

استخدام انحدار الحرف (Ridge) لدراسة اثر بعض العوامل على المؤشر العام لسوق الأوراق المالية

إعداد المدرس المساعد

رواء صالح محمد

الجامعة المستنصرية - كلية الإدارة والاقتصاد

قسم الإحصاء

الملخص

في العديد من البحوث والدراسات الاقتصادية قد تعاني البيانات في هذه البحوث والدراسات من مشكلة التعدد الخطي وت遁ص هذه المشكلة على وجود علاقات (معادلات) ، خطية بين متغيرين توضيحيين أو أكثر من ذلك .

وعند وجود هذه المشكلة في البيانات فهذا يعني بان مقدّر طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية سوف يفشل لعدم تحقق واحدة من الفرضيات الاساسية لطريقة (OLS) ، والتي ت遁ص على عدم وجود ارتباط خطّي بين المتغيرات التوضيحية وبالتالي سوف لا نحصل على مقدّر يمتاز بخاصية (BLUE)
Best linear unbiased estimator .

ولأجل معالجة هذه المشكلة والحصول على مقدّرات جيدة تمتاز بخاصية (BLUE) ، لابد من استخدام طريقة أسلوب انحدار الحرف (Ridge regression) .

والهدف من البحث هو دراسة طريقة (Ridge regression) ، بكافة تفاصيلها وتطبيقاتها على بيانات واقعية والتي تمثلت بالعلاقة بين المؤشر العام لسوق الأوراق المالية حيث اعتبر المتغير المعتمد (y) ، الذي اعتمد على بقية المؤشرات الأخرى المتمثلة بالمتغيرات التوضيحية والمعرفة بعرض النقد الضيق (X_1) ، وسعر الفائدة على الدوافع الثابتة (X_2) ، وعرض النقد الواسع (X_3) ، وطبقت هذه الدراسة على عينة حجمها (١٩) مفردة .

١ - المقدمة

عند اجراء البحوث والدراسات الاقتصادية التي تستلزم استخدام نموذج الانحدار المتعدد مراجعة الباحثون - وخصوصاً عند استخدام البيانات المقطعية لمشكلة وجود حالة تعدد العلاقات الخطية بين المتغيرات التوضيحية (Multicollinearity) سواء كان ذلك التعدد جزئياً او تاماً .

ان تطبيق بعض طرق القياس الاقتصادي وخصوصاً طريقة المربعات الصغرى (ols) للحصول على خصائص مرغوب فيها للتقديرات الناتجة يستلزم عدم وجود تلك العلاقات او التخفيف من حدة وجودها وذلك باستخدام الطرق والاساليب الاحصائية او القياسية ومن هذه الاساليب استخدام اسلوب انحدار الحرف .

اعتمدت دراسة البحث على سوق العراق للأوراق المالية والذي يمثل تنظيم ذاتي وقانوني ذو استغلال مالي واداري تأسس بموجب الامر الاداري المرقم (١٤) وذلك بعد ان تم احلال سوق بغداد للأوراق المالية.

يجري التداول في هذا السوق على وفق الاسلوب اليدوي وبالاعتماد على نظام المزايدة العلنية المكتوبة على لوحات وقد تم تخصيص لوحة بلاستيكية لكل شركة مساهمة في السوق^(٥).

ولأهمية هذا السوق في زيادة وانخفاض سعر صرف الدولار محلياً وعالمياً والذي من شأنه يعمل على تحديد الاقتصاد في البلد وعلاقته مع دول العالم، تم دراسة هذا البحث حول هذا السوق للنهوض بالواقع الحضاري الاقليمي للاقتصاد في العراق.

٢ - هدف البحث:

ان الهدف الاساسي للبحث هو استخدام طريقة انحدار الحرف لدراسة تأثير بعض العوامل على المؤشر العام لسوق الاوراق المالية.

٣ - مشكلة البحث

عند غياب العلاقة الخطية بين المتغيرات التوضيحية غياباً تاماً يقال عن هذه المتغيرات انها متعامدة ولكن اغلب تطبيقات الانحدار تكون المتغيرات التوضيحية غير متعامدة ومرتبطة ارتباطاً قوياً حيث يصعب تقدير تأثير كل متغير توضيحي تقديرآ منفرداً في النموذج.

الجانب النظري

١-١ مشكلة الارتباط الخطى المتعدد

اصبحت مشكلة الارتباط الخطى المتعدد (Multicollinearity) معروفة منذ اكتشافها في عام ١٩٣٤ عند دراسته لسلسة زمنية تشمل عدّة متغيرات وقد تبين بعد ذلك مدى خطورتها على قيمة التقديرات ومقدار دقتها وخطورة استخدامها . ان مشكلة الحصول على مجموعة

من المتغيرات التوضيحية التي تحقق كل الفرضيات التي يستلزمها تطبيق طرائق التقدير المعروفة وتعطي خاصية افضل تقدير خطى غير متحيز (Blue) التي تمتلك خاصية اقل تباين ممكن ،هي من المشاكل التي تواجه الباحث في مجال القياس الاقتصادي ،لان مشكلة (Multicollinearity) قائمة الوجود في العلاقات الاقتصادية ولكنها ذات تأثيرات خطيرة في دراسة الظاهرة المدروسة. كما انها من الصعوبة الشديدة تجنبها في معظم التطبيقات العملية حيث لا توجد علاقة خطية تامة او شبه تامة بين اي من المتغيرات التوضيحية،اضافة الى ذلك يجب ان يكون عدد المعلومات المطلوب تقديرها اقل من حجم العينة تحت البحث،اي ان ^(١).

.Rank (x)=k+1<n

ويعتقد klein ان مشكلة التعدد الخطى تحصل عندما تكون R_y حيث تمثل r_{ij} معامل الارتباط الجزئي بين المتغير التوضيحي (x_j) و (x_i) وان $j \neq i$.
 R_y معامل الارتباط المتعدد بين المتغير المعتمد Y والمتغيرات المستقلة (X_i) في النموذج ^(٢).

$$x'x = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{var}(b_1) = \text{var}(b_2) = \frac{\sigma_e^2}{1 - e^2} = \frac{\sigma_e^2}{1 - r_{12}^2}$$

١ - الكشف عن وجود ظاهرة التعدد الخطى:

تحث هذه الظاهرة عندما تكون هناك علاقة خطية ما بين اثنين او اكثر من المتغيرات التوضيحية فمن الصعوبة ايجاد معكوسه مصفوفة المعلومات $(x'x)$ لكون محدد هذه المصفوفة مساوياً الى الصفر يعبر عنها رياضياً ^(٣) .

$$y_i = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + u \dots \dots \dots \quad (1)$$

وبفرض ان $x_1 x_2$ مرتبطة بعضها بعلاقة تامة اي ان $x_2 = kx_1$ ،حيث ان k اي ثابت اعتراضي فان تقدير معلمات هذه العلاقة (\hat{b}_2, \hat{b}_1) هما ^(٤).

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum (X_1 - \bar{X}_1)(Y - \bar{Y}) \sum (X_2 - \bar{X}_2)^2 - \sum (X_2 - \bar{X}_2)(Y - \bar{Y}) \sum (X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)}{\sum (X_1 - \bar{X}_1)^2 \sum (X_2 - \bar{X}_2)^2 - \sum [(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)]^2}$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\sum (X_2 - \bar{X}_2)(Y - \bar{Y}) \sum (X_1 - \bar{X}_1)^2 - \sum (X_1 - \bar{X}_1)(Y - \bar{Y}) \sum (X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)}{\sum (X_1 - \bar{X}_1)^2 \sum (X_2 - \bar{X}_2)^2 - \sum [(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)]^2}$$

نحصل على X_2 بقيمة KX_1 نحصل على

$$\hat{b}_1 = \frac{k^2 \sum (X_1 - \bar{X}_1)(Y - \bar{Y}) \sum (X_1 - \bar{X}_1)^2 - k^2 \sum (X_1 - \bar{X}_1)(Y - \bar{Y}) \sum (X_1 - \bar{X}_1)^2}{k^2 (\sum (X_1 - \bar{X}_1)^2)^2 - k^2 (X_1 - \bar{X}_1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\hat{b}_2 = \frac{k \sum (X_1 - \bar{X}_1)(Y - \bar{Y}) \sum (X_1 - \bar{X}_1)^2 - k \sum (X_1 - \bar{X}_1)(Y - \bar{Y}) \sum (X_1 - \bar{X}_1)^2}{k^2 (\sum (X_1 - \bar{X}_1)^2)^2 - k^2 (X_1 - \bar{X}_1)^2} = \frac{0}{0}$$

لذلك فان معلمات العلاقة (\hat{b}_2, \hat{b}_1) هي معلمات غير نهائية وليس هناك اي طريقة لايجاد قيم منفصلة لكل معلمة من المعلمات.

ويمكن اثبات ان كل من (\hat{b}_2, \hat{b}_1) يكون مساويا الى مالا نهاية في ظل وجود العلاقة الخطية التامة بين المتغيرات التوضيحية وينسحب هذا كذلك للحد الثابت فيكون تباينه كبيرا اما اذا كانت العلاقة الخطية غير تامة بين المتغيرات التوضيحية ^(١).

