استخدام أنموذج متسلسلة ماركوف لدراسة سرعة الريح في محافظة صلاح الدين

عبد الغفور جاسم سالم[١] و حسن حسين ابراهيم[٢] واحمد خلف غنام[١]

[١] قسم الرياضيات، كليةالتربية للبنات، جامعة تكريت، تكريت، جمهورية العراق

[٢] قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تكريت، تكريت، جمهورية العراق

الملخص:

تم في هذا البحث دراسة السلسلة الزمنية اليومية لسرعة الريح للفترة (٢٠٠٥/٨/١ – ٢٠٠٦/٤/٣٠) باعتبارها متسلسلة ماركوف وتم ايجاد مصفوفة الانتقال بالاعتماد على سرعة الرياح (شديدة السرعة ،معتدلة السرعة ،بطيئة السرعة) . وقد تبين ان المتسلسلة تخصصية (Ergodic) وتم ايجاد التوزيع المستقر (stationary distribution) للحالات انفة الذكر وبعض المتغيرات ذوات العلاقة بالمسألة (زمن البقاء – زمن الانتظار – وزمن المكوث) لكل حالة .

المقدمة:

تعتبر متسلسلة ماركوف (Markov-chain) حالة خاصة للعملية العشوائية (stochastic process) التي تشمل عدد من الحالات (states) لمعلمة (parameter) زمنية. استطاع ((1907) Markov) من وضع المفاهيم الأساسية لمتسلسلة ماركوف وطورت هذه المفاهيم من قبل العديد من الرياضيين .

تستخدم متسلسلات ماركوف في مجالات عديدة منها المجال الاقتصادي ،الزراعي ،الطبي ،وعلم الاجتماع ...الخ. هناك دراسات عديدة بهذا الاتجاه نذكر منها ،دراسة سلسلة الأمطار بحالتين باستخدام سلاسل ماركوف [2] ، وحاول ((1981) Battaglia) دراسة منسوب النهر باعتباره متسلسلة ماركوف بحالتين (حالة الجفاف ، حالة الفيضان)وهناك دراسة لمنسوب النهر بثلاث حالات (حالة الجفاف ،معتدل، حالة الفيضان) [٥] ،هناك دراسة لمرض السرطان كمتسلسلة ماركوف [6] ودراسة سلسلة الأمطار بثلاث حالات [8] ودراسة مرض التدرن الرئوي كمتسلسلة ماركوف من قبل [7] .

تركز اهتمامنا في هذا البحث على صياغة السلسلة الزمنية لسرعة الريح في محافظة صلاح الدين كمتسلسلة ماركوف بثلاث حالات (شديدة السرعة ، معتدلة السرعة ، بطيئة السرعة) ، وتم ايجاد بعض الصفات الاحصائية لهذه السلسلة .

١- التحليل الاحصائي :

تعد متسلسلة الرياح من المسائل المهمة التي تؤثر على مناخ العراق وبالتالي تنويع المحاصيل الزراعية، فتم دراسة سلسلة الرياح للكشف عن بعض صفات هذه السلسلة حيث قسمت الى ثلاث حالات(بعد الاتصال بالأنواء الجوية بالمحافظة وأعلمتنا مشكورة عن القيم التي تكون عندها السرعة متفاوتة).

الحالة الأولى: تمثل حالة الرياح شديدة السرعة والتي تكون اكبر من (8) متر/ثانية.

الحالة الثانية: تمثل حالة الرياح معتدلة السرعة والتي تكون اكبر من (4) متر/ثانية واقل من (8) متر/ثانية.

الحالة الثالثة : تمثل حالة الرياح بطيئة السرعة والتي تكون اقل او يساوي (4) متر/ثانية .

وعلى هذه الحالات تم بناء مصفوفة الانتقال p بثلاث حالات وكما يلي:
لتكن $\{X_t\}$ السلسلة الزمنية اليومية لسرعة الرياح ،وليكن L_1 يمثل المستوى الحرج بين الحالة الاولى والحالة الثانية و L_2 بين الحالة الثانية والحالة الثالثة ، S_t تمثل الحالات أي ان

$$S_t = \begin{cases} 1 \;; & X_t > L_2 \\ 2 \;; & L_1 \le X_t \le L_1 \\ 3 \;; & X_t \le L_1 \end{cases}$$

ولتكن

$d = P_r(S_t=2 \,/\, S_{t-1}=1)$
$c = P_r(S_t=1 \,/ S_{t-1}=2)$
$b = P_r(S_t=3 \,/ S_{t-1}=2)$
$a = P_r(S_t=2 \,/ S_{t-1}=3)$

