السلوك الجيشاني لنماذج رياضية ذات بعدين

منال سالم حمدي و ميسون مال الله عزيز

قسم الرياضيات، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، الموصل،جمهورية العراق

الملخص:

في هذا البحث يدرس السلوك الجيشاني لثلاثة نماذج رياضية ،النموذج الأول من نوع الضيف والمضيف تتم دراسته على نوعين من البكتريا الموجودة بشكل طبيعي في فم الإنسان على سطح الأسنان واللثة ،أما النموذجين الثاني والثالث فهما من نوع الفريسة والمفترس والذي تتم دراسته على نوعين من الحيوانات هما (ثعلب المائي ،فار)وبعد تحليل السلوك الجيشاني من خلال حساب بعد لابنوف ،بعد الارتباط والرسم البياني للسلاسل الزمنية تبين ان النماذج الثلاثة لها سلوك جيشاني .

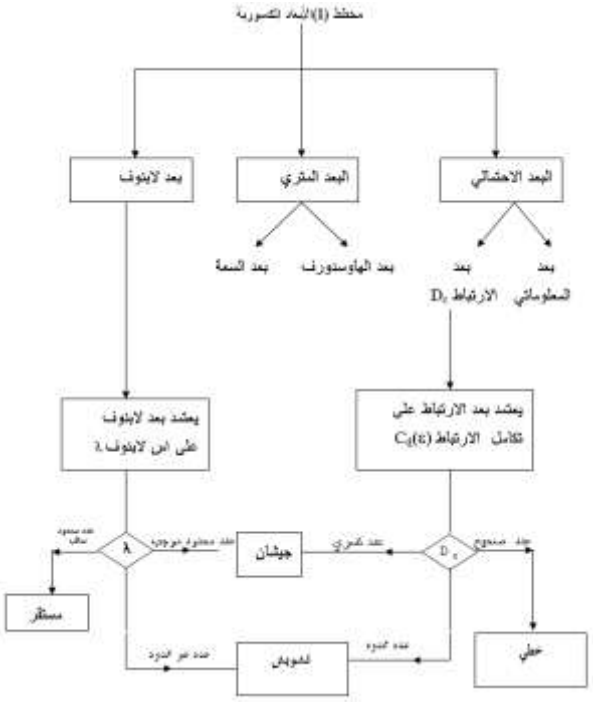
المقدمة:-

ان البعد الكسوري (Fractal Dimension) مشتق من الكلمة اللاتينية (Fractious) تعني يكسر (To Break) وهو أحد مقاييس الصفات المميزة للجيشان (Chaos) التي تميز الجيشان المحدد (Deterministic Chaos) والتشويش العشوائي (Random Noise) مثلا بعد النقطة الثابتة (Fixed Point) في فضاء الطور هو صفر ,وللدارة الغائية (Limit Cycle) هو واحد حيث للتشويش الأبيض (White Noise) عدد غير محدود (Infinite)[13] . ويكون البعد الكسوري عدد غير صحيح وهو على ثلاثة أنواع :-

١- الأبعاد المترية (Metric Dimensions) ويحتوي على بعد السعة(Capacity Dimension) والبعد الهاوسدروف (Hausdrff-Besieovitch Dimension)[7].

٢-الأبعاد الاحتمالية (Probabilistic Dimensions) وتضم البعد المعلوماتي (Information Dimension) وبعد الارتباط (Correlation Dimension) [10].

٣- بعد لابنوف (Lypunov Dimension) الذي يعتمد على اس لابنوف [12].لغرض جعل موضوع البعد الكسوري واضحا يلاحظ المخطط رقم (١).



الجانب النظري:-

1.الحساب الرياضي لاس لابنوف لتطبيق ببعدين :- [1]

١- لتكن F تطبيقا غير خطيا معرفا كما يأتي :-

$$F(v)=F\begin{pmatrix} f(v) \\ g(v) \end{pmatrix} \quad , \quad v=(x,y)$$

ولتكن $v_o=(x_o,y_o)$ نقطة ابتدائية

٢- نجد التكرارات (Iterates) $v_1,v_2,\ldots..\ v_n$ كما يأتي

$v_n=F^{[n]}(v_o)=F(v_{n-1})$ $n=1,2,\ldots\ldots\ldots m$

٣- نجد مصفوفة جاكوب (Jacobian Matrix) عندv_o وكما يأتي:-

$$J=DF(v_o)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(v_o) & \frac{\partial f}{\partial y}(v_o) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(v_o) & \frac{\partial g}{\partial y}(v_o) \end{bmatrix}$$

4- تكون أساس المتجهات في R^2 هي $\left[w_1^0, w_2^0\right]$ حيث

$$w_1^o=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ w_2^o=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5- يتم حساب المتجهات z_1, z_2 كأتي

$z_1=DF(v_o)\ w_1^0$

$z_2=DF(v_o)\ w_2^0$

٦- باستخدام طريقة كرام شميدت (Gram-Schmidt) فأن

$$y_1^i=z_1$$

$$y_2^{i'}=z_2-\frac{z_2\cdot y_1}{\|y_1\|^2}y_1 \qquad i=1,2,\ldots,n$$

، (.) Enclidean Length يرمز إلى الطول الاقليدي ||.|| حيث أن z_1 تكون متعامدة مع z_2يمثل الضرب الاعتيادي للمتجهات حيث أن .

٧- نجعل $w_1^1=y_1^1$ و $w_2^1=y_2^1$ حيث تكون لدينا أساس جديدة ثم نضع v_1 بدل عن v_o بحيث أن

$z_2=DF(v_1)\ w_2^1$, $z_1=DF(v_1)\ w_1^1$

وهكذا تكرر الخطوات السابقة n من المرات

٨- ومن تعريف (2)حيث r_k^n التي تمثل أطول عمود فان(kth- k=1,2 Longest Orthogonal)

$$r_k^n = \left\|y_k^n\right\| \ldots\ldots\ldots \left\|y_k^1\right\|$$

٩- عندئذ تكون اس لابنوف كما يأتي

$$\lambda_k = \frac{\ln\left\|y_k^n\right\| + \ldots}{n}$$

ملاحظة (1):-

لكي يكون التطبيق في حالة (الجيشان) Chaos فأنه يوجد على الأقل واحد من هاتين القيمتين k=1,2 ، λ_kعدد موجب . وقد تم استخدام (Mathlab) لبناء برنامج لهذه الطريقة .