فأن

$$\text{var-cov}(b)_{ls} = S_E^2 (x'x)^{-1}$$

$$\text{var}(b_1) = \frac{S_e^2 \sum x_2^2}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)(\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\text{var}(b_2) = \frac{S_e^2 \sum x_1^2}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)(\sum x_1 x_2)^2}$$

وبالتعويض عن $X_2 = kX_1$ نحصل على

$$\text{var}(b_1) = \frac{S_e^2 \sum x_j}{0.0} = \text{var}(b_2) = \infty$$

اما اذا كانت العلاقة الخطية غير تامة بين المتغيرات التوضيحية كمافي النموذج رقم (١) يتأثران بعامل ثالث في مثل هذه الحاله معلمات التقدير للنموذج سوف تكون غير دقيقة وغير واضحة لمشكلة الدراسة وضاللة قيمة محدد مصفوفة المعلومات $(x'x)$ التي يكون تباين المعلمات المقدرة كبيرة جدا . وذلك بسبب ^(١).

$$\text{var-cov}(b)_{ls} = \frac{s_e^2 \text{Adj}(x'x)}{|x'x|}$$

وبالتالي قد يستنتج خطأً بان بعض المتغيرات التوضيحية ليست لها اهمية في النموذج. اذ يظهر اختبار (t) عدم معنوية معلمات تلك المتغيرات، في حين انها في الواقع معنوية ولكن بناء النموذج يعجز عن اظهار اثر كل منها بشكل منفصل ، نظراً لارتباط هذه المتغيرات بعضها مع البعض.

اختبار وجود مشكلة التعدد الخطى:

يبعد ان كلاين يقبل بان الارتباط الخطى المتعدد ليس بالضرورة مشكلة مالم يكن ذلك لارتباط الخطى المتعدد اكبر نسبياً من درجة الارتباط المتعدد الكلى بين كل المتغيرات آنياً، يعتقد كلاين ان الارتباط الخطى يكون مؤذياً اذا كان:

$$r_{x_i x_j}^2 \geq R_{Y, X_1, X_2, \dots, X_N}^2$$

ان اسلوب كلاين تم تحجيمه من قبل كل من فرار -وكاربر (Farrar-Glauber) في بحثهما المعنون مشكلة الارتباط الخطى المتعدد في تحليل الانحدار، والمنشور في مجلة Review of economics and statistic عام ١٩٦٧ ويستند اختبار (Farrar-Glauber) الى إحصائه (χ^2) حيث يتم اختبار الفرضية التالية^(٣).

$$H_0 : X_J \text{ orthogonal}$$

$$H_1 : X_J \text{ not orthogonal}$$

ويمكن التعبير عن احصاء الاختبار رياضياً كالتالي:

$$\chi^2 = - \left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k + 5) \right] \ln |D|$$

حيث ان n تمثل حجم العينة، k تمثل عدد المتغيرات التوضيحية $|D| \ln |D|$ تمثل اللوغاريتم الطبيعي لمحدد مصفوفة معاملات الارتباط التالية^(٣).

$$D = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

نقارن قيمة χ^2_{obs} المحسوبة مع قيمة χ^2 النظرية بدرجة حرية $(k-1)/2$ ومستوى معنوية معين عندما تكون $\chi^2_{\text{obs}} > \chi^2_{\text{crit}}$ ترفض H_0 اي هناك مشكلة التعدد الخطى بين المتغيرات التوضيحية والعكس صحيح.

وبعد ثبوت مشكلة التعدد الخطى بموجب الاختبار اعلاه،سيتوجب تحديد اي متغير من المتغيرات المستقلة مرتبطة خطياً والتي ادى الى حدوث مشكلة التعدد الخطى. ويتم التشخيص من خلال اختبار F وحسب الصيغة التالية⁽³⁾.

$$F = \frac{R^2_{j,23,\dots,k} / (k-1)}{(1 - R^2_{j,23,\dots,k}) / (n-k)}$$

حسب اختبار فرضية عدم:

$$H_0 : R^2_{j,23,\dots,k} = 0$$

$$H_1 : R^2_{j,23,\dots,k} \neq 0$$

نقارن قيمة F_j المحسوبة مع قيمة F النظرية بدرجتي حرية $(n-k, k-1)$ ومستوى معنوية α فإذا كانت $F_j > F$ ترفض H_0 ان المتغيرات التوضيحية مرتبطة مع بعضها وبعكسه ترفض الفرضية البديلة H_1 اي ان المتغيرات التوضيحية لا ترتبط مع بعضها ولا يشكل مصدر قلق لمشكلة التعدد الخطى، وبذلك يتم تشخيص كافة المتغيرات المرتبطة مع بقية المتغيرات التوضيحية ولغرض تحديد العوامل المسيبة لحصول مثل هذه المشكلة للمتغيرات التوضيحية لذلك يجب اجراء اختبار ثالث وهو اختبار t الذي يعتمد على قيم معاملات الارتباط الجزئية ما بين كل اثنين من المتغيرات التوضيحية. وبموجب الصيغة التالية⁽³⁾.

$$t_{ij} = \frac{r_{ij,12,\dots,k} \sqrt{n-k}}{\sqrt{1 - r_{ij,12,\dots,k}^2}}$$

حيث ان $r_{ij,12,\dots,k}^2$ يمثل مربع معامل الارتباط الجزئي ما بين المتغيرين التوضيحيين (x_i, x_j) باعتبار بقية المتغيرات التوضيحية ثابتة . حيث ان⁽³⁾.

$$H_0 : r_{ij,12,\dots,k} = 0$$

$$H_1 : r_{ij,12,\dots,k} \neq 0$$

نقارن مع القيمة المحسوبة ومقابل الجدولية بدرجة حرية ($n-k$) ومستوى معنوية معين فاذا كانت (الجدولية t) $> (t \text{ المحسوبة})$ نرفض H_0 ولانرفض H_1 ، اي ان الارتباط الجزئي بين X_j, X_i معنوي وبذلك يتم تشخيص بشكل نهائي المتغيرات التوضيحية التي تكون سبباً في حصول مشكلة التعدد الخططي.

(4) Ridge regression estimation

يعتبر اسلوب انحدار الحرف Ridge regression احد بدائل التقدير عندما يكون هناك مشكلة تعدد خططي بين المتغيرات التوضيحية للنموذج الخططي العام ($y = x\beta + \epsilon$) وذلك يهدف في معالجة هذه المشكلة حيث ان :

$$\begin{aligned} x_j &\rightarrow N(0, \sigma^2 I_n) \\ E(x_i, x_j) &\neq 0 \quad \forall i \neq j \\ E(x_i, \epsilon_i) &= 0 \end{aligned}$$

من الملاحظ في اتباع هذا الاسلوب تستخدم الصيغة القياسية للمتغيرات المعتمدة والتوضيحية من اثناء طرح الوسط الحسابي والقسمة على الانحراف المعياري لكل متغير اذ تجري جميع الحسابات الخاصة بانحدار الحرف على اساس ذلك . وبوضع المتغيرات بالصيغة القياسية تتحول المصفوفة ($x'x$) الى مصفوفة ارتباط المتغيرات التوضيحية.

وكما هو معلوم في حالة التعدد الخططي شبه التام ،يمكن الحصول على مقدرات اوليه لمعلمات النموذج الخططي العام، من خلال تطبيق اسلوب (OLS) وكالاتي⁽⁴⁾ :

$$b_{ls} = (x'x)^{-1} x'y$$

وكذلك لمصفوفة التباين والتباين المشترك كالاتي

$$v - \text{cov}(b_{ls}) = \sigma_m^2 (x'x)^{-1}$$

و عند تعويض قيمة مقدر تباين العينة (s_e^2) نحصل على مصفوفة التباين والتباين المشترك المقدرة كالتالي:

$$\begin{aligned} v - \text{cov}(b_{ls}) &= s_m^2 (x'x)^{-1} \\ E(s_e^2) &= \sigma_m^2 \end{aligned}$$

وتعد طريقة انحدار الحرف تحسين لطريقة (OLS) عند وجود التعدد الخطى شبه التام وذلك باضافة كمية موجبة صغيرة (C) للعناصر القطرية للمصفوفة ($x'x$). قبل اخذ معكوسها ليصبح التقدير للمعلمة β لنموذج الانحدار بالشكل التالي.

$$b_{RR} = \begin{bmatrix} b_{1RR} \\ b_{2RR} \\ \vdots \\ b_{kRR} \end{bmatrix} = (x'x + cI_n)^{-1} x'y$$

حيث ان $c \geq 0$. تمثل قيمة ثابت الحرف وهي معلمة غير عشوائية عندما ($c = 0$) فان مقدرات Ridge هي نفسها مقدرات OLS .

ان صيغة التقدير المعرفة بالمعادلة اعلاه تعرف بمقدار انحدار الحرف الاعتيادي (Ordinary Ridge regression) ويرمز له (ORR) والتي تعتمد على اضافة كمية ثابتة قيمتها (C) لكل عنصر من عناصر قطر المصفوفة ($x'x$)⁽⁴⁾.

ويمكن تحديد قيمة C بعدة طرق منها الطريقة التحليلية والطريقة البيانية والطريقة الاخيرة افترضها العالم (Hoerl & kannard)⁽⁶⁾ شكلا بيانياً اسمياه اثر الحرف Ridge Trace وهو عبارة عن التمثيل الآتي لمقدرات انحدار الحرف المناظر لقيمة C ويحدد مدى قيم C اعтиاديًّا ضمن المدة (0,1)

عندما تكون ظاهرة التعدد الخطى واضحة وتمثل مشكلة حقيقه فأن مقدرات الحرف تتغير تغيراً متذبذباً عند اي ابقاء طفيف في قيمة (C) عن الصفر .