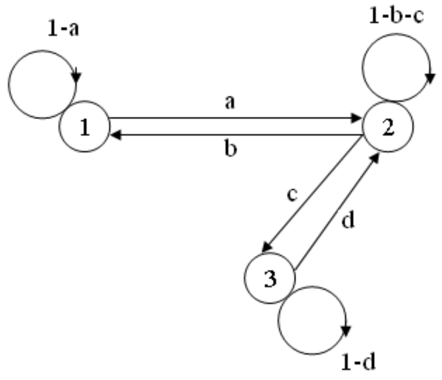
حيث P_r تمثل الاحتمالية (probability) وان $P_r(S_t=i \;/ S_{t-1}=j)$ تشير إلى احتمال الانتقال من الحالة j إلى الحالة i ،وان $0 < a,b,c,d < 1$ ثوابت .

وعلى هذا الأساس يمكن توضيح هذا التغيير الذي يمثل حركة السلسلة بشكل مصفوفة والتي تدعى بمصفوفة الانتقال (Transition Matrix) P كما يلي :

$$\begin{array}{cc} & \text{At time } (n+1) \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ P = 2 & \begin{bmatrix} 1-a & a & 0 \\ b & 1-b-c & c \\ 0 & d & 1-d \end{bmatrix} \end{array}$$

At time (n)

والشكل الاتي يمثل المخطط الشجيري (Digraph) الذي يوضح صفات متسلسلة ماركوف الممثلة بالمصفوفة P .



الشكل (1) المخطط الشجيري

نلاحظ من المخطط الشجيري ان جميع الحالات متصلة (أي يمكن الوصول من أي حالة الى اخرى) وكذلك $S_t = \{1, 2, 3\}$ فضاء العينة وان المجموعات الجزئية من S_t هي $\{1,2,3\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2\},\{3\},\{2\},\{1\}$ ومن تعريف المجموعة المغلقة نستنتج ان P هي المجموعة المغلقة الوحيدة أي ان P هي مصفوفة غير قابلة للتجزئة Irreducible .

لكي نبين ان P هي تخصصية Ergodic بقي ان نبين انها بدائية Primitive . ويتم ذلك بايجاد القيم الذاتية بحل النظام $|P-\lambda I| = 0$ حيث P مصفوفة الانتقال ، I مصفوفة واحدية λ القيم الذاتية .

وبحل النظام حصلنا على ما يلي :

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0$$

حيث :

$$A_1 = (a+b+c+d) - 3$$
$$A_2 = 3 - 2(a+b+c+d) + (ac+ad+bd)$$
$$A_3 = (a+b+c+d) - (1+ac+ad+bd)$$

أي ان :

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_{2,3} = 0.5[\{2-(a+b+c+d)\} \pm \{(a+b+c+d)^2 - 4(ac+ad+bd)\}^{1/2}]$$

ومن ملاحظة قيم λi ($i=1,2,3$) نجد ان P هي مصفوفة بدائية (Primitive) .

بما ان P (Irreducible) غير قابلة للتجزئة وكذلك (Primitive) بدائية اذن حسب التعريف P تخصصية Ergodic .

التوزيع المستقر Stationary Distribution :

يكون للسلسلة توزيع مستقر ووحيد (Unique stat. Dist.) اذا كانت P التي تمثل السلسلة Ergodic [لاحظ 3] وبما ان P هي تخصصية (Ergodic) $\Longleftarrow$ يوجد توزيع مستقر ووحيد $\prod_i$ ($i=1,2,3$) حيث) $\prod_i = P_r(\text{state } i)$.

ويمكن ايجاد هذا التوزيع بحل النظام الاتي :

$$\prod P = \prod$$
$$\sum_{i=1}^{3} \prod_i = 1$$

وان $\prod_i = \lim_{t\to\infty} \Pr(X_t = i)$

بحل النظام الذي في اعلاه حصلنا على ما يلي :

$\prod_1 = bd/B$, $\prod_3 = ac/B$, $\prod_2 = ad/B$ ......(١)

حيث

$$B = bd + ad + ac$$

بعض المتغيرات المهمة ذات العلاقة Some interesting related variable :

١– زمن البقاء (Di) The duration of an excursion :