2. بعد لابنوف Lyapunov Dimension: - [1]

يعتمد بعد لابنوف (Lyapunov Dimension) بالأساس على اس لابنوف كما يعد أحد مقاييس الأبعاد الكسورية في الأنظمة الجيشانية.
إذا كانت f تطبيقا في R^m ولتكن $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \ldots \geq \lambda_m$ هي اس لابنوف للتطبيق f ولتكن p اكبر عدد صحيح موجب بحيث ان

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \geq 0 \qquad (1$$

فان بعد لابنوف (Lyapunov Dimension) الذي يرمز له بـ D_L في المدار يعرف كما يأتي :-

$$D_L = \begin{cases} 0 & \text{غير موجودة } p \text{ إذا كانت} \\ p + \dfrac{1}{\lambda_p + 1}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i & p<m \text{ إذا كانت} \\ m & p=m \text{ إذا كانت} \end{cases} \qquad (2)$$

ملاحظة (2):-[1]

١- إذا كانت $0<\lambda_2<\lambda_1$ فان p=2 ومن العلاقة (٢) نجد أن $D_L=2$

٢- إذا كانت $0<\lambda_1$، $0>\lambda_2$ ، فإن

a- إذا كان $\lambda_1+\lambda_2<0$ ⇐ $D_L = 1 + \dfrac{\lambda_1}{|\lambda_2|}$

b-إذا كان$\lambda_1+\lambda_2>0$ فان p=2 ⇐ $D_L=2$

٣- لتكن λ تمثل اكبر اس لابنوف

إذا كان λ عدد محدود موجب فان الحالة هي جيشان (Chaos)

إذا كان λغير محدودة (Infinite) فان الحالة تشويش (Noise)

إذا كان λ عددا محدودا سالبا تكون الحالة مستقرة (Stable)،[6]

.

3. بعد الارتباط لتطبيق ببعدين :- Correlation Dimension for a Mapping in Two Dimension [10].

في معظم التطبيقات الرياضية تستعمل سلسلتان زمنيتان ، لتكن $\{X_t,Y_t\}$ حيث أن الصيغة الرياضية لتكامل الارتباط (Correlation Integral) ببعدين تعرف بـ

$$C_d(x,y,\varepsilon) = \lim_{N\to\infty}\frac{2}{N(N-1)}\left\{\begin{array}{l} \textit{number of paris (i, j) such that } \left|X_{i+h} - X_{j+h}\right| < \varepsilon, \left|Y_{i+h} - Y_{j+h}\right| < \varepsilon \\ \text{for } h = 0,1,2,3,\ldots\ldots, d-1 \end{array}\right\} (3)$$

حيث أن d يمثل البعد المغمور (Embedding Dimension)

∴بعد الارتباط معرف بـ

$$D_c^* = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d\log_2 C(x,y,\varepsilon)}{d\log_2(\varepsilon^2)} \qquad (4)$$

حيث $D_c(x,\varepsilon)$ و $D_c(y,\varepsilon)$ هما بعد الارتباط لـ x_t و y_t على التوالي فأن :

1- إذا كان $x_t= y_t$ أي أن السلسلتين متماثلتان فأن

$$D_c^* = \frac{1}{2}D_c(x,\varepsilon) \qquad (5)$$

2- إذا كان $x_t \neq y_t$ فأن

$$D_c^* = \frac{1}{2}\left[D_c(x_t,\varepsilon) + D_c(y_t,\varepsilon)\right] \qquad (6)$$

حيث D_c^* هو بعد الارتباط لتطبيق ببعدين.

ملاحظة(3) :- [6]

إذا كان بعد الارتباط

١- يساوي عددا غير صحيح فأن الحالة تكون جيشانية (Chaos)

٢- يساوي ما لا نهاية فأن الحالة تكون تشويشا (Noise)

٣- يساوي عددا صحيحا فأن الحالة تكون خطية (Linear) .

4.اختبار لإحصائي BDS :- Test of BDS Statistic

عرف اختبار BDS في منتصف ١٩٨٨ وقد اعلن برمجته باللغة (C) سنة ١٩٩٦ من قبل العلماء Brock , Dechert , Scheinksmanوهو اختبار الاستقلالية للسلاسل الزمنية لتحديد كون البيانات مستقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي أم لا ولم يقتصر اختبارالإحصائي BDS على الأنظمة غير الخطية ونظرية الجيشان بل استعمل في تشخيص الباقي (Residual Diagnostic) في الأنظمة غير المحددة (العشوائية)[4].

5-اختبار الاستقلالية A test for Independence:-[5]

لتكن $\{u_t\}$ متغيرات عشوائية حقيقية في عملية تصادفية ذات الاستقرارية (Stationary) بدالة توزيع F . لتكن

$$u_t^d = \left(u_t, u_{t+1}, \ldots\ldots, u_{t+d-1}\right)$$

لها دالة توزيع F_d حيث $\{u_t\}$ مستقلة فأن

$$F_d\left(x_1,\ldots\ldots,x_d\right) = \prod_{k=1}^{d}F(x_k)$$

افـــرض أن

$$G_i^j = \delta - \left\{u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j\right\} \qquad 1 \leq i < j \leq \infty$$

العملية التصادفية $\{u_t\}$ تكون منتظمة ومطلقة (Denker and Keller (1983)) إذا

$$B_k = \sup_{n\geq 1}\left\{E\left[\sup\left\{\left|p\left(A/G_1^n\right) - p(A)\right| A \in G_{n+k}^{\infty}\right\}\right]\right\} \qquad (7)$$

(7) تقرب من الصفر . حيث $x\in R^d$ ،وأن

$$\|x\| = \max_{1\le k\le d}\{|X_k|\}$$

الدالة المميزة للمجموعة A هي χ_A . وحالة خاصة A=[0,ε) تطلق على الدالة المميزة χ_ε إذا كان $\varphi:R^d\to R'$ قابلة للاشتقاق (التفاضل) فان $(D\phi)_\chi\in R^d$ هو متجه المشتقات الجزئية لـ φ عند $x\in R^d$ الاتجاه المشتقي (Derivative Directional) لـ φ عند x في الاتجاهي (v) هي

$$(D\varphi)_x.v = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(x+\varepsilon v)-\varphi(x)}{\varepsilon} \qquad (8)$$

6.تكامل الارتباط The Correlation Integral:-[5]

أن تكامل الارتباط يعد الاهم في اختبار الاحصاء BDS ومن تطبيقات تكامل الارتباط والمقاييس الاخرى ،اختبار فرضية نفس التوزيع المستقل (Identical Independent Distributed) (iid) أي أن فرضية العدم تكون

$\{H_o:X_t \quad \text{is iid}\}$

حيث أن X_t سلسلة الزمنية H_o هي فرضية العدم [8].