واخيراً تتجه هذه المقدرات نحو الاستقرار عند القيم الكبيرة الى (C) .

وان قيمة (C) تختار اصغر تستقر عندها مقدرات الحرف وعندما يكون متوسط مربعات الخطأ لمقدار انحدار الحرف اصغر من متوسط مربعات الخطأ لمقدار المربعات الصغرى ، وعند هذه القيمة يبقى (MSE) اقرب الى قيمته الصغرى⁽⁴⁾ .

الجانب التطبيقي

المقدمة:

تحصل مشكلة التعدد الخطى عندما يرتبط اثنان او اكثر من المتغيرات التوضيحية بعلاقة خطية قوية جداً بحيث يصبح من الصعب فصل اثر كل متغير توضيحي عن المتغير المعتمد، كما تحدث هذه المشكلة حينما تكون قيمة احد المتغيرات التوضيحية متساوية لكافة المشاهدات .

وباستخدام احد اساليب المعالجة يمكن التغلب على هذه المشكلة كأن يكون تكبير حجم العينة او حذف المتغير او المتغيرات التوضيحية التي ترتبط خطياً مع بقية المتغيرات التوضيحية اضافة الى اساليب علمية اخرى.

وفي هذا الجانب من البحث سنتطرق الى كيفية الكشف عن مشكلة التعدد الخطى والمتغيرات التوضيحية المسيبة لهذه المشكلة ومن ثم معالجة هذه المشكلة وذلك لتقدير معلمات النموذج المستخدم في هذه الدراسة وبالاعتماد على الوسائل الاحصائية المعتمدة.

عينة البحث:

اجريت هذه الدراسة بالاعتماد على بيانات تم الحصول عليها من البنك المركزي الدولي لمدة من ١٩٩٠ ولغاية ٢٠٠٨ ، حيث تمثلت هذه البيانات بالمؤشر العام للسوق للأوراق المالية واعتبر هذا المؤشر بالمتغير المعتمد (y) . وذلك بالاعتماد على بقية المؤشرات الاخرى، حيث تمثل المتغير التوضيحي الاول (X_1) بعرض النقد الضيق، والمتغير التوضيحي الثاني (X_2) بسعر الفائده على الدوافع الثابتة في حين كان المتغير التوضيحي الثالث (X_3) هو عرض النقد الواسع، حيث هذه المؤشرات بالدولار الامريكي . وباستخدام البرنامج الاحصائي الجاهز NCSS تم الحصول على النتائج التي تخص هذه الدراسة ، حيث بلغ حجم عينة الدراسة (١٩) مفردة .

اختبار وجود مشكلة التعدد الخطى:

يمكن ملاحظة وجود مشكلة التعدد الخطى من استخراج مصفوفة الارتباطات للمتغيرات التوضيحية ، حيث يلاحظ قوة هذه الارتباطات مما يعني وجود هذه المشكلة وكالاتي:

$$r = \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1.000000 & -0.959994 & 0.993512 \\ -0.939994 & 1.000000 & -0.958013 \\ 0.993512 & -0.958013 & 1.000000 \end{array} \right)$$