هي فترة مكوث المتسلسلة في كل حالة ويرمز لها بالرمز D_i حيث $i = 1,2,3$ وان التوزيع الاحتمالي لفترة البقاء يعرف بما يلي (لاحظ 1) :

$$P_r(D_i = k) = P_r(J_j = i,\ 1 \le j \le k,\ J_{k+1} \ne i / J_0 \ne i,\ J_1 = i)$$

وباستخدام التعريف اعلاه حصلنا على

$$\left.\begin{aligned} P_r(D_1=k) &= a(1-a)^{k-1} \\ P_r(D_2=k) &= (b+c)(1-b-c)^{k-1} \\ P_r(D_3=k) &= d(1-d)^{k-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(2)$$

$K=1,2,3,\ldots\ldots\ldots$

$$(3)\ldots\ldots \left\{\begin{aligned} E(D_1) &= 1/a & V(D_1) &= 1-a\ /\ a^2 \\ E(D_2) &= 1\ /\ b+c & V(D_2) &= (1-b-c)\ /(b+c)^2 \\ E(D_3) &= 1/d & V(D_3) &= 1-d\ /\ d^2 \end{aligned}\right.$$

حيث $V(D_i) = E(D_i^2) - [E(D_i)]^2$ وتم ايجاد $E(D_i^2)$ من العلاقة

$$E[D_i(D_i-1)] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P_r(X=k)$$

٢- الزمن بين انتقالين Time between two consecutive crossing :

ليكن T_i يمثل الزمن بين انتقالين الى (شديد السرعة ، بطئ السرعة) $i=1,3$. حيث T_1 يمثل الفترة الزمنية بين عبورين (انتقالين) الى الحالة الاولى و T_3 يمثل العبور الى الحالة الثالثة.

فأن التوزيع الاحتمالي يمكن ايجاده بما يلي (لاحظ 1)

$$P(T_1 = t) = \textstyle\sum_{j=2}^{t} p(X_j > L_1 \text{ for } i < j;\ L_2 \le X_k \le L_1 \text{ for } j \le k \le t;\ X_{t+1} > L_1 / L_2 \le X_0 \le L_1;\ X_1 > L_1)$$
$$= [(acd)/\{d(a+b) - ac\}][\{(a+b-ac)/(a+b)\}^{t-1} - (1-d)^{t-1}] \ldots\ldots.(4\text{-}a)$$

$t = 1,2,3,\ldots\ldots.$

بنفس الطريقة :

$$P(T_3 = t) = \textstyle\sum_{j=2}^{t} p(X_j < L_2 \text{ for } i<j;\ L_2 \le X_k \le L_1 \text{ for } j \le k \le t;\ X_{t+1} < L_2 / L_2 \le X_0 \le L_1;\ X_1 < L_2)$$
$$= [(abd)/\{a(d+c) - bd\}][\{(d+c-bd)/(d+c)\}^{t-1} - (1-a)^{t-1}] \ldots\ldots.(4\text{-}b)$$

$t = 1,2,3,\ldots\ldots..$

$$(5)\ldots \left\{\begin{aligned} & E(T_1)\ \frac{[d(a+b)+ac]}{acd}\ ; \quad E(T_3) = \frac{[a(d+c)+bd]}{abd} \\ & V(T_1) = [d(a+b) - ac(2d-1)][d(a+b)+ac] / a^2c^2d^2 \\ & V(T_3) = [a(d+c) - bd(2a+1)][a(d+c)+bd] / a^2b^2d^2 \end{aligned}\right.$$

٣– زمن الانتظار Waiting time : (لاحظ 1)

هو زمن انتظار حالة معينة بعد زوالها ويرمز لها بالرمز W_i حيث $i=1,3$ وان التوزيع الاحتمالي يعرف بما يلي :

$$P_r(W_1=k) = P_r(J_2 \ne 1,\ J_3 \ne 1,\ \ldots,\ J_k \ne 1,\ J_{k+1} = 1 / J_0 = 1,\ J_1 \ne 1)$$

وكذلك

$$P_r(W_3=k) = P_r(J_2 \ne 3,\ J_3 \ne 3,\ \ldots,\ J_k \ne 3,\ J_{k+1} = 3 / J_0 = 3,\ J_1 \ne 3)$$

وباستخدام التعريف الذي في اعلاه وجدنا ان

$$\left.\begin{aligned} P_r(W_1=k) &= [ac/(a+b)][\{a(1-c)+b\}/(a+b)]^{k-1} \\ P_r(W_3=k) &= [bd/(c+d)][\{d(1-b)+c\}/(c+d)]^{k-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(6\text{-}a)$$

$K=1,2,3,\ldots$

وان

$$\left.\begin{aligned} E(W_1) &= (a+b)/ab \\ E(W_3) &= (c+d)/bd \\ V(W_1) &= [(a+b)((a+b)-2ad)/a^2c^2] \\ V(W_3) &= [(c+d)((c+d)-2bd)/b^2d^2] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(6\text{-}b)$$

والجدول رقم (١) يبين دالة كتلة الاحتمال والتوقع والتباين للمتغيرات آنفة الذكر.