تكامل الارتباط قد عرف كطريقة لقياس بعد الكسوري للبيانات المحددة (Deterministic Data) وتكامل الارتباط عند البعد المغمور (Embedding Dimension) (d) معطاة بـ

$$C_{d,n}(\varepsilon) = \frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{1\le s\le t\le n}\chi_\varepsilon\left(\left\|u_s^d - u_t^d\right\|\right) \qquad (9)$$

وأيضا

$$C_d(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} C_{d,n}(\varepsilon) \qquad (10)$$

إذا كانت البيانات متولدة من عملية تصادفية ذات الاستقرارية تكون منتظمة مطلقا في هذه الحالة الغاية في معادلة (10) تكون

$$C_d(\varepsilon) = \int\int \chi_\varepsilon\left(\|u-v\|dF_d(u).dF_d(v)\right) \qquad (11)$$

عندما تكون مستقلة ، وبما أن

$$\chi_\varepsilon\left(\|u-v\|\right) = \prod_{i=1}^{d}\chi_\varepsilon\left(|u_i - v_i|\right) \qquad (12)$$

المعادلة (١١) تكون

$$C_d(\varepsilon) = C_1(\varepsilon)^d \qquad (13)$$

7- التوزيع المحاذي لتكامل الارتباط :- Asymptotic Distribution of correlation Integral

ميرهنة (1):- [5]

لتكن $\{u_t\}$ تكون متغيرات عشوائية مستقلة ذات توزيع متماثل (iid) إذا كان $k(\varepsilon)>C(\varepsilon)^2$ حيث

$$k(\varepsilon) = \int\left[\int\chi_\varepsilon(\|u-v\|)dF(u)\right]^2 dF(v) = \int\left[F(u+\varepsilon)-F(u-\varepsilon)\right]^2 dF(u) \qquad (14)$$

فان

$$\sqrt{n}\,\frac{C_{d,n}(\varepsilon)-C_1(\varepsilon)^d}{\sigma_d(\varepsilon)} \qquad (15)$$

يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي (N(0,1))حيث

$$\frac{1}{4}\sigma_d^2 = k^d - C^{2d} + 2\sum_{i=1}^{d-1}\left[k^{d-i}C^{2i} - C^{2d}\right] \qquad (16)$$

ميرهنة (٢) :-[5]

لتكن $\{u_t\}$ هي (iid) ، إذا كان $K(\varepsilon)>C(\varepsilon)^2$ فأن $d\ge 2$

$$W_{d,n}(\varepsilon) = \sqrt{n}\,\frac{C_{d,n}(\varepsilon) - C_1(\varepsilon)^d}{\sigma_d(\varepsilon)} \qquad (17)$$

يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي (N(0,1))، السلسة لها تباين محاذي تحقق

$$\frac{1}{4}V_d^2 = d(d-2)C^{2d-2}(K-C^2) + K^d - C^{2d} + 2\sum_{j=1}^{d-1}\left[C^{2j}(K^{d-j} - C^{2d-2j} - dC^{2d-2}(K-C^2)\right] \qquad (18)$$

ملاحظة : $W_{d,n}(\varepsilon)$ هو توزيع الإحصائي الحر(Distribution Free Statistic) ومن ميزاته انه لا يوجد افتراضات حول نوع التوزيع تستعمل كمختبر احصائي للمتغيرات العشوائية المستقلة التي لها نفس التوزيع الاحتمالي[5].

3.الجانب التطبيقي:-

نماذج في نمو تفاعل المجتمعات: Growth Models for Intraction Population

مقدمة :-

تناول البحث نماذج مقترحة في علم بيئة الحيوان لدراسة علاقة الافتراس (بنموذج المجتمع المضيف وكذلك بنموذج الفريسة والمفترس) وذلك من خلال دراسة لحجم مجتمعين هما (الثعلب المائي الكندي- الفأر الكندي) ، خلال فترة زمنية (١٩٤٨-٩١١)، كما يتم دراسة نوع من نماذج المجتمع المضيف على نوعين من الكائنات الحية الدقيقة (البكتريا)الموجودة بشكل طبيعي في فم الإنسان على سطح الاسنان واللثة والتي يكون وجودها متعاكس وذلك لاختلاف فعاليتها بسبب اختلاف أنواع الانزيمات التي تفرزها وبذلك تقتل واحدة منها الاخرى معتمدة على طبيعة غذاء الإنسان وطبيعة حالة الفم الصحية هما ستربتوكس (Streptoloccus) وستافلوكوكس (Staphilococcus)[18] .

١- نماذج النمو المتقطعة لتفاعل المجتمعات:- Discrete Growth Models For Interaction Population

هناك العديد من المعالجات الرياضية للنماذج البيئة إذ أن هاسل[12] درس ما يتعلق بنماذج الفريس والمفترس كذلك بدكنتون [5] وصفوا بعض النتائج حول العقدية الديناميكية لنماذج الفريس والمفترس بنتجين ورجر[20] درسوا تولد الحلول العددية للأنظمة الديناميكية المتقطعة .

التفاعل بين نوعي الفريسة ((Prey (N) والمفترس ((Predator (P) تحكم بنظام زمن متقطع (discrete time (t)system) بمعادلتين

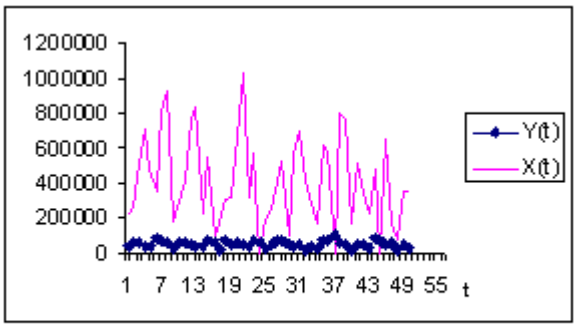
$N_{t+1}=r\,N_t f(N_t,P_t)$

$P_{t+1}=N_t g(N_t,P_t)$

حيث r>0 هو نسبة الزيادة الخطية للفريسة ، f,g دوال حيث f دالة لها علاقة بكفاءة مولد تأثير الفريسة، g دالة تبحث في كفاءة المفترس.

