New Formula of Linear Interpolation
صيغة جديدة للاندراج الخطي

م.م محمد يحيى عبد
جامعة كربلاء قسم الرياضيات- كلية التربية

م.م سمية عبد العباس صيفي
جامعة كربلاء - كلية الصيدلة

Abstract:-

In this paper we have developed the method of Linear Interpolation which is considered the simplest way of the interpolation methods. We have been able to deduct a new interpolation formula that termed (New Formula of linear Interpolation). It has been proved, through the new formula that the results obtained are more accurate than the results obtained by using the Linear Interpolation. Moreover there is no need to reduce the value of (h) to have a good approximate value.

For comparison purposes, other methods were used like: Lagrange Interpolation, Taylor Interpolation and Linear Interpolation.

On the other hand, the researchers have used the Law of Error of interpolation.

المستخلص:

في هذا البحث قمت بتطوير طريقة الاندراج الخطي (Linear Interpolation) والتي تعتبر من ابسط طرق الاندراج فتمكنا من الحصول على قانون جديد في الاندراج أسميناه صيغة جديدة لاندراج الخطي (New Formula of linear Interpolation) ولاحظنا ومن خلال القانون الجديد أن النتائج التي حصلنا عليها أكثر دقه من النتائج التي نحصل عليها عندما نستخدم قانون الاندراج الخطي, بالإضافة إلى ذلك فأننا لا نحتاج إلى تقليل قيمة (h)كي نحصل على تقريب جيد. ولأجل المقارنة استخدمنا طرق أخرى مثل(Lagrange Interpolation) , (Taylor Interpolation) بالإضافة إلى(Linear Interpolation). من جهة أخرى استخدمنا قانون الخطأ (Linear Interpolation) كما سيأتي توضيح ذلك من خلال الأمثلة حيث ان نتائج قانون الاندراج الخطي المطور أكثر دقة وأحيانا تضاهي طريقة الاندراج لاكرانج.

1-المقدمة:

قبل الشروع بالبحث سوف ادرج وبشيء من الاختصار بعض القوانين التي نحتاجها في البحث:

1-1. قانون الاندراج الخطي. [1]

$$f(x) = f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] \quad \ldots(1\text{-}1)$$

حيث أن x هي النقطة المطلوب إيجاد قيمه الدالة عندها و x_i هي النقطة التي تكون قبل نقطه x و x_{i+1} هي النقطة التي تكون بعد نقطه x .

2-1 . قانون لاكرانج في الاندراج [2]
قانون لاكرانج من الدرجه الاولى

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) \quad \ldots(1\text{-}2)$$

بحيث

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Or $p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$

بحيث

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad , \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad , \quad L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

1-3. قانون تايلر في الاندراج [3]

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} \qquad \ldots(1-3)$$

2- شرح اشتقاق قانون الاندراج الخطي المطور مع الامثله:

اذا كانت لدينا القيم المجدوله كما ياتي

x	x_0	x_1	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	...
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	...

نفرض اننا نريد ان نجد $f(x)$ عندما تكون x بين x_{i-1} و x_i فيمكن ذلك خلال طريقة الاندراج الخطي (linear interpolation) حيث

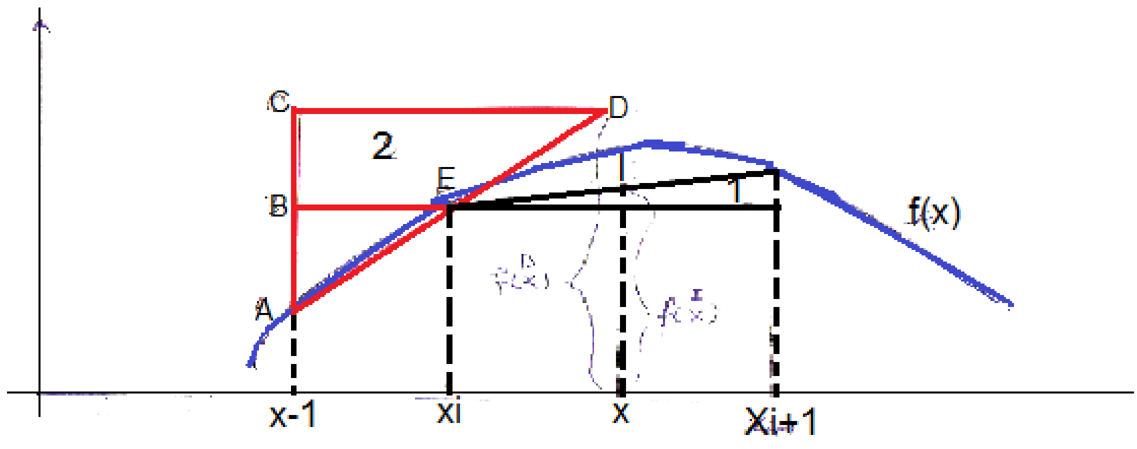
$$f(x) = f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

وهذا القانون اشتق من الجزء رقم 1 المشار اليه بالرسم ادناه حيث تمكن من ايجاد $f(\overset{I}{x})$ والتي تساوي تقريبا قيمة $f(x)$ اي ان

$$f(\overset{I}{x}) = f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

حيث أن $f^I(x)$ موضحة في الرسم أدناه على أنها قيمة الدالة المراد معرفتها عند (x)

أما من خلال بحثي فتمكنت من الحصول على $f(\overset{D}{x})$ والتي هي تساوي تقريبا قيمة $f(x)$ وكما موضح بالجزء 2 المشار إليه بالرسم أدناه