حيث يلاحظ من خلال مصفوفة الارتباطات Correlations matrix للمتغيرات التوضيحية ($X'S$)¹،²³⁴⁵⁶⁷⁸⁹¹⁰¹¹¹²¹³¹⁴¹⁵¹⁶¹⁷¹⁸¹⁹²⁰²¹²²²³²⁴²⁵²⁶²⁷²⁸²⁹³⁰³¹³²³³³⁴³⁵³⁶³⁷³⁸³⁹⁴⁰⁴¹⁴²⁴³⁴⁴⁴⁵⁴⁶⁴⁷⁴⁸⁴⁹⁵⁰⁵¹⁵²⁵³⁵⁴⁵⁵⁵⁶⁵⁷⁵⁸⁵⁹⁶⁰⁶¹⁶²⁶³⁶⁴⁶⁵⁶⁶⁶⁷⁶⁸⁶⁹⁷⁰⁷¹⁷²⁷³⁷⁴⁷⁵⁷⁶⁷⁷⁷⁸⁷⁹⁸⁰⁸¹⁸²⁸³⁸⁴⁸⁵⁸⁶⁸⁷⁸⁸⁸⁹⁹⁰⁹¹⁹²⁹³⁹⁴⁹⁵⁹⁶⁹⁷⁹⁸⁹⁹¹⁰⁰¹⁰¹¹⁰²¹⁰³¹⁰⁴¹⁰⁵¹⁰⁶¹⁰⁷¹⁰⁸¹⁰⁹¹¹⁰¹¹¹¹¹²¹¹³¹¹⁴¹¹⁵¹¹⁶¹¹⁷¹¹⁸¹¹⁹¹²⁰¹²¹¹²²¹²³¹²⁴¹²⁵¹²⁶¹²⁷¹²⁸¹²⁹¹³⁰¹³¹¹³²¹³³¹³⁴¹³⁵¹³⁶¹³⁷¹³⁸¹³⁹¹⁴⁰¹⁴¹¹⁴²¹⁴³¹⁴⁴¹⁴⁵¹⁴⁶¹⁴⁷¹⁴⁸¹⁴⁹¹⁵⁰¹⁵¹¹⁵²¹⁵³¹⁵⁴¹⁵⁵¹⁵⁶¹⁵⁷¹⁵⁸¹⁵⁹¹⁶⁰¹⁶¹¹⁶²¹⁶³¹⁶⁴¹⁶⁵¹⁶⁶¹⁶⁷¹⁶⁸¹⁶⁹¹⁷⁰¹⁷¹¹⁷²¹⁷³¹⁷⁴¹⁷⁵¹⁷⁶¹⁷⁷¹⁷⁸¹⁷⁹¹⁸⁰¹⁸¹¹⁸²¹⁸³¹⁸⁴¹⁸⁵¹⁸⁶¹⁸⁷¹⁸⁸¹⁸⁹¹⁹⁰¹⁹¹¹⁹²¹⁹³¹⁹⁴¹⁹⁵¹⁹⁶¹⁹⁷¹⁹⁸¹⁹⁹²⁰⁰²⁰¹²⁰²²⁰³²⁰⁴²⁰⁵²⁰⁶²⁰⁷²⁰⁸²⁰⁹²¹⁰²¹¹²¹²²¹³²¹⁴²¹⁵²¹⁶²¹⁷²¹⁸²¹⁹²²⁰²²¹²²²²²³²²⁴²²⁵²²⁶²²⁷²²⁸²²⁹²³⁰²³¹²³²²³³²³⁴²³⁵²³⁶²³⁷²³⁸²³⁹²⁴⁰²⁴¹²⁴²²⁴³²⁴⁴²⁴⁵²⁴⁶²⁴⁷²⁴⁸²⁴⁹²⁵⁰²⁵¹²⁵²²⁵³²⁵⁴²⁵⁵²⁵⁶²⁵⁷²⁵⁸²⁵⁹²⁶⁰²⁶¹²⁶²²⁶³²⁶⁴²⁶⁵²⁶⁶²⁶⁷²⁶⁸²⁶⁹²⁷⁰²⁷¹²⁷²²⁷³²⁷⁴²⁷⁵²⁷⁶²⁷⁷²⁷⁸²⁷⁹²⁸⁰²⁸¹²⁸²²⁸³²⁸⁴²⁸⁵²⁸⁶²⁸⁷²⁸⁸²⁸⁹²⁹⁰²⁹¹²⁹²²⁹³²⁹⁴²⁹⁵²⁹⁶²⁹⁷²⁹⁸²⁹⁹³⁰⁰³⁰¹³⁰²³⁰³³⁰⁴³⁰⁵³⁰⁶³⁰⁷³⁰⁸³⁰⁹³¹⁰³¹¹³¹²³¹³³¹⁴³¹⁵³¹⁶³¹⁷³¹⁸³¹⁹³²⁰³²¹³²²³²³³²⁴³²⁵³²⁶³²⁷³²⁸³²⁹³³⁰³³¹³³²³³³³³⁴³³⁵³³⁶³³⁷³³⁸³³⁹³⁴⁰³⁴¹³⁴²³⁴³³⁴⁴³⁴⁵³⁴⁶³⁴⁷³⁴⁸³⁴⁹³⁵⁰³⁵¹³⁵²³⁵³³⁵⁴³⁵⁵³⁵⁶³⁵⁷³⁵⁸³⁵⁹³⁶⁰³⁶¹³⁶²³⁶³³⁶⁴³⁶⁵³⁶⁶³⁶⁷³⁶⁸³⁶⁹³⁷⁰³⁷¹³⁷²³⁷³³⁷⁴³⁷⁵³⁷⁶³⁷⁷³⁷⁸³⁷⁹³⁸⁰³⁸¹³⁸²³⁸³³⁸⁴³⁸⁵³⁸⁶³⁸⁷³⁸⁸³⁸⁹³⁹⁰³⁹¹³⁹²³⁹³³⁹⁴³⁹⁵³⁹⁶³⁹⁷³⁹⁸³⁹⁹⁴⁰⁰⁴⁰¹⁴⁰²⁴⁰³⁴⁰⁴⁴⁰⁵⁴⁰⁶⁴⁰⁷⁴⁰⁸⁴⁰⁹⁴¹⁰⁴¹¹⁴¹²⁴¹³⁴¹⁴⁴¹⁵⁴¹⁶⁴¹⁷⁴¹⁸⁴¹⁹⁴²⁰⁴²¹⁴²²⁴²³⁴²⁴⁴²⁵⁴²⁶⁴²⁷⁴²⁸⁴²⁹⁴³⁰⁴³¹⁴³²⁴³³⁴³⁴⁴³⁵⁴³⁶⁴³⁷>⁴³⁸⁴³⁹⁴⁴⁰⁴⁴¹⁴⁴²⁴⁴³⁴⁴⁴⁴⁴⁵⁴⁴⁶⁴⁴⁷>⁴⁴⁸⁴⁴⁹⁴⁵⁰⁴⁵¹>⁴⁵²>⁴⁵³>⁴⁵⁴>⁴⁵⁵>⁴⁵⁶>⁴⁵⁷>⁴⁵⁸>⁴⁵⁹>⁴⁶⁰>⁴⁶¹>⁴⁶²>⁴⁶³>⁴⁶⁴>⁴⁶⁵>⁴⁶⁶>⁴⁶⁷>⁴⁶⁸>⁴⁶⁹>⁴⁷⁰>⁴⁷¹>⁴⁷²>⁴⁷³>⁴⁷⁴>⁴⁷⁵>⁴⁷⁶>⁴⁷⁷>⁴⁷⁸>⁴⁷⁹>⁴⁸⁰>⁴⁸¹>⁴⁸²>⁴⁸³>⁴⁸⁴>⁴⁸⁵>⁴⁸⁶>⁴⁸⁷>⁴⁸⁸>⁴⁸⁹>⁴⁹⁰>⁴⁹¹>⁴⁹²>⁴⁹³>⁴⁹⁴>⁴⁹⁵>⁴⁹⁶>⁴⁹⁷>⁴⁹⁸>⁴⁹⁹>⁵⁰⁰>⁵⁰¹>⁵⁰²>⁵⁰³>⁵⁰⁴>⁵⁰⁵>⁵⁰⁶>⁵⁰⁷>⁵⁰⁸>⁵⁰⁹>⁵¹⁰>⁵¹¹>⁵¹²>⁵¹³>⁵¹⁴>⁵¹⁵>⁵¹⁶>⁵¹⁷>⁵¹⁸>⁵¹⁹>⁵²⁰>⁵²¹>⁵²²>⁵²³>⁵²⁴>⁵²⁵>⁵²⁶>⁵²⁷>⁵²⁸>⁵²⁹>⁵³⁰>⁵³¹>⁵³²>⁵³³>⁵³⁴>⁵³⁵>⁵³⁶>⁵³⁷>⁵³⁸>⁵³⁹>⁵⁴⁰>⁵⁴¹>⁵⁴²>⁵⁴³>⁵⁴⁴>⁵⁴⁵>⁵⁴⁶>⁵⁴⁷>⁵⁴⁸>⁵⁴⁹>⁵⁵⁰>⁵⁵¹>⁵⁵²>⁵⁵³>⁵⁵⁴>⁵⁵⁵>⁵⁵⁶>⁵⁵⁷>⁵⁵⁸>⁵⁵⁹>⁵⁵¹⁰>⁵⁵¹¹>⁵⁵¹²>⁵⁵¹³>⁵⁵¹⁴>⁵⁵¹⁵>⁵⁵¹⁶>⁵⁵¹⁷>⁵⁵¹⁸>⁵⁵¹⁹>⁵⁵²⁰>⁵⁵²¹>⁵⁵²²>⁵⁵²³>⁵⁵²⁴>⁵⁵²⁵>⁵⁵²⁶>⁵⁵²⁷>⁵⁵²⁸>⁵⁵²⁹>⁵⁵³⁰>⁵⁵³¹>⁵⁵³²>⁵⁵³³>⁵⁵³⁴>⁵⁵³⁵>⁵⁵³⁶>⁵⁵³⁷>⁵⁵³⁸>⁵⁵³⁹>⁵⁵³¹⁰>⁵⁵³¹¹>⁵⁵³¹²>⁵⁵³¹³>⁵⁵³¹⁴>⁵⁵³¹⁵>⁵⁵³¹⁶>⁵⁵³¹⁷>⁵⁵³¹⁸>⁵⁵³¹⁹>⁵⁵³²⁰>⁵⁵³²¹>⁵⁵³²²>⁵⁵³²³>⁵⁵³²⁴>⁵⁵³²⁵>⁵⁵³²⁶>⁵⁵³²⁷>⁵⁵³²⁸>⁵⁵³²⁹>⁵⁵³³⁰>⁵⁵³³¹>⁵⁵³³²>⁵⁵³³³>⁵⁵³³⁴>⁵⁵³³⁵>⁵⁵³³⁶>⁵⁵³³⁷>⁵⁵³³⁸>⁵⁵³³⁹>⁵⁵³⁴⁰>⁵⁵³⁴¹>⁵⁵³⁴²>⁵⁵³⁴³>⁵⁵³⁴⁴>⁵⁵³⁴⁵>⁵⁵³⁴⁶>⁵⁵³⁴⁷>⁵⁵³⁴⁸>⁵⁵³⁴⁹>⁵⁵³⁵⁰>⁵⁵³⁵¹>⁵⁵³⁵²>⁵⁵³⁵³>⁵⁵³⁵⁴>⁵⁵³⁵⁵>⁵⁵³⁵⁶>⁵⁵³⁵⁷>⁵⁵³⁵⁸>⁵⁵³⁵⁹>⁵⁵³⁶⁰>⁵⁵³⁶¹>⁵⁵³⁶²>⁵⁵³⁶³>⁵⁵³⁶⁴>⁵⁵³⁶⁵>⁵⁵³⁶⁶>⁵⁵³⁶⁷>⁵⁵³⁶⁸>⁵⁵³⁶⁹>⁵⁵³⁷⁰>⁵⁵³⁷¹>⁵⁵³⁷²>⁵⁵³⁷³>⁵⁵³⁷⁴>⁵⁵³⁷⁵>⁵⁵³⁷⁶>⁵⁵³⁷⁷>⁵⁵³⁷⁸>⁵⁵³⁷⁹>⁵⁵³⁸⁰>⁵⁵³⁸¹>⁵⁵³⁸²>⁵⁵³⁸³>⁵⁵³⁸⁴>⁵⁵³⁸⁵>⁵⁵³⁸⁶>⁵⁵³⁸⁷>⁵⁵³⁸⁸>⁵⁵³⁸⁹>⁵⁵³⁹⁰>⁵⁵³⁹¹>⁵⁵³⁹²>⁵⁵³⁹³>⁵⁵³⁹⁴>⁵⁵³⁹⁵>⁵⁵³⁹⁶>⁵⁵³⁹⁷>⁵⁵³⁹⁸>⁵⁵³⁹⁹>⁵⁵³¹⁰⁰>⁵⁵³¹⁰¹>⁵⁵³¹⁰²>⁵⁵³¹⁰³>⁵⁵³¹⁰⁴>⁵⁵³¹⁰⁵>⁵⁵³¹⁰⁶>⁵⁵³¹⁰⁷>⁵⁵³¹⁰⁸>⁵⁵³¹⁰⁹>⁵⁵³¹¹⁰>⁵⁵³¹¹¹>⁵⁵³¹¹²>⁵⁵³¹¹³>⁵⁵³¹¹⁴>⁵⁵³¹¹⁵>⁵⁵³¹¹⁶>⁵⁵³¹¹⁷>⁵⁵³¹¹⁸>⁵⁵³¹¹⁹>⁵⁵³¹²⁰>⁵⁵³¹²¹>⁵⁵³¹²²>⁵⁵³¹²³>⁵⁵³¹²⁴>⁵⁵³¹²⁵>⁵⁵³¹²⁶>⁵⁵³¹²⁷>⁵⁵³¹²⁸>⁵⁵³¹²⁹>⁵⁵³¹³⁰>⁵⁵³¹³¹>⁵⁵³¹³²>⁵⁵³¹³³>⁵⁵³¹³⁴