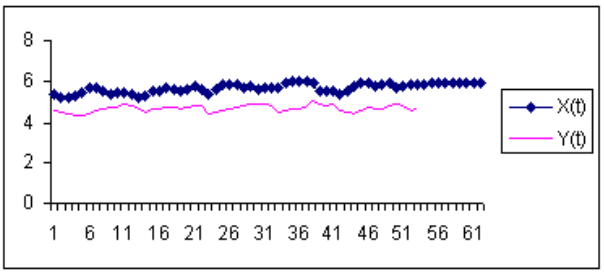
٢- السلاسل الزمنية لحجم مجتمعين (ثعلب مائي-فأر)

تعد هذه السلسلتين الزمنيتين المعروفة جدا في علم البيئة والتي تمثل (٦٣) مشاهدة حجم مجتمع حيوان (ثعلب مائي،كذلك (٦٣)) مشاهدة حجم مجتمع حيوان فأر . إذ اخذت هذه البيانات من قبل العالم (Jones 1914) نلاحظ أن الشكل (١) يمثل رسم البيانات الحقيقية للحيوانين (ثعلب مائي- فأر) كما يمثل الشكل (٢) رسم البيانات الخام إذ تتم تحويل البيانات الحقيقية[14] بأخذ $\log_{10}$ أي أن (فأر) $X_t=\log_{10}$ ، (ثعلب مائي) $Y_t=\log_{10}$



الشكل (1)

البيانات الحقيقية لـ (فأر) = X_t، البيانات الحقيقية (ثعلب مائي)= Y_t



الشكل (2)

البيانات الخام فأر) $X_t=\text{Log}_{10}$ (البيانات الخام ثعلب مائي) $Y_t=\text{Log}_{10}$

٣- نماذج الفريسة والمفترس Predator Prey Models

النموذج الأول

نموذج مجتمع المضيف (Host population) ومجتمع الطفيليات الدقيقة الوبائية (micro paratic epidemic population)

المعادلات Equations

$$X_{t+1} = X_t[1+a(Y_t-1)] \qquad (19)$$

$$Y_{t+1} = Y_t[1+r(1-bX_t)-er(1-b)]$$

حيث هي e,r,b,a معالم حقيقية.

تم دراسة هذا النموذج على مجتمع المضيف (ستربتوكوكس Streptococcus) ومجتمع الطفيليات (ستاتلوه كوكس Staphilococcus) حيث يظهر على سطح الأسنان واللثة .

تقدير معالم النموذج Estimation of the parameters of the Model

اشتقت قوانين المعلمات للمعادلات [19] بطريقة المربعات الصغرى[8]، بفرض أن

$\log_{10} X_{t+1}=N_{t+1}$, $\log_{10}X_t=N_t$, $\log_{10}(Y_t-1)=P_t$, $\log_{10}a=c$

$\therefore$

$$\hat{C}=\frac{\sum_{t=1}^{n-1}N_{t+1}-2\sum_{t=1}^{n-1}N_t+\sum_{t=1}^{n-1}P_t}{(n-1)} \qquad (20)$$

ومن حل المعادلة (20) عدديا وباستخدام البيانات (ستربتوكوكس) و (ستافلوه كوكس) نحصل على

$\log_{10}\hat{a}=\hat{c}$ $\Rightarrow$ $a=\hat{10}^{\hat{c}}=1374005.9$ $\Rightarrow$ $\hat{a}=0.052$

وبأخذ المعادلة الثانية (20)، وبفرض أن

$\log_{10} Y_{t+1}=P_{t+1}$, $\log_{10}Y_t=P_t$, $\log_{10}(1-e)=\lambda_1$

$\log_{10} r=\lambda_2$, $\log_{10}b=\lambda_3$, $\log_{10}(e-X_t)=N_t$

نحصل على

$$\sum_{t=1}^{n-1}P_{t+1}-3\sum_{t=1}^{n-1}P_t-(n-1)\hat{\lambda}_1-2(n-1)\hat{\lambda}_2-(n-1)\hat{\lambda}_3-\sum_{t=1}^{n-1}N_t=0 \qquad (21)$$

$$\sum_{t=1}^{n-1}P_{t+1}-3\sum_{t=1}^{n-1}P_t-(n-1)\hat{\lambda}_1-2(n-1)\hat{\lambda}_2-(n-1)\hat{\lambda}_3-\sum_{t=1}^{n-1}N_t=0 \qquad (22)$$

$$\sum_{t=1}^{n-1}P_{t+1}-3\sum_{t=1}^{n-1}P_t-(n-1)\hat{\lambda}_1-2(n-1)\hat{\lambda}_2-(n-1)\hat{\lambda}_3-\sum_{t=1}^{n-1}N_t=0 \qquad (23)$$

وبحل المعادلات (21) ، (22) ، (23) عدديا باستخدام البيانات نحصل على

$\log_{10}(1-e)=\hat{\lambda}_1$ $\Rightarrow$ $\hat{e}=1-\hat{10}^{\hat{\lambda}_1}$ $\Rightarrow$ $\hat{e}=1.01$

$\log_{10}\hat{b}=\hat{\lambda}_3$ $\Rightarrow$ $\hat{b}=\hat{10}^{\hat{\lambda}_3}$ $\Rightarrow$ $\hat{b}=0.351$

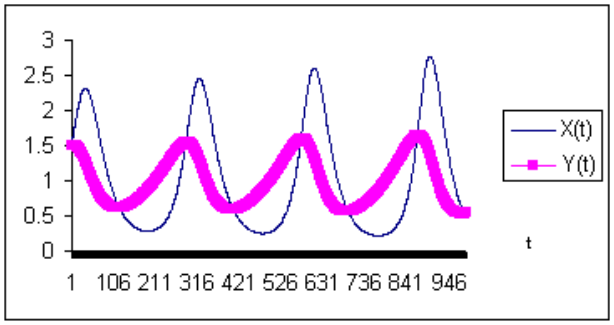
$\log_{10}\hat{r}=\hat{\lambda}_2$ $\Rightarrow$ $\hat{r}=\hat{10}^{\hat{\lambda}_2}$ $\Rightarrow$ $\hat{r}=0.03$