جدول رقم –١– يبين دالة كتلة الاحتمال و التوقع و التباين للمتغيرات الثلاثة

$(i=1,2,3) \quad W_i, T_i, D_i$

المتغيرات	دالة كتلة الاحتمال	التوقيع	التباين
D_1	$a(1-a)^{k-1}$ $k=1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1-a}{a^2}$
D_2	$(b+c)(1-b-c)^{k-1}$ $k=1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{b+c}$	$\frac{1-b-c}{(b+c)^2}$
D_3	$d(1-d)^{k-1}$ $k=1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{d}$	$\frac{1-d}{d^2}$
T_1	$[(acd)/\{d(a+b)-ac\}$ $[\{(a+b-ac)/(a+b)\}^{t-1}-(1-t)^{t-1}$ $t=1,2,3,\ldots$	$\frac{d(a+b)+ac}{acd}$	$[d(a+b)-ac(zd-1)]$ $[d(a+b)+ac]/a^2c^2d^2$
T_3	$[(abd)/\{a(d+c)-bd\}]$ $[\{(d+c-bd)/(d+c)^{t-1}-(1-a)^{t-1}]$ $t=1,2,3,\ldots$	$\frac{a(d+c)+bd}{abd}$	$[d(a+b)-ac(2d-1)]$ $[a(d+c)+bd]/a^2b^2d^2$
W_1	$[ac/(a+b)][\{a(1-c)+b\}/(a+b)]^{k-1}$	$\frac{a+b}{ab}$	$[(a+b)\{(a+b)-2ad\}/a^2c^2$
W_2	$[bd/(c+d)][\{d(1-b)+c\}/(c+d)]^{k-1}$	$\frac{c+d}{bd}$	$[(c+d)\{(c+d)-2bd\}/b^2d^2$

الجانب التطبيقي :

تم تطبيق النتائج على السلسلة الزمنية اليومية لسرعة الريح في محافظة صلاح الدين للفترة (١/٨/٢٠٠٥-٣٠/٤/٢٠٠٦) . حيث قسمت الى ثلاث حالات وكان الانتقال بخطوة واحدة من حالة الى اخرى لتحقيق شروط متسلسلة ماركوف .

اصبح لدينا مصفوفة انتقال (3*3) عناصرها هي احتمالات شرطية conditional probability)) وتم تخمينها بواسطة برنامج صمم باستخدام الاحتمالية الشرطية من المصفوفة الرئيسية P .وبتخمين قيم d,c,b,a حصلنا على

$$P = \begin{bmatrix} 0.9853 & 0.0147 & 0 \\ 0.0147 & 0.8233 & 0.1617 \\ 0 & 0.1617 & 0.8383 \end{bmatrix}$$

وباستخدام العلاقة (1) فأن التوزيع المستقر لمصفوفة الانتقال P هو

$\prod_1 = 0.333$
$\prod_2 = 0.330$
$\prod_3 = 0.331$

وبما ان $\prod_i = p_r\,(\text{state } i)$ نجد ان الاحتمالية لسرعة الريح للحالات الثلاثة تقريبا متساوية ،

ولايجاد دالة كتلة الاحتمال نستخدم العلاقة (2) حيث

$P_r\,(D_1 = k) = 0.0147\ (0.9853)^{k-1}$
$P_r\,(D_2 = k) = 0.01767\ (0.8233)^{k-1}$
$P_r\,(D_3 = k) = 0.1617\ (0.8383)^{k-1}$

وان التوقع (الوسط الحسابي) والتباين لفترة البقاء لكل حالة من العلاقة (3) كالاتي :

$E(D_1) = 68$
$E(D_2) = 5.659 \cong 6$
$E(D_3) = 6.18 \cong 6$
$V(D_1) = 4561$
$V(D_2) = 26$
$V(D_3) = 31$

ودالة كتلة الاحتمال للزمن بين عبورين من العلاقة (5,4)