>⁵⁵³¹³⁵>⁵⁵³¹³⁶>⁵⁵³¹³⁷>⁵⁵³¹³⁸>⁵⁵³¹³⁹>⁵⁵³¹⁴⁰>⁵⁵³¹⁴¹>⁵⁵³¹⁴²>⁵⁵³¹⁴³>⁵⁵³¹⁴⁴>⁵⁵³¹⁴⁵>⁵⁵³¹⁴⁶>⁵⁵³¹⁴⁷>⁵⁵³¹⁴⁸>⁵⁵³¹⁴⁹>⁵⁵³¹⁵⁰>⁵⁵³¹⁵¹>⁵⁵³¹⁵²>⁵⁵³¹⁵³>⁵⁵³¹⁵⁴>⁵⁵³¹⁵⁵>⁵⁵³¹⁵⁶>⁵⁵³¹⁵⁷>⁵⁵³¹⁵⁸>⁵⁵³¹⁵⁹>⁵⁵³¹⁶⁰>⁵⁵³¹⁶¹>⁵⁵³¹⁶²>⁵⁵³¹⁶³>⁵⁵³¹⁶⁴>⁵⁵³¹⁶⁵>⁵⁵³¹⁶⁶>⁵⁵³¹⁶⁷>⁵⁵³¹⁶⁸>⁵⁵³¹⁶⁹>⁵⁵³¹⁷⁰>⁵⁵³¹⁷¹>⁵⁵³¹⁷²>⁵⁵³¹⁷³>⁵⁵³¹⁷⁴>⁵⁵³¹⁷⁵>⁵⁵³¹⁷⁶>⁵⁵³¹⁷⁷>⁵⁵³¹⁷⁸>⁵⁵³¹⁷⁹>⁵⁵³¹⁸⁰>⁵⁵³¹⁸¹>⁵⁵³¹⁸²>⁵⁵³¹⁸³>⁵⁵³¹⁸⁴>⁵⁵³¹⁸⁵>⁵⁵³¹⁸⁶>⁵⁵³¹⁸⁷>⁵⁵³¹⁸⁸>⁵⁵³¹⁸⁹>⁵⁵³¹⁹⁰>⁵⁵³¹⁹¹>⁵⁵³¹⁹²>⁵⁵³¹⁹³>⁵⁵³¹⁹⁴>⁵⁵³¹⁹⁵>⁵⁵³¹⁹⁶>⁵⁵³¹⁹⁷>⁵⁵³¹⁹⁸>⁵⁵³¹⁹⁹>⁵⁵³²⁰⁰>⁵⁵³²⁰¹>⁵⁵³²⁰²>⁵⁵³²⁰³>⁵⁵³²⁰⁴>⁵⁵³²⁰⁵>⁵⁵³²⁰⁶>⁵⁵³²⁰⁷>⁵⁵³²⁰⁸>⁵⁵³²⁰⁹>⁵⁵³²¹⁰>⁵⁵³²¹¹>⁵⁵³²¹²>⁵⁵³²¹³>⁵⁵³²¹⁴>⁵⁵³²¹⁵>⁵⁵³²¹⁶>⁵⁵³²¹⁷>⁵⁵³²¹⁸>⁵⁵³²¹⁹>⁵⁵³²²⁰>⁵⁵³²²¹>⁵⁵³²²²>⁵⁵³²²³>⁵⁵³²²⁴>⁵⁵³²²⁵>⁵⁵³²²⁶>⁵⁵³²²⁷>⁵⁵³²²⁸>⁵⁵³²²⁹>⁵⁵³²³⁰>⁵⁵³²³¹>⁵⁵³²³²>⁵⁵³²³³>⁵⁵³²³⁴>⁵⁵³²³⁵>⁵⁵³²³⁶>⁵⁵³²³⁷>⁵⁵³²³⁸>⁵⁵³²³⁹>⁵⁵³²⁴⁰>⁵⁵³²⁴¹>⁵⁵³²⁴²>⁵⁵³²⁴³>⁵⁵³²⁴⁴>⁵⁵³²⁴⁵>⁵⁵³²⁴⁶>⁵⁵³²⁴⁷>⁵⁵³²⁴⁸>⁵⁵³²⁴⁹>⁵⁵³²⁵⁰>⁵⁵³²⁵¹>⁵⁵³²⁵²>⁵⁵³²⁵³>⁵⁵³²⁵⁴>⁵⁵³²⁵⁵>⁵⁵³²⁵⁶>⁵⁵³²⁵⁷>⁵⁵³²⁵⁸>⁵⁵³²⁵⁹>⁵⁵³²⁶⁰>⁵⁵³²⁶¹>⁵⁵³²⁶²>⁵⁵³²⁶³>⁵⁵³²⁶⁴>⁵⁵³²⁶⁵>⁵⁵³²⁶⁶>⁵⁵³²⁶⁷>⁵⁵³²⁶⁸>⁵⁵³²⁶⁹>⁵⁵³²⁷⁰>⁵⁵³²⁷¹>⁵⁵³²⁷²>⁵⁵³²⁷³>⁵⁵³²⁷⁴>⁵⁵³²⁷⁵>⁵⁵³²⁷⁶>⁵⁵³²⁷⁷>⁵⁵³²⁷⁸>⁵⁵³²⁷⁹>⁵⁵³²⁸⁰>⁵⁵³²⁸¹>⁵⁵³²⁸²>⁵⁵³²⁸³>⁵⁵³²⁸⁴>⁵⁵³²⁸⁵>⁵⁵³²⁸⁶>⁵⁵³²⁸⁷>⁵⁵³²⁸⁸>⁵⁵³²⁸⁹>⁵⁵³²⁹⁰>⁵⁵³²⁹¹>⁵⁵³²⁹²>⁵⁵³²⁹³>⁵⁵³²⁹⁴>⁵⁵³²⁹⁵>⁵⁵³²⁹⁶>⁵⁵³²⁹⁷>⁵⁵³²⁹⁸>⁵⁵³²⁹⁹>⁵⁵³³⁰⁰>⁵⁵³³⁰¹>⁵⁵³³⁰²>⁵⁵³³⁰³>⁵⁵³³⁰⁴>⁵⁵³³⁰⁵>⁵⁵³³⁰⁶>⁵⁵³³⁰⁷>⁵⁵³³⁰⁸>⁵⁵³³⁰⁹>⁵⁵³³¹⁰>⁵⁵³³¹¹>⁵⁵³³¹²>⁵⁵³³¹³>⁵⁵³³¹⁴>⁵⁵³³¹⁵>⁵⁵³³¹⁶>⁵⁵³³¹⁷>⁵⁵³³¹⁸>⁵⁵³³¹⁹>⁵⁵³³²⁰>⁵⁵³³²¹>⁵⁵³³²²>⁵⁵³³²³>⁵⁵³³²⁴>⁵⁵³³²⁵>⁵⁵³³²⁶>⁵⁵³³²⁷>⁵⁵³³²⁸>⁵⁵³³²⁹>⁵⁵³³³⁰>⁵⁵³³³¹>⁵⁵³³³²>⁵⁵³³³³>⁵⁵³³³⁴>⁵⁵³³³⁵>⁵⁵³³³⁶>⁵⁵³³³⁷>⁵⁵³³³⁸>⁵⁵³³³⁹>⁵⁵³³⁴⁰>⁵⁵³³⁴¹>⁵⁵³³⁴²>⁵⁵³³⁴³>⁵⁵³³⁴⁴>⁵⁵³³⁴⁵>⁵⁵³³⁴⁶>⁵⁵³³⁴⁷>⁵⁵³³⁴⁸>⁵⁵³³⁴⁹>⁵⁵³³⁵⁰>⁵⁵³³⁵¹>⁵⁵³³⁵²>⁵⁵³³⁵³>⁵⁵³³⁵⁴>⁵⁵³³⁵⁵>⁵⁵³³⁵⁶>⁵⁵³³⁵⁷>⁵⁵³³⁵⁸>⁵⁵³³⁵⁹>⁵⁵³³⁶⁰>⁵⁵³³⁶¹>⁵⁵³³⁶²>⁵⁵³³⁶³>⁵⁵³³⁶⁴>⁵⁵³³⁶⁵>⁵⁵³³⁶⁶>⁵⁵³³⁶⁷>⁵⁵³³⁶⁸>⁵⁵³³⁶⁹>⁵⁵³³⁷⁰>⁵⁵³³⁷¹>⁵⁵³³⁷²>⁵⁵³³⁷³>⁵⁵³³⁷⁴>⁵⁵³³⁷⁵>⁵⁵³³⁷⁶>⁵⁵³³⁷⁷>⁵⁵³³⁷⁸>⁵⁵³³⁷⁹>⁵⁵³³⁸⁰>⁵⁵³³⁸¹>⁵⁵³³⁸²>⁵⁵³³⁸³>⁵⁵³³⁸⁴>⁵⁵³³⁸⁵>⁵⁵³³⁸⁶>⁵⁵³³⁸⁷>⁵⁵³³⁸⁸>⁵⁵³³⁸⁹>⁵⁵³³⁹⁰>⁵⁵³³⁹¹>⁵⁵³³⁹²>⁵⁵³³⁹³>⁵⁵³³⁹⁴>⁵⁵³³⁹⁵>⁵⁵³³⁹⁶>⁵⁵³³⁹⁷>⁵⁵³³⁹⁸>⁵⁵³³⁹⁹>⁵⁵³⁴⁰⁰>⁵⁵³⁴⁰¹>⁵⁵³⁴⁰²>⁵⁵³⁴⁰³>⁵⁵³⁴⁰⁴>⁵⁵³⁴⁰⁵>⁵⁵³⁴⁰⁶>⁵⁵³⁴⁰⁷>⁵⁵³⁴⁰⁸>⁵⁵³⁴⁰⁹>⁵⁵³⁴¹⁰>⁵⁵³⁴¹¹>⁵⁵³⁴¹²>⁵⁵³⁴¹³>⁵⁵³⁴¹⁴>⁵⁵³⁴¹⁵>⁵⁵³⁴¹⁶>⁵⁵³⁴¹⁷>⁵⁵³⁴¹⁸>⁵⁵³⁴¹⁹>⁵⁵³⁴²⁰>⁵⁵³⁴²¹>⁵⁵³⁴²²>⁵⁵³⁴²³>⁵⁵³⁴²⁴>⁵⁵³⁴²⁵>⁵⁵³⁴²⁶>⁵⁵³⁴²⁷>⁵⁵³⁴²⁸>⁵⁵³⁴²⁹>⁵⁵³⁴³⁰>⁵⁵³⁴³¹>⁵⁵³⁴³²>⁵⁵³⁴³³>⁵⁵³⁴³⁴>⁵⁵³⁴³⁵>⁵⁵³⁴³⁶>⁵⁵³⁴³⁷>⁵⁵³⁴³⁸>⁵⁵³⁴³⁹>⁵⁵³⁴⁴⁰>⁵⁵³⁴⁴¹>⁵⁵³⁴⁴²>⁵⁵³⁴⁴³>⁵⁵³⁴⁴⁴>⁵⁵³⁴⁴⁵>⁵⁵³⁴⁴⁶>⁵⁵³⁴⁴⁷>⁵⁵³⁴⁴⁸>⁵⁵³⁴⁴⁹>⁵⁵³⁴⁵⁰>⁵⁵³⁴⁵¹>⁵⁵³⁴⁵²>⁵⁵³⁴⁵³>⁵⁵³⁴⁵⁴>⁵⁵³⁴⁵⁵>⁵⁵³⁴⁵⁶>⁵⁵³⁴⁵⁷>⁵⁵³⁴⁵⁸>⁵⁵³⁴⁵⁹>⁵⁵³⁴⁶⁰>⁵⁵³⁴⁶¹>⁵⁵³⁴⁶²>⁵⁵³⁴⁶³>⁵⁵³⁴⁶⁴>⁵⁵³⁴⁶⁵>⁵⁵³⁴⁶⁶>⁵⁵³⁴⁶⁷>⁵⁵³⁴⁶⁸>⁵⁵³⁴⁶⁹>⁵⁵³⁴⁷⁰>⁵⁵³⁴⁷¹>⁵⁵³⁴⁷²>⁵⁵³⁴⁷³>⁵⁵³⁴⁷⁴>⁵⁵³⁴⁷⁵>⁵⁵³⁴⁷⁶>⁵⁵³⁴⁷⁷>⁵⁵³⁴⁷⁸>⁵⁵³⁴⁷⁹>⁵⁵³⁴⁸⁰>⁵⁵³⁴⁸¹>⁵⁵³⁴⁸²>⁵⁵³⁴⁸³>⁵⁵³⁴⁸⁴>⁵⁵³⁴⁸⁵>⁵⁵³⁴⁸⁶>⁵⁵³⁴⁸⁷>⁵⁵³⁴⁸⁸>⁵⁵³⁴⁸⁹>⁵⁵³⁴⁹⁰>⁵⁵³⁴⁹¹>⁵⁵³⁴⁹²>⁵⁵³⁴⁹³>⁵⁵³⁴⁹⁴>⁵⁵³⁴⁹⁵>⁵⁵³⁴⁹⁶>⁵⁵³⁴⁹⁷>⁵⁵³⁴⁹⁸>⁵⁵³⁴⁹⁹>⁵⁵³⁵⁰⁰>⁵⁵³⁵⁰¹>⁵⁵³⁵⁰²>⁵⁵³⁵⁰³>⁵⁵³⁵⁰⁴>⁵⁵³⁵⁰⁵>⁵⁵³⁵⁰⁶>⁵⁵³⁵⁰⁷>⁵⁵³⁵⁰⁸>⁵⁵³⁵⁰⁹>⁵⁵³⁵¹⁰>⁵⁵³⁵¹¹>⁵⁵³⁵¹²>⁵⁵³⁵¹³>⁵⁵³⁵¹⁴>⁵⁵³⁵¹⁵>⁵⁵³⁵¹⁶>⁵⁵³⁵¹⁷>⁵⁵³⁵¹⁸>⁵⁵³⁵¹⁹>⁵