التعليقات Comments

المعادلات (19) درست من قبل الباحثين (Hassel and varley) [13]، (Lauwerier) [15]وجدوا أن للنموذج جاذب بفترة ٧ أي أنه جيشاني لأن الفترة ثلاثة تؤدي إلى الجيشان (Period three implise chaos)

الاستنتاجات :-

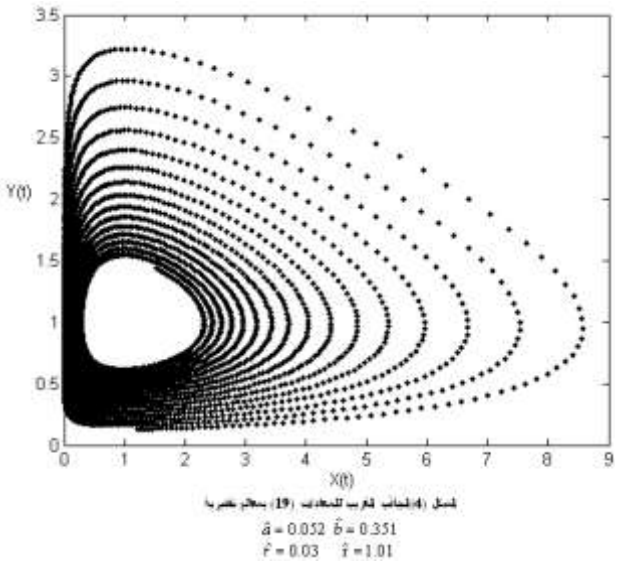
١- من رسم السلسلتين الزمنيتين X_t و Y_t المتولدة من النظام في الشكل (3)



الشكل (3) تمثل السلسلتين الزمنيتين للنموذج الأول

نلاحظ أن السلسلتين الزمنيتين تكونا دورية وبدوره سبعة مما يدل على أنها جيشان

٢- عند رسم الجاذب تبين أن النظام جاذب غريب كما في الشكل (4) .



٣- عند حساب البعد الكسوري وبعد لابنوف ثبت أن هناك بعد لابنوف قيمة تساوي ٢

مما يشير إلى أن النظام جيشاني وان البيانات التي تولد النظام جيشانيا كما أن قوى لابنوف تكون موجبة كما في جدول (1)

النقطة (X0,Y0)	قوى لابينوف (λ1,λ2)	عدد التكرارات(N)				
X0=0.01 Y0=1.05	λ1	10	20	30	40	50
		0.0567	0.7025	1.8846	3.2270	4.6334
	λ2	1.6199	2.5192	2.9034	3.1502	3.3574

جدول (1) يمثل قيم أس لابنوف

من خلال الفقرة (١) ، (٢) نجد أن قوى لابنوف تساوي λ_2=3.3574 ، λ_1=4.6334

وان عدد لابنوف يساوي L_2 =٢٨,٧ ، L_1 =١٠٢,٨ من الفقرة (٢) نجد أن بعد لابنوف يساوي ٢

ملاحظة : بما أن لقوى لابنوف أكثر من أس واحدة تكون موجبة مما يدل على أن النموذج جيشاني متعدد الأبعاد (high-dimensional chaos)[17]

٤- لحساب بعد الارتباط للنموذج تم بناء سلسلة زمنية بحجم (٨٥٠) لكل من x_t و y_t باستخدام برنامج BDS يتم حساب التكامل الارتباط للنموذج لكل من x_t و y_t كما في الجدولين الآتيين(٢) ، (٣)

J	حجم العينة (850) البعد المغمور (d)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	0.72427	0.71878	0.71347	0.70837	0.70343	0.69861	0.69388	0.68922	0.68461	0.68006
2.	0.50946	0.50363	0.49823	0.49286	0.48750	0.48215	0.47681	0.47149	0.46617	0.46087
3.	0.34429	0.33773	0.33179	0.32584	0.3199201	0.31400	0.30809	0.30218	0.29629	0.29048
4.	0.21399	0.22032	0.20767	0.20136	0.19506	0.18906	0.18400	0.17941	0.17516	0.17119
5.	0.13305	0.12648	0.11992	0.11416	0.10952	0.10547	0.10185	0.09531	0.095464	0.092597
6.	0.073168	0.066477	0.061190	0.57265	0.053971	0.051106	0.048580	0.046308	0.044269	0.042401
7.	0.036666	0.030580	0.026910	0.024196	0.022004	0.020186	0.018617	0.017250	0.016051	0.14974
8.	0.018959	0.014045	0.011564	0.0098526	0.0085666	0.0075493	0.0067239	0.0060439	0.0054708	0.0049969
9.	0.0096501	0.0060115	0.0045054	0.0036005	0.0029684	0.0025211	0.0021898	0.0019555	0.0017624	0.0016166
10.	0.0050052	0.0023696	0.0015844	0.0011806	0.00095682	0.00082448	0.00073367	0.00067061	0.00061854	0.00057471

جدول(٢)يمثل جدول قيم تكامل الارتباط للنموذج الاول (x_t)

كل عمود يمثل بعد مغمور مختلفة d حيث d=1,..,10 كل صف يبين قيم مختلفة لـ j حيث $\varepsilon_j=(0.5)^j$ كل خلية تمثل قيمة تكامل الارتباط .