$P_r(T_1 = k) = 0.16196\ [(0.919)^{t-1} - (0.838)^{t-1}]$
$P_r(T_3 = k) = 0.01466\ [(0.9926)^{t-1} - (0.9853)^{t-1}]$
$E(T_1) = 18.52 \cong 19$
$E(T_3) = 204.7 \cong 205$
$V(T_1) = 10638$
$V(T_3) = \text{large} = 0.0000165 / a^2b^2c^2$

وكذلك دالة كتلة الاحتمال لزمن الانتظار نجده من العلاقة (6) حيث

$P(W_1=k) = (0.0957)\ (0.919)^{k-1}$
$P(W_3=k) = (0.00735)\ (0.9926)^{k-1}$
$E(W_1) = 136.11$, $E(W_3) = 136.05$
$V(W_1) = 129.34$, $V(W_3) = 18470$

والجدول رقم (٢) يبين دالة كتلة الاحتمال والتوقع والتباين لسرعة الريح للمتغيرات آنفة الذكر.

جدول رقم -٢- يبين دالة كتلة الاحتمال و التوقع و التباين لسرعة الريح للمتغيرات الثلاثة W_i, T_i, D_i

المتغيرات	دالة كتلة الاحتمال	التوقيع	التباين
D_1	$0.0147(0.9853)^{k-1}$	68	4561
D_2	$0.1767(0.8233)^{k-1}$	6	26
D_3	$0.1617(0.8383)^{k}$	6	31
T_1	$0.16196[(0.919)^{t-1}-(0.838)^{t-1}]$	19	10638
T_3	$0.01466[(0.9926)^{t-1}-(0.9853)^{t-1}]$	205	Large
W_1	$0.0957(0.919)^{k-1}$	136.11	129.34
W_2	$0.00735(0.9926)^{k-1}$	136.05	18470

الاستنتاجات:

من خلال دراستنا لسرعة الرياح في محافظة صلاح الدين باستخدام متسلسلة ماركوف تبين ان المتسلسلة (Ergodic) حيث كانت مصفوفة الانتقال غير قابلة للتجزئة وبدائية لأن ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2=0.9785$, $\lambda_3 = 0.66813$) .

لذلك حصلنا على التوزيع المستقر لكل حالة وتبين انها متساوية أي ان $\prod_1 = \prod_2 = \prod_3$ تقريبا . وان معدل زمن انتظار حالة (رياح شديدة السرعة) تساوي تقريبا (١٩) يوما بينما زمن انتظار رياح بطيئة السرعة يساوي (٢٠٥) يوما .

المصادر:

1- Battaglia ,F.(1981) " Vp crossing of discrete hydrologic process and Markov chains " .J. of Hydrology ,53 , 1-16 .

2- Cox , D . R . and Miller , H.D. (1965) " The Theory of stochastic processes ", Methuen , London .

3- Dean , L . Isaacson (1976) " Markov chains Theory and application " .

4- Isofescu, M . (1980) " Fine Markov processes and their applications" John Wiley and sons.

5- Salim A . J . and Thanoon , B . Y . (1996) , " A Markov-chain model for river flow " , Qatar Univ . sci .J 6(2) : 231-235 .

٦- ابراهيم ، وفاءكامل (1978) " استخدام السلاسل العشوائية في المجالات الصحية مع دراسة ميدانية في مؤسسة مدينة الطب " . رسالة ماجستير ، جامعة بغداد .

٧- العبيدي ، عبد الغفور جاسم (2006) " استخدام أنموذج متسلسلة ماركوف لدراسة مرض التدرن الرئوي في محافظة صلاح الدين (1991-1999) " . المجلة العراقية للعلوم الاحصائية العدد ٩ ، (92-101) .

٨- العبيدي ،عبد الغفور جاسم و وفاء محي الدين (2000) "صفات نموذج متسلسلة ماركوف للمعدلات الشهرية لسقوط المطر في العراق " . مجلة العلوم – جامعة تكريت . المجلد (٦) العدد (٣) .

A Markov-chain Model for Wind speed in salah Aldeen city

Abdulkafoor J. Salim[1], Hasan H. Ibraheem[2] and Hhmed Kh. Kanam[1]

[1] *Department of Mathmatics, College of Education for Women, University of Tikrit, Tikrit, Iraq*
[2] *Department of Mathmatics, College of Science, University of Tikrit, Tikrit, Iraq*

Abstract:

This paper studies the daily time series for the wind speed (1/8/2005-30/4/2006) as a Markov–chain. We find the transition matrix according to (very high, mid, low) winds velocity. Then we found that the chain is Ergodic. The stationary distributions as well as the probability distribution of the some related variable are derived.