$$|D| = -6.91162$$

ويطبق احصاء χ^2 نحصل على الآتية.

$$\begin{aligned}\chi_o^2 &= -\left[(19-1) - \frac{1}{6}(2(3)+5) \right] * Ln(-6.91162) \\ &= 31.2533\end{aligned}$$

وبالمقارنة مع χ^2 الجدولية المبينه أدناه.

$$\chi_T^2((3(\frac{3-1}{2}), 0.05) = 7.816$$

ومن ملاحظة النتائج تبين لنا χ^2 المحسوبة هي اكبر من χ^2 الجدولية وهذا يعني رفض الفرضية وهذا واضحأً لوجود المشكلة .

وبعد ثبوت مشكلة التعدد الخطى بموجب الاختبار اعلاه يجب تحديد اي متغير من المتغيرات التوضيحية مرتبطة خطياً بحيث ادى الى حدوث مشكلة التعدد الخطى .

حيث يتم الاعتماد على اختبار (F) من استخراج القيمة المحسوبة لها الاختبار بعد تقدير معامل الارتباط المتعدد بين المتغيرات التوضيحية (X_i) وبقية المتغيرات التوضيحية الاخرى وكالاتي:

حيث يعتمد هذا الاختبار على الفرضية الآتية.

$$H_0 : R^2 j.23...k = 0$$

$$H_1 : R^2 j.23.....k \neq 0$$

ولاختبار R^2 للمتغير التوضيحي الاول باستبعاد البقية. حيث تمثلت نتيجة هذا الاختبار بان

$$F_1 = 15.6214$$

اما R^2 للمتغير الثاني باستبعاد البقية كانت

$$F_2 = 13.7147$$

اما R^2 للمتغير التوضيحي الثالث باستبعاد البقية تمثل

$$F_3 = 15.6020$$

ومن مقارنة هذا الاختبار للمتغيرات التوضيحية مع قيمة F الجدولية والمبينه ادناه نحصل على :

$$F_{j,23}(19.3)(3-1),0.05 = 3.63$$

نلاحظ ان F المحسوبة اكبر من F الجدولية ترفض الفرضية يعني ان جميع المتغيرات التوضيحية مرتبطة خطياً مع بعضها وهي مصدر لوجود مشكلة التعدد الخطى .

ومن خلال هذا الاختبار يتم تشخيص كافة المتغيرات التوضيحية التي ترتبط خطياً مع بقية المتغيرات التوضيحية الاخرى .

ولغرض تحديد المتغيرات التوضيحية المسؤولة عن حصول مشكلة التعدد الخطى بحيث ان يجري اختبار ثالث وهو اختبار (t) والذي يعتمد على قيم معاملات الارتباطات الجزئية ما بين كل اثنين من المتغيرات المستقلة وكالاتي :

حيث يتم الاعتماد على الفرضية

$$H_0 : r_{ij}.12.....k = 0$$

$$H_1 : r_{ij}.12.....k \neq 0$$

وتطبق هذه الصيغة للمتغيرات التوضيحية الثلاثة باخذ كل متغيرين سوياً باستبعاد الاخر وكالاتي :

باختبار الارتباط الجزئي للمتغيرين التوضيحيين الاول والثاني باستبعاد الثالث وبنطبيق اختبار (t) نحصل :

$$t_{23.1} = 0.5432$$

اما بالنسبة الاول والثالث باستبعاد الثاني وباختبار t نحصل على.

$$t_{12.3} = 1.07344$$

اما حساب الارتباط الجزئي ما بين المتغيرين الثاني والثالث باستبعاد الاول وبنطبيق صيغة t نحصل على :

$$t_{13,2} = 23.8027$$

ومن مقارنة النتائج اعلاه مع قيمة t الجدولية وكما مبينة أدناه نحصل على :

$$t(19 - 3,0.05) = 1.746$$

نلاحظ ان قيمة ($t_{12,3}$ ، $t_{23,1}$) المحسوبة هي اقل من قيمة t الجدولية هذا يعني لا ترفض الفرضية اي ان الارتباطات الجزئية غير معنوية بين هذه المتغيرات التوضيحية ،اما قيمة $t_{13,2}$ المحسوبة تكون اكبر من الجدولية لذلك لا تقبل الفرضية اي الارتباطات الجزئية معنوية والتي تكون مسؤولة عن وجود مشكلة التعدد الخطى بين المتغيرين التوضيحيين . وهذا الاختبار يشخص لنا بشكل نهائى المتغيرات التوضيحية التي تسبب في حصول هذه المشكلة .

ومن خلال هذا الاختبار يتبيّن لنا ان المتغيرين التوضيحيين X_1, X_3 هما اللذان يسببان مشكلة التعدد الخطى لاربطهما خطياً مع المتغير التوضيحي الثاني .

اسلوب انحراف الحرف :

تعتمد هذه الطريقة على تقدير معلمات النموذج عند وجود مشكلة تعدد خطى بين متغيرين توضيحيين .