J	حجم العينة (850) البعد المغمور (d)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	0.90054	0.89743	0.89530	0.8931	0.89104	0.88890	0.88675	0.88460	0.88244	0.88027
2.	0.57750	0.57284	0.56818	0.56350	0.55881	0.55411	0.54940	0.54468	0.53994	0.53518
3.	0.35167	0.34583	0.33998	0.33413	0.32825	0.32237	0.31648	0.31061	0.30473	0.29885
4.	0.20495	0.19864	0.19235	0.18605	0.17976	0.17346	0.16716	0.16085	0.15467	0.14932
5.	0.11322	0.10665	0.1007	0.093488	0.086953	0.081895	0.078103	0.074978	0.072273	0.069877
6.	0.058405	0.051687	0.044978	0.040365	0.037347	0.034965	0.033007	0.031344	0.029888	0.028591
7.	0.029283	0.022529	0.018645	0.016437	0.014828	0.013584	0.012579	0.011738	0.011007	0.010373
8.	0.014653	0.0092590	0.0073177	0.0061656	0.0053604	0.0047730	0.0043121	0.0039335	0.0036095	0.0033407
9.	0.0072722	0.0036225	0.0026453	0.0021268	0.0017542	0.0014919	0.0013043	0.0011496	0.0010224	0.00091444
10.	0.0035585	0.0013195	0.00088269	0.00064195	0.00050359	0.00040102	0.00032045	0.00026486	0.00021465	0.00017836

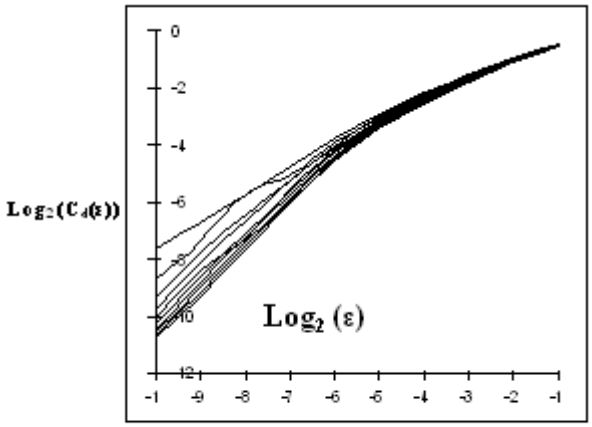
جدول(3) :-يمثل جدول قيم تكامل الارتباط للنموذج الاول (Y_t)

كل عمود يمثل بعد مغمور مختلفة d حيث d=1,..,10 كل صف يبين قيم مختلفة لـ j حيث $\varepsilon_j=(0.5)^j$. كل خلية تمثل قيمة التكامل الارتباط.

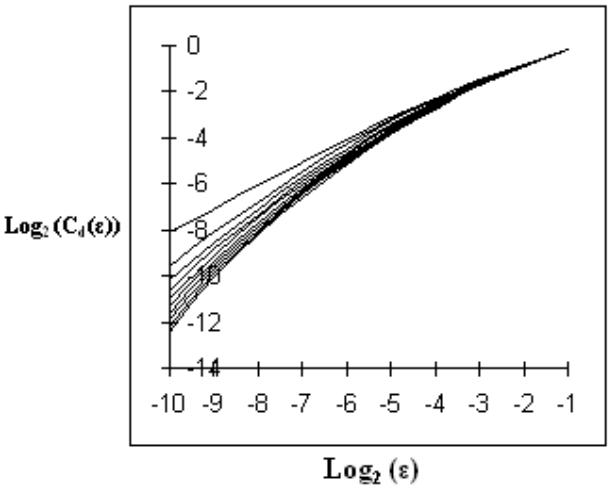
0.9055075	8
0.925197	9
0.943246	10

جدول(**4**) يمثل قيم بعد الارتباط النموذج الاول

تم تحويل التكامل الارتباط لـ x_t وy_t الموجودة في جداول (2) ، (3) على التوالي بـ Log2 وباستخدام برنامج (stategraph) نحصل على الشكلين (٥)، (٦) .



شكل (5) تكامل الارتباط $\log C_d(\varepsilon)$ للنموذج الاول
دالة للمسافة ε بعد مغمور d حيث d=1 to 10

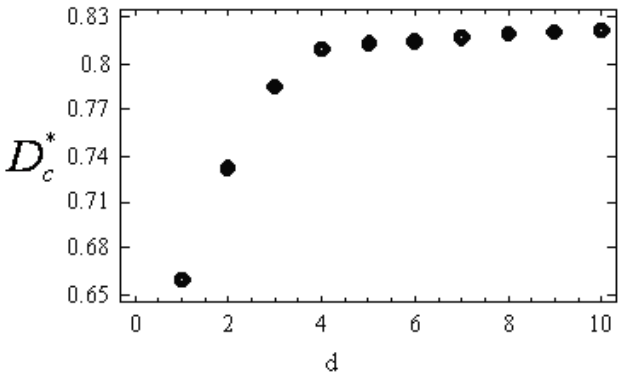


شكل (6) تكامل الارتباط $\log C_d(\varepsilon)$ للنموذج الاول
دالة للمسافة ε بعد مغمور d حيث d=1 to 10

وباستخدام العلاقة (٦) الموجودة في الفقرة (٣) نحصل على الجدول (4) حيث D_c^* يمثل قيم بعد الارتباط للنموذج الأول

البعد المغمور(d)	البعد الارتباط (D_c^*)
1	0.6597595
2	0.731839
3	0.7854835
4	0.810104
5	0.8466445
6	0.8623095
7	0.885674

من الجدول (4) وباستخدام برنامج (statgraph) نحصل على الشكل (٧).



شكل (7) بعد الارتباط D_c^* للنموذج الاول دالة للبعد المغمور d

الاستنتاجات:

١- من الشكل(٧) يتم تحديد بعد الارتباط للنموذج عند البعد المغمور إذ نجد أن بعد الارتباط للنموذج يساوي (٠,٨١٠) وان البعد المغمور (٤) .

٢- وباستعمال اختبار BDS وبعد حصولنا على قيم تكامل الارتباط لـ x_t و y_t في جداول (2) (٣) ومن خلال عدم تحقق العلاقة الآتية

$$C_d(\varepsilon)/(C_1(\varepsilon))^d \qquad (24)$$

تبين أن المتغيرات غير مستقلة أي معتمدة [3]وكذلك يمكننا التحقق أيضا من العلاقة الآتية

$$C_d(\varepsilon)/(C_1(\varepsilon))^d>1 \qquad (25)$$

حيث نجد من العلاقة (٢٥) ما يأتي:-

i- في حالة أن كون هذه العلاقة أكبر من واحد فالقيم في هذه الحالة تكون ذات تجذب قوي أي متباعدة . كما أنها قد تشابه إلى حد ما عدد لابنوف هذا يعني وجود حالة جيشان.

ii- في حالة العلاقة تكون أقل من (١) وهذا يعني وجود تجذب ولكنه متقارب أي عدم وجود حالة الجيشان .

iii- عندما تساوي (١) هذا يعني أنها لا تحقق تعريف الجيشان وأن المتغيرات تكون مستقلة ومتماثلة وبذلك حسب بعد لابنوف وبعد الارتباط وكذلك من (٢) ، (٣) ،(٤) نجد أن نموذج هو في حالة الجيشان .