حتى نحصل على قيمة $\overset{D}{f}(x)$ نرسم خط مستقيم من النقطه A الى النقطه E ثم الى النقطه D ثم نكمل رسم المثلث كما في الجزء 2 الموضح بالرسم فنحصل على تطابق المثلثين ومن التطابق نحصل على $\frac{AB}{AC}=\frac{EB}{DC}$ و هذا يؤدي

$$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\overset{D}{f}(x)-f(x_{i-1})}=\frac{x_i-x_{i-1}}{x-x_{i-1}} \quad \Rightarrow \quad \overset{D}{f}(x)=f(x_{i-1})+\frac{x-x_i}{x_i-x_{i-1}}[f(x_i)-f(x_{i-1})]$$

ثم بعدها قمت بايجاد المعدل وذلك بجمع القيمتين المقربتين لـ $f(x)$ فحصلت على

$$f(x)=\frac{\overset{D}{f}(x)+\overset{I}{f}(x)}{2}$$

والتي هي قريبه جدا من النقطه المطلوبه على المنحني

$$\therefore\ f(x)=\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}+\frac{(x-x_{i-1})(f(x_i)-f(x_{i-1}))}{2(x_i-x_{i-1})}+\frac{(x-x_i)(f(x_{i+1})-f(x_i))}{2(x_{i+1}-x_i)}$$

والقانون الاخير هو قانون الاندراج الخطي الجديد (New Formula of Linear Interpolation)

مثال 1// اذا كان لدينا الجدول التالي

x	9	9.5	10
ln *x*	**2.1970**	**2.2510**	**2.3026**

المطلوب ايجاد قيمة ln9.21؟

الحل:

1- قيمه ln9.21 بواسطة الحاسبة اليدوية هي 2.22028985

2- الحل باستخدام الطرق الاندراج الممثلة بالمعادلات (1-1)(Li), (1-2)(Gi), (1-3)(Ti) وكذلك الطريقة الجديدة في هذا البحث (1-4)(Mi). وكما موضح في الجدول(1) ادناه.

Li	Gi	Ti	Mi
2.166376	**2.21968**	**1.5**	**2.220376**

3-في الجدول (2) ادناه سوف نقوم بالمقارنة بين الخطأ التقريبي والخطأ حسب قانون الاندراج حيث ان

الخطأ التقريبي= | القيمة الحقيقية- القيمة التقريبية |

والخطأ حسب قانون الاندراج

$$\text{Exact error}=\binom{x}{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)} \qquad (1\text{-}5)$$

$$\text{Ex err}=\binom{x}{2}h^2\ f''(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\ h^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0.000089744$$

e_L	e_g	e_t	e_m	e_{exact}
0.05391385	**0.00060985**	**0.72028985**	**0.00008615**	**0.000089744**

فنلاحظ ان نتيجة الحل باستخدام طريقة الاندراج الخطي المطور اقرب الى الجواب الحقيقي من بقية الطرق وهذا موضح من خلال الجدول(2) اعلاه.

مثال 2:- اذا كانت لدينا القيم المجدولة

x	0	0.5	1	1.5
$sinx$	**0**	**0.008726**	**0.01745**	**0.02617**

المطلوب هو معرفة (sin 0.3).

الحل:

1- القيمة الحقيقية ل sin0.3 باستخدام الحاسبة اليدوية 0.005235963.

2- الحل باستخدام الطرق الاندراج الممثلة بالمعادلات (1-1)(Li), (1-2)(Gi), (1-3)(Ti) وكذلك الطريقة الجديدة في هذا البحث (1-4)(Mi). وكما موضح في الجدول(3) التالي.

Li	Gi	Ti	Mi
0.005237	**0.005237**	**0.3**	**0.0052366**

3-في الجدول (4) أدناه سوف نقوم بالمقارنة بين الخطأ التقريبي والخطأ حسب قانون الاندراج حيث ان

الخطأ التقريبي= | القيمة الحقيقية- القيمة التقريبية |

والخطأ حسب قانون الاندراج

Exact error=$\binom{x}{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}$

e_L	e_g	e_t	e_m	e_{exact}
0.000001	**0.000001**	**0.2947640**	**0.0000006**	**0.000039**

فنلاحظ أن نتيجة الحل باستخدام طريقة الاندراج الخطي المطور اقرب الى الحل الصحيح منه عندما نستخدم الاندراج الخطي.

مع هذا تبقى لكل مسألة ظروفها في استخدام أي القوانين الأفضل إلى الحل أي ربما يكون استخدام قانون الاندراج الخطي أفضل من القانون الخطي المطور لكن يمكننا ان نعتمد القانون الخطي المطور كطريقة كما لاحظنا الأمثلة أعلاه.

وأخر ما نقول انه أفضل القوانين إلى الحل هو الذي يكون فيه مقدار الخطأ اقل ما يمكن.

References:

1-Alshallah Khalid "Lecture of Numerical Analysis" , Third class, Mathematics Dept. Education College, Babylon University, 2000.

2- Curtis F. Gerald/Patrick O.Wheatly "Applied numerical analysis". Third edition. California polytechnic State University, San Luis Obispo, 1985.

3-Richard L.Burden "Numerical analysis". Seven edition, Brooks/ Cole product, USA, 2001.

4-Steven E." Numerical Methods Course Notes" Dept. of Math. Univ. of California At San Diego 2004.