حيث يتم استخراج معاملات انحدار الحرف القياسي وباعطاء قيم لـ k والذي يزول من هذه المشكلة وحسب جدول رقم (٢):

جدول رقم (٢): (معاملات التقاطع لانحدار الحرف القياسي)

K	X_1	X_2	X_3
٠,٠٠٠٩	١,٠٩٢٨	٠,٤٤٨٢	٠,٣١٢٣
٠,٠٠١٠	١,٠٣٠٧	٠,٤٣٢٦	٠,٣٥٨٦
٠,٠٠٢٠	٠,٩٨٢٠	٠,٤١٧٨	٠,٣٩٢٥
٠,٠٠٣٠	٠,٩٤٢٤	٠,٤٠٣٨	٠,٤١٧٩
٠,٠٠٤٠	٠,٩٠٩٤	٠,٣٩٠٥	٠,٤٣٧٥
٠,٠٠٥٠	٠,٨٨١٣	٠,٣٧٧٨	٠,٤٥٢٦
٠,٠٠٥٠	٠,٨٨١٣	٠,٣٧٧٨	٠,٤٥٢٦

٠,٠٠٦٠	٠,٨٥٧٠	٠,٣٦٥٥	٠,٤٦٤٦
٠,٠٠٧٠	٠,٨٣٥٦	٠,٣٥٣٨	٠,٤٧٤٠
٠,٠٠٨٠	٠,٨١٦٦	٠,٣٤٢٤	٠,٤٨١٥
٠,٠٠٩٠	٠,٧٩٩٥	٠,٣٣١٥	٠,٤٨٧٥
٠,٠١٠٠	٠,٧٨٤١	٠,٣٢١٠	٠,٤٩٢٢
٠,٠٢٠٠	٠,٦٨٠٤	٠,٢٣٢٧	٠,٥٠٥٤
٠,٠٣٠٠	٠,٦٢٠٤	٠,١٦٦٦	٠,٤٩٦٩
٠,٠٤٠٠	٠,٥٧٩٠	٠,١١٥٢	٠,٤٥٤٣
٠,٠٥٠٠	٠,٥٤٨٠	٠,٠٧٤١	٠,٤٧١٥
٠,٠٦٠٠	٠,٥٢٣٦	٠,٠٤٠٥	٠,٤٥٩٦
٠,٠٧٠٠	٠,٥٠٣٧	٠,٠١٢٦	٠,٤٤٨٨
٠,٠٨٠٠	٠,٤٨٧١	-٠,٠١٠٩	٠,٤٣٩١
٠,٠٩٠٠	٠,٤٧٣٠	-٠,٠٣١٠	٠,٤٣٠٣
٠,١٠٠٠	٠,٤٦٠٧	-٠,٠٤٨٣	٠,٤٢٢٤
٠,٢٠٠٠	٠,٣٩٠٠	-٠,١٤١٨	٠,٣٧١١
٠,٣٠٠٠	٠,٣٥٥٤	-٠,١٧٧٢	٠,٣٤٢٩
٠,٤٠٠٠	٠,٣٣٢٧	-٠,١٩٣٥	٠,٣٢٣٤
٠,٥٠٠٠	٠,٣١٥٦	-٠,٢٠١٢	٠,٣٠٨٢
٠,٦٠٠٠	٠,٣٠١٨	-٠,٢٠٤٥	٠,٢٩٥٥
٠,٧٠٠٠	٠,٢٩٠٠	-٠,٢٠٥٣	٠,٢٨٤٦
٠,٨٠٠٠	٠,٢٧٩٦	-٠,٢٠٤٦	٠,٢٧٤٩

٠,٩٠٠	٠,٢٧٠٣	-٠,٢٠٣٠	٠,٢٦٦١
١,٠٠٠	٠,٢٦١٨	-٠,٢٠٠٧	٠,٢٥٨١

ويلاحظ انه من خلال معاملات انحدار الحرف القياسي Standardized ridge regression ، بان قيمة k التي من الممكن ان تزيل مشكلة الارتباط الخطى المتعدد هي عندما (k=0.005) حيث ان هذه القيمة تكررت مررتين في الجدول (٢) وقد بلغت معاملات الانحدار القياسية (0.8813,0.3778,0.4526) على التوالي .

ومن استخراج عامل التقاطع لتضخم التباين وكما في جدول (٣) يلاحظ وضوح المشكلة . جدول رقم (٣) عامل التقاطع لتضخم التباين

Variance inflation factor

K	X ₁	X ₂	X ₃
٠,٠٠٠	٨٢,٥٣٣٣	١٢,٩٨٤١	٧٨,٧١٩٣
٠,٠٠١٠	٦٢,٥٢٤٣	١٢,٤٩٢٧	٥٩,٧٨٠٦
٠,٠٠٢٠	٤٩,١٥٢٦	١٢,٠٣٢٧	٤٧,١١٧٠
٠,٠٠٣٠	٣٩,٧٦٨٣	١١,٦٠٠١	٣٨,٢٢٣٦
٠,٠٠٤٠	٣٢,٩٢٣٧	١١,١٩٢٠	٣١,٧٣٢٠
٠,٠٠٥٠	٢٧,٧٧٣٨	١٠,٨٠٦١	٢٦,٨٤٣٣
٠,٠٠٥٠	٢٧,٧٧٣٨	١٠,٨٠٦١	٢٦,٨٤٣٣
٠,٠٠٦٠	٢٣,٧٩٨١	١٠,٤٤٠٦	٢٣,٠٦٥٦
٠,٠٠٧٠	٢٠,٦٦١٨	١٠,٠٩٣٩	٢٠,٠٨٢٣
٠,٠٠٨٠	١٨,١٤١٩	٩,٧٦٤٧	١٧,٦٨٢٥
٠,٠٠٩٠	١٦,٠٨٤٨	٩,٤٥١٧	١٥,٧٢١١
٠,٠١٠٠	١٤,٣٨٢٢	٩,١٥٣٨	١٤,٠٩٥٥

٠,٠٢٠٠	٦,٣٥٢٠	٦,٨٢٥٠	٦,٣٧٧٩
٠,٠٣٠٠	٣,٧٦٥٨	٥,٢٩٣٠	٣,٨٤٩٥
٠,٠٤٠٠	٢,٥٦٩٠	٤,٢٣١٠	٢,٦٦٠٢
٠,٠٥٠٠	١,٩٠١٠	٣,٤٦٤٥	١,٩٨٦٧
٠,٠٦٠٠	١,٤٨٣١	٢,٨٩٣٢	١,٥٦٠٤
٠,٠٧٠٠	١,٢٠١٢	٢,٤٥٥٩	١,٢٧٠٠
٠,٠٨٠٠	١,٠٠٠٦	٢,١١٣٧	١,٠٦١٦
٠,٠٩٠٠	٠,٨٥١٨	١,٨٤١٠	٠,٩٠٦١
٠,١٠٠٠	٠,٧٣٨١	١,٦٢٠٠	٠,٧٨٦٥
٠,٢٠٠٠	٠,٣٠١٥	٠,٦٥٠٤	٠,٣٢٠٦
٠,٣٠٠٠	٠,١٩٢٨	٠,٣٧٥٤	٠,٢٠٢٨
٠,٤٠٠٠	٠,١٤٧١	٠,٢٥٨٥	٠,١٥٣٢
٠,٥٠٠٠	٠,١٢٢٢	٠,١٩٦٩	٠,١٢٦٣
٠,٦٠٠٠	٠,١٠٦٣	٠,١٥٩٧	٠,١٠٩٣
٠,٧٠٠٠	٠,٠٩٥١	٠,١٣٥٠	٠,٠٩٧٣
٠,٨٠٠٠	٠,٠٨٦٦	٠,١١٧٤	٠,٠٨٨٣
٠,٩٠٠٠	٠,٠٧٩٧	٠,١٠٤٢	٠,٠٨١١
١,٠٠٠٠	٠,٠٧٤٠	٠,٠٩٣٩	٠,٠٧٥١

ويمكن ان نلاحظ من خلال جدول (٣) عامل تضخم التباين بان قيمة k قد بلغت (0.005) لتكرارها وهو تأكيد للجدول رقم (٢) جدول معاملات اندثار الحرف القياسية وكان مستوى عامل تضخم التباين بالنسبة للمتغير التوضيحي x_1 هو (27.7738) في حين ان مستوى عامل تضخم التباين بالنسبة للمتغير التوضيحي x_2 هو (10.8061) ،اما مستوى عامل التضخم بالنسبة للمتغير التوضيحي x_3 هو (26.8433) .

مقارنة بين تقدير المربعات الصغرى وتقدير الحرف:

جدول رقم (٤) بين قيم معامل التقاطع والميل الحدي والخطأ المعياري ومعامل التحديد بطريقة التقدير OLS وRidge وقيمة $k=0.005$ وكالاتي:

Independent variable	Ridge coeffs	LS Coeffs	Ridge standard error	LS Standard error
Intercept	-٣٠٨٥,٩٦٤	-٣٥٣٤,٣٥١		
X ₁	٠,٠٢٦٠٥٦٦٩	٠,٠٣٢٢٣٠٩٤٨	٠,٠٠٨٤٦١٧٠٣	٠,٠١٣٤٩٥٨٤
X ₂	١٨٨,٦٨٠٨	٢٢٣,٨٦٠٦٦	٨٩,١٦٦٦٥	٩٠,٤٣١٣٣
X ₃	٠,٠٠٢٨٨٦٤٢	٠,٠٠١٩٩١٢٨٧	٠,٠٠١٧٩٤١٦٦	٠,٠٠٢٨١٢٦٩١٦
R-Squared	٠,٩٥٥٨	٠,٩٦٢١		
Sigma	٢٤٠,٧٢٦٤	٢٢٢,٧٢٥٠		