٥-تم حساب الاحصائي الحر $W_{d,n}(\varepsilon)$ لكل من السلسلتين x_t و y_t لبيان فيما إذا كانت السلسلتين مستقلتين ولهما نفس التوزيع الاحتمالي أم لا ؟ كما مبينة القيم في جدول(5) .

حجم العينه (850) للمتغير Xt d						حجم العينه (850) للمتغير Yt d				
J	2	4	6	8	10	2	4	6	8	10
١	8.856E+1	1.005E+2	1.236E+2	1.636E+2	2.285E+2	9.493E+1	8.533E+1	8.075E+1	8.009E+1	8.1912E+1
٢	1.245E+2	2.297E+2	5.013E+2	1.255E+3	3.448E+3	1.709E+2	2.532E+2	4.269E+2	8.043E+2	1.640E+3
3	1.119E+2	3.6036E+2	1.546E+3	7.934E+3	4.509E+4	2.465E+2	7.217E+2	2.769E+3	1.267E+4	6.443E+4
٤	1.140E+2	7.262E+2	6.801E+3	7.822E+4	9.971E+5	2.850E+2	1.916E+3	1.9177E4	2.340E+5	3.188E+6
٥	1.330E+2	1.894E+3	4.3728E+4	1.226E+6	3.757E+7	3.489E+2	1.349E+3	1.820E+5	6.808E+6	2.881E+8
٦	1.911E+2	7.617E+3	5.1855E+5	4.255E+7	3.783E+9	5.267E+2	3.419E+3	2.932E+6	3.850E+8	5.727E+10
٧	3.311E+2	4.487E+4	1.088E+7	3.182E+9	1.007E+12	8.364E+2	9.660E+3	5.591E+7	2.657E+10	1.434E+13
٨	5.187E+2	2.139E+5	1.636E+8	1.542E+11	1.861E+14	1.0718E+3	2.213E+4	7.983E+8	1.310E+12	2.436E+15
٩	7.024E+2	8.129E+5	1.872E+9	5.590E+12	1.830E+18	1.257E+3	4.454E+4	8.796E+9	4.597E+13	2.695E+17
١٠	8.786E+2	2.596E+6	1.831E+10	1.733E+14	8.786E+2	1.359E+3	6.395E+6	7.053E+10	9.526E+14	1.545E+19

جدول(٥) الاحصائي الحر x_t و y_t النموذج المجتمع المضيف

كل عمود يمثل قيم مختلفة للبعد المغمور d وكل صف يمثل قيم مختلفة لـ j بحيث $\varepsilon_j=(0.5)^j$. كل خلية تمثل قيمة الاحصائي الحر $W_{d,n}(\varepsilon)$ كل من السلسلتين X_t و Y_t

لقيم مختلفة لمستوى المعنوية α حيث $\alpha=0.01$, $\alpha = 0.05$ ترفض فرضية العدم H_o: x_t is i.i.d و H_o: y_t is i.i.d مما يشير أن السلسلتين الزمنيتين

X_t و Y_t المولدة من النموذج الاول هي سلاسل جيشانية .

٢- النموذج الثاني

المعادلات Equations

$$N_{t+1} = rN_t e^{[-aP_t]}$$
$$P_{t+1} = N_t\left[1-e^{[-aP_t]}\right] \qquad (26)$$

تقدير معالم النموذج Estimation of The Parameters of the Model

\اشتقت قوانين المعلمات للمعادلات (٢٦) بطريقة المربعات الصغرى [8]، وكانت بفرض أن

$$Log_{10}N_{t+1} = X_{t+1} \ , \ \ Log_{10}r = c$$

حيث أن

$$\sum_{t=1}^{n-1} X_{t+1} - (n-1)\hat{c} - \sum_{t}^{n-1} X_t + \frac{\hat{a}}{\ln 10}\sum_{t=1}^{n-1} P_t = 0 \qquad (26)$$

$$\frac{1}{\ln 10}\sum_{t=1}^{n-1} X_{t+1}P_t - \frac{\hat{c}}{\ln 10}\sum_{t=1}^{n-1} P_t - \frac{1}{\ln 10}\sum_{t=1}^{n-1} X_t P_t + \frac{\hat{a}}{(\ln 10)^2}\sum_{t=1}^{n-1} P_t = 0 \qquad (27)$$

ومن حل المعادلتين (٢٦) (٢٧) عدديا باستخدام البيانات (ثعلب مائي وفأر) المذكور في الفقرة (٢) نحصل على

$$\hat{c} = 0.09835 \qquad , \qquad \hat{a} = 0.0434$$
$$\therefore \ \log_{10} r = \hat{c} \qquad \Rightarrow \qquad r = 10\hat{} = 1.254$$

التعليقات Comments

بين [19]أن الحلول العديد للنظام (26) تؤشر أن النظام غير مستقر لتفرعات محدودة والحلول تنمو بصورة غير مقيدة في دراستنا تم تطبيق النموذج على (ثعلب مائي،فأر) كنديان إذ تم التوصل إلى ما يأتي :

من ملاحظة النموذج عند حساب البعد الكسوري (بعد لابنوف) تبين أن هناك إحدى قوى لابنوف وكما مبين في الجدول (6) موجبة وان قيمة بعد لابنوف يساوي ١,٠٢٨ عند النقطة (٤,٧٩٠،٥,٧٠٧) ،حيث أن قوى لابنوف تساوي λ_2=-1.320 ، λ_1=0.0353،وان عدد لابنوف يساوي L_2 =٠,٢٦٧ ، L_1 =١,٠٣٦ .

