N	$\hat{b}_{MLE}$	$\hat{b}_{W}$	$\hat{b}_{Mix}$	Best
15	0.01147	0.13150	0.00091	$\hat{b}_{Mix}$
25	0.00390	0.16490	0.00116	$\hat{b}_{Mix}$
50	0.00093	0.19431	0.00407	$\hat{b}_{MLE}$
75	0.00041	0.20445	0.00551	$\hat{b}_{MLE}$
100	0.00022	0.20848	0.00627	$\hat{b}_{MLE}$

4- الاستنتاجات والتوصيات

4-1- الأستنتاجات

- تم تطبيق تحويل انتروبي على الدالة التجميعية F(x) والدالة المعولية في المعادلة (17) وتم الحصول على الدالة الاحتمالية $u(x;p,b)$ وتم التأكد من إن تكاملها واحد ومنها اشتقت الدالة الاحتمالية التراكمية.
- عند تطبيق دالة انتروبي على هذا التوزيع تم الحصول على توزيع احتمالي جديد يساهم تمثيل توزيع المتغير العشوائي في حالة وجود حالة لا تأكد أو الاضطراب في المعلومات المقترنة للتوزيع الاحتمالي
- بعد التأكد من التوزيع الفشل الخطي العام وتم استخدام جانب المحاكاة للمقارنة المعلمتين (p,b) حيث تمثل p معلمة الشكل و b معلمة القياس وبطرائق مختلفة وهي مقدرات الإمكان الأعظم ومقدرات ومقدرات وايت ومقدر مقترح (المقدر المختلط).
- وقد لخصت نتائج المحاكاة بالتالي:-

1. اتضح أن أفضل مقدر لمعلمة الشكل (P) في النماذج (A_1,A_2,A_3,A_4,A_6) ، وكما مبين في الجداول (1,2,3,4,6) ، هو المقدر المختلط ثم جاءت نتائج مقدر الإمكان الأعظم هو الأفضل في النموذج الخامس A_5 والمبينة في الجدول (5) .
2. أظهرت النتائج لمعلمة القياس (b) بان مقدر وايت هو الأفضل في النماذج (A_1,A_3,A_4) كما هي مبينة في الجداول (7,9,10) ، أما المقدر المختلط فهو الأفضل في النماذج (A_2,A_5) كما تبين نتائج الجداول (8,11) ، والنموذج (A_6) المبينة نتائجه في الجدول (12) أظهرت أن المقدر المختلط هو الأفضل في حالة العينات الصغيرة ،أما في حالة العينات المتوسطة والكبيرة فان مقدر الإمكان الأعظم هو الأفضل .

4-2- التوصيات

1- نوصي باستخدام التوزيع الناتج من تطبيق تحويل انتروبي عندما تعاني البيانات من صفة التذبذب .

2- في حالة توفر متغير عشوائي مستمر والدالة التراكمية ودالة المعولية له معلومة نوصي بتطبيق تحويل انتروبي للتوصل الى عائلة جديدة من التوزيعات الإحتمالية

3- نوصي باستخدام طريقة تقدير المختلط لأمكانية الحصول على مقر المعلمة من خلال تركيبة خطية للمقدرين مما يؤدي إلى الحصول على مقدر يمتلك أصغر متوسط مربعات.

▪ المصادر

[1] الناصر، عبد المجيد حمزة (2002) . "محاضرات في النظرية المعولية وتطبيقاتها- مرحلة الدكتوراه".

[2] جعفر، صادق موسى وبيداء اسماعيل عبد الوهاب وانتصار عبيد حسون ،"افضل تقدير لمعولية توزيع ويبل ذي المعلمتين "، مجلة بغداد للعلوم ، مجلد 6

[3] محمد، اميد كمال (1986) . "استخدام دالة الانتروبي للمعلومات والمجموعات المشوبة في مجال تشخيص طبعات الاصابع الجزئية في مواقع الاجرام في اربيل" رسالة ماجستير في الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد/جامعة بغداد.

[4] يتوما، حارث سليم زيا (2011) . "تقدير معلمة الشكل ودالة المعولية لتوزيع Burr Type-XII استعمال بيانات مراقبة تدريجية من النوع الثاني مع تطبيق عملي" ، رسالة ماجستير في بحوث العمليات، كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة بغداد.

[5] Burr distribution (2009) From Wikipedia,the free encyclopedia.

[6] C.E.Shannon,Bell System Technical Jornal,27(1948)379, 623.

[7] Donna M. Dambrosio,B.S. (2001) . "A BURR Type X CHAIN-OF-LINIKS MODEL" ATHESIS IN STATTICS submitted to the Graduate Faculty of Texas Tech University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of MASTER OF SCIENCE.

[8] Kaberger .T. And Mansson , B . (2001) ."Entropy And Economic Processes – Physics Perspective" Ecological Economics , 36,165-179.

[9] Levine,R.D. & Tribus,M. (1979) ."The Maximum Entropy Formalism ,MTT press, Cambridge Massachusetts, USA.

[10] Mohammad Z. Raqab ,Debasis Kundu ."Comparison of Different Estimators of P[Y<X] for a Scaled Burr Type X Distribution. http://home.iitk.ac.in/~kundu/paper 102.pdf

[11] Purcaru;I. &Verboncu;I .(2003). "ON SOME GENERALIZATIONS OF THE GUIASU DIVERSITY INDEX WITH APPLICATIONS IN DIVERSITY MANAGEMENT PRONLEMS ".

[12] Soliman ,A.A. ,(2005) "Estimation of parameters of life from progressively censored data using Burr XII model" . IEEE. Ttans.Rel,54(1)34-42.

[13] Soleha; M. & Sewilam; I .(2007). "Generlaized Rayleigh Distribution Revisited ".

Probabilistic Model building using the Transformation Entropy for the Burr type –xii Distribution

ABSTRACT

Entropy define as uncertainty measure has been transfared by using the cumulative distribution function and reliability function for the Burr type – xii. In the case of data which suffer from volatility to build a model the probability distribution on every failure of a sample after achieving limitations function, probabilistic distribution. Has been derived formula probability distribution of the new transfer application entropy on the probability distribution of continuous Burr Type-XII and tested a new function and found that it achieved the conditions function probability, been derived mean and function probabilistic aggregate in order to be approved in the generation of data for the purpose of implementation of simulation experiments. Was then estimate parameters of the probability distribution that has been extracted from the distribution formula for the function of every failure using a method as possible the greatest and the way White and the way the estimated mixed, and comparison between the adoption of the standard average squares error (MSE) to compare the results using the method of simulation in the demo to get to the advantage estimators and volumes of different samples to my teacher and measurement form of distribution. The results reveal that the mixed estimated parameter is the best form either parameter shape, and the results showed that the best estimated of scale parameters are the White estimator

Key work ;Reliability Shannon entropy, entropy-like transformation.