ويلاحظ من خلال جدول (٤) بان قيمة معامل التقاطع في تقدير Ridge قد بلغ $\hat{\beta}_0 = -3085.96$ في حين ان قيمة معامل الميل الحدي للتقدير (X_1) قد بلغ $\hat{\beta}_1 = 0.026$ ، اما قيمة معامل الميل الحدي لنقدير L (X_2) قد بلغ $\hat{\beta}_2 = 188.68$ في حين قيمة معامل الميل الحدي لنقدير (X_3) قد بلغ $\hat{\beta}_3 = 0.00288$ في حين كان تقديرات OLS هي $\hat{\beta}_0 = -3534.351$ وميل الحدي للمتغير الاول $\hat{\beta}_1 = 0.03230$ و للمتغير الثاني $\hat{\beta}_2 = 223.860$ و للمتغير الثالث $\hat{\beta}_3 = 0.001991$ على التوالي .
ويمكن معرفة قيمة K من خلال الجدول رقم (٤) وكالاتي :

$$K = 0.005 = \frac{5}{1000} = \frac{5}{10^3} = 5 * 10^{-3} \\ = 0.005$$

ويلاحظ من الجدول ايضاً بان قيمة الخطأ المعياري لتقدير Ridge بالنسبة للمتغير الاول X_1 قد بلغ $89,166$ في حين ان قيمة الخطأ المعياري لتقدير Ridge بالنسبة للمتغير الثاني X_2 قد بلغ $89,166$ اما قيمة الخطأ المعياري لتقدير Ridge بالنسبة للمتغير الثالث X_3 قد بلغ $0,00179$ ، ومن مقارنتها

مع قيم الخطأ المعياري لنقدیر OLS بالنسبة لجميع المتغيرات التوضيحية على التوالي قد بلغت Ridge (0.01349, 90.431, 0.00284) يتضح بان قيم الخطأ المعياري عند استخدام طريقة نقدیر Ridge هو افضل واقل من قيم الخطأ المعياري عند استخدام طريقة نقدیر OLS ، مما يعني ان طريقة Ridge تقلل وتزيل مشكلة التعدد الخطى الموجود بين المتغيرات التوضيحية .

كما يلاحظ بان قيمة معامل التحديد عند استخدام طريقة Ridge قد بلغ ٩٥٨٥ ، في حين كان $\sqrt{(m.s.E)} = 240.7269$ اما قيمة معامل التحديد عند استخدام طريقة OLS قد بلغ ٩٦٢١ وان $\sqrt{(m.s.E)} = \sigma = 222.725$ وباتباع اسلوب Ridge ومن خلال حساب معلمات النموذج بطريقة Ridge والتي تبين النتائج انها الافضل من OLS نحصل على النموذج الملائم لهذه الدراسة والذي يعتبر افضل نموذج .

$$Y = -3085.964 + 0.02605669X_1 + 188.6808X_2 + 0.00288642X_3$$

اما جدول تحليل التباين للنموذج.

جدول تحليل التباين

Source	D.F	Sum of squares	Mean square	F-ratio	Prob level
Intercept	١	٠,٠٠٠٠٠١٦٠	٠,٠٠٠٠٠١٦٠		
Model	٣	٠,٠٠٠٠٠١٨٧	٦٢٦٠١٢٦	١٠٨,٠٢٧٨	٠,٠٠٠٠٠
Error	١٥	٨٦٩٢٣٨	٥٧٩٤٩,٢		
Total(Adjusted)	١٨	٠,٠٠٠٠٠١٩٦	١٠٩١٦٤٥		

وان المتوسط ٩٢٠,٢٦٨٤

متوسط مربعات الخطأ $\sqrt{MSE} = ٢٤٠,٧٢٦٤$

معامل التحديد $R^2 = ٠,٩٥٥٨$

معامل الاختلاف $٠,٢٦١٣٨٢٥$

ومن خلال جدول تحليل التباين يلاحظ عند استخدام طريقة تقدير Ridge فأن قيمة F قد بلغت 108.027) وهي معنوية وذلك لأن قيمة (Probability level) مستوى المعنوية كانت متساوية لـ Zero وهذا يعني بأن قيم المعلمات الموجودة في النموذج هي معنوية وذات أهمية وضرورية في النموذج، وان النموذج هو الأفضل .

ومن خلال استخدام النموذج الأفضل يمكن استخراج قيم الخطأ والقيم التنبؤية . والجدول(٥) يوضح ذلك .

جدول رقم(٥) (القيم التنبؤية)

Row	Predicted	Residucl
١	- ١٥٢,٩٣٣٩	٢٣٧,٩٣٣٩
٢	- ٦٧,٥٨٩٩٤	١٥,٩٥٨٩٩
٣	٢٨,٦٦٠٣	٧١,٣٣٩٦٩
٤	١٦٧,٩٧٩١	- ١٨,٩٧٩٠٩
٥	٢٧٢,٨٢٥	- ٣٤,٨٢٥٠١
٦	٢٣٦,٢٠٧	- ٢٢,٢٠٧٠٤
٧	٢٤٧,٤٤١٥	٤٩,٥٥٨٤٨
٨	٢٦٧,٠٩٩	٩١,٩٠١٠٣
٩	٣٨٣,١٢٩٢	- ١,١٢٩٢٢٢
١٠	٣٣٠,١٦٦١	٩٣,٨٣٣٨٣
١١	٦٩٤,٣٢٠٦	- ٦٨,٣٢٠٦٣
١٢	٨٣٦,٠١٥٣	- ٢٢٣,٠١٥٢
١٣	١٠٤٩,٣٥١	- ٤١٤,٣٣٠٨
١٤	١١٦١,٣٨٨	- ٣٥٨,٣٨٧٧
١٥	١٤٩٨,١٧٥	٢٧٧,٠٧٥

١٦	١٨٤٥,٧٦٩	٣٩٢,٢٣٠٨
١٧	٢١٨٢,٧٦	١٩٧,٢٣٩٩
١٨	٢٩٤٢,٥٧٢	- ٣٢,٥٧١٤٥
١٩	٣٣٦٢,١٦٦	١٥٧,٢٣٣٦

ومن خلال استخراج القيم التبؤية (\hat{y}) للنموذج الأفضل يلاحظ وجود قيم تنبؤية سالبة في الفترتين الأولى والثانية مما يعني أنها لسبب ذات أهمية كبيرة للاستعانة بها من قبل الباحث وإنما يفضل الاعتماد على القيم التبؤية لبقية الفترات والتي يمكن ان تقييد الباحث في الاستعانة لهذه القيم المستخرجة لبناء الخطط المستقبلية ولإجراء البحوث التي يمكن من شأنها ان تساعد الباحثين في اجراء الدراسات او اتخاذ ما يلزم في بعض الامور التي تستوجب التنبؤ بها مستقبلاً من اجل اتخاذ القرارات المناسبة وذلك لعدم حصول اي مشكلة في موضوع الدراسة.

الاستنتاجات

من خلال اجراء هذه الدراسة تم التوصل الى جملة من الاستنتاجات.

- ١ - تحصل مشكلة التعدد الخطى عندما تكون قيمة التباين للمتغيرات التوضيحية كبيرة.
- ٢ - تعتبر قيمة ($k=0.005$) هي القيمة المثلثى التي من شأنها ان تزيل مشكلة التعدد الخطى والتي قد بلغت معاملات لانحدار القياسية عندها ($0.8813, 0.3778, 0.4526$) على التوالى للمتغيرات التوضيحية X_3, X_2, X_1 .
- ٣ - يعتبر متوسط مربعات الخطأ افضل معيار للمقارنة فمن مقارنة طريقة تقدير Ridge مع طريقة OLS نلاحظ بان قيم تقدير Ridge هي الافضل وذلك لأن قيم الخطأ المعياري اقل في حين كانت قيم الخطأ المعياري لـ OLS هي الاكثر.
- ٤ - من معنوية قيمة F التي ظهرت في جدول تحليل التباين يتبيّن ان النموذج المقدر بطريقة Ridge هو النموذج الأفضل.

الوصيات

توصى الباحث الى توصيتين هما

- ١ - استخدام النموذج المقدر بطريقة Ridge والذي تمثل بافضل نموذج لتقدير القيم التبؤية التي من شأنها قد تقييد الباحث في اجراء البحوث المستقبلية او قد تستخدم في اتخاذ القرارات الالزمه .
- ٢ - يفضل اجراء الدراسة على عينات كبيرة الحجم وذلك للتقليل من حدوث هذه المشكلة .

المصادر العربية

- ١- هادي كاظم/ د. امورى / 2002 / طرق القياس الاقتصادي المتقدم النظرية والتطبيق / بغداد / مطبعة الطيف.
- ٢- الحيالي/ د. طالب / 1991 / القياس الاقتصادي/ بغداد/ مطبعة التعليم العالي .
- ٣- القرishi/ د. محمد صالح / 2004 / مقدمة في الاقتصاد القياسي / عمان -الأردن.
- ٤- شاكر / حمدية 2007/ اتجاهات التغيرات الهيكيلية في اقتصادات التحول من نظام التخطيط المركزي الى نظام اقتصاد السوق للمدة (1990-2004)/ اطروحة دكتوراه / الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد.
- ٥- عدنان / هدى / 2008/ تمثيل فضاء الحالة لنماذج السلسل الزمنية التركيبية ونماذج بوكس - جينكز مع تطبيق في سوق العراق للأوراق المالية / رسالة ماجستير الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد.

المصادر الاجنبية

- 1- Hoerl,A.E&Kannard,R.W/1975/Ridge regression .biased estimation for non orthogonal problems,Technometric,v. 12,N.2 /p100-102.
- ٧-Koutsoyiannis,A,(1977),Theory of econometrics,Elibs with Macmillan press., London.