النقطة (X0,Y0)	اس لابينوف (λ1,λ2)	عدد التكرارات (N)		
X0=5.707 Y0=4.790	λ1	1	5	10
		0.0353	0.3678	0.9036
	λ2	-1.3201	-3.6059	-4.9078

جدول (٦):- يمثل قيم أس لابنوف للنموذج الثاني

٣ – النموذج الثالث

المعادلات Equations

$$1 - I_t = \exp\left[-I_t U_t\right]$$
$$U_{t+1} = \lambda U_t\left[1-I_t\right] \qquad (29)$$

تقدير معالم النموذج Estimation of the Parameters of The Model

اشتقت قوانين المعالم لمعادلات (٢٩) بطريقة المربعات الصغرى[8] ، وكانت بفرض أن

$$\log_{10} U_{t+1} = Y_{t+1} \ , \ \log_{10}\lambda = c \quad , \quad \log_{10} U_t = Y_t$$

حيث نحصل على

$$\hat{C} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} Y_{t+1} - \sum_{t=1}^{n-1} Y_t + \frac{1}{\ln 10}\sum_{t=1}^{n-1} I_t U_t}{(n-1)} \qquad (30)$$

ومن حل المعادلة (٣٠) عدديا وباستخدام البيانات (ثعلب مائي،فأر) المذكور في الفقرة (٢) نحصل على

$$\hat{c} = 11.558$$

$$\log_{10}\hat{\lambda} = \hat{c} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\lambda} = \hat{10^{c}} = 1374005.9$$

التعليقات Commets

النموذج درس بعمق من قبل May [16] حيث أن الحالة المستقرة الموجبة (Positive Steady State) والحلول الدورية (Periodic Solution) غير مستقرة (unstable) ، هذا يعني أن النموذج يمتلك سلوك جيشاني في هذا البحث تم دراسة النموذج على مجتمع (فأر) ومجتمع (ثعلب مائي) كنديان وتبين ما يلي

١- عند حساب البعد الكسوري من خلال حساب بعد لابنوف نجد انه يساوي (١,٨١٤) علما أن قوى لابنوف تساوي λ_2=75.0698 ، λ_1=61.1221 عند (n=1) وكذلك عند النقطة (٤,٠٧١٩،٥,٠٨٥٨) ، ولكن عندما (n=5) نجد أنه يكون (∞) هذا يعني أنه في التكرار الاول يكون جيشاني ثم بعد ذلك يكون تشويش (Noise) كما في الجدول الآتي:-

النقطة (X0,Y0)	اس لابينوف (λ1,λ2)	عدد التكرارات (N)		
X0=5.0858 Y0=4.0719	λ1	1	5	10
		61.1221	∞	∞
	λ2	-75.0698	∞	∞

جدول (7) :-يمثل قيم أس لابنوف

٢- عند حساب بعد الارتباط له في حالة المتغيرين x و y نجد أن y يقترب إلى الصفر وعند أخذ $\log_{10}$ له نجد أنه يساوي (∞) أي يظهر حالة التشويش أيضا .

التوصيات:

١. الكشف عند أي زمن تأخير للاستقلالية تحدث لنظام ديناميكي معتمداً على الإحصائيات المعتمدة على تكامل الارتباط .

٢. نبرهن نظرياً الحالة التي استنتجناها تطبيقياً في دراستنا أن الجزء الكسري لبعد لابنوف يساوي قيمة المعلمة المؤثرة على حالة الجيشان في الأنظمة الديناميكية .

٣. بناء نموذج لحالة طبيعية في المجتمع ودراسته فيما إذا كان النموذج الذي يولد السلسلة الزمنية جيشاني أم لا ، لبعد أو بعدين واكثر .

٤. بناء خوارزمية لإيجاد البعد الاحتمالي (بعد الارتباط) لنموذج سلاسل زمنية بثلاثة أبعاد

٥. دراسة الحالة الجيشانية لنماذج رياضية عشوائية (غير محدودة) وتحليل الخطأ لتلك النماذج وبيان فيما إذا كان الخطأ جيشاني أو تشويش ابيض .

٦. دراسة الحالة الجيشانية لنماذج رياضية مستمرة واختبار فيما إذا كانت السلاسل لمتولدة جيشانية أم

المصادر:

1. Alligood auer,T.D and Yorke,J.A.(1997), "Chaos: An Introduction to Dynamical system", Springer- Verlag New York ,Inc.
2. Aziz,M.M.(1996),"A New Analysis of Sunpot Time Series "Ph.D thesis ,University of Mosul.
3. Baek ,E.G and Brock, W.A.(1991),"some Theory of Statistical Inference for Non –Linear Science", SSRI .395.
4. Baek ,E.G and Brock, W.A.(1992),"Non Paramtric Test for Independence of Multivariate time Series", SSRI .394.
5. Beddington ,J.R; Free, C.A and Lawton, J.H .(1975),"Dynamic Complexit in Predator-Prey models Framed in Difference Equations",Nature.
6. Brock ,W.A;Dechert, W.D; Lebaron ,B.and Scheinkman ,J.A.(1996),''A Test for Independence Based on The Correlation Dimension ",SSRI.444 .
7. Corana,A;Leggio,A.C;Ridella,S.andRolando,C.(20 02),"EfficientComputation of The Correlation Dimension form Time Series",
8. Draper,N.and Smith (1966)"Applied Regression Analysis".Wiley, NewYork.
9. Farmer ,J.Dott,E and Yorke J.A .(1983),"The Dimension of Chaotic Attractors", Ann, Physica 7D:153-180
10. Grassberger,P and Procaccia ,I.(1983),"Characterization of Strange aHractor ",Physics Review Letter So:346.
11. Gulick ,D.(1992), "Encounter With Chaos", MC.Graw-Hill,Inc.
12. Hassel,M.P.(1978),"The Dynamics of Arthropod Predator-prey Systems",Princeton Universlty,Press.
13. Hassel,M.and Varley ,G.C.(1969)"New Inductive Model For Insect Parasites and Bearing OnBiological Coutrol Nature 223:1133-1137.
14. Jassim ,N.T.(2000),"Linear Delay Autoregessive Model With an Application in Ecology ",M.SC . Thesis University of Mosul.
15. Lauwerier,H.A(1986)."Two Dimensional Iterative Maps .In A.V Holdenced,Chaos
16. May,R.M.(1985),"Regulation Population With Non-Overlapping Generation ,Amer Nat 125,575-584.
17. Mary,H and Lai.(1998),"Route to High Dimensional Chaos", Physical Review E,Vol 59,No-4.
18. Munksgaard.(1989),"Jan Lindhe Text book of Clinicl Periodon-tology", Denmark by,P.J.Schmidt,Vojens.
19. Murray,J.D.(1993)"Mathematical Biology"Second,Corrected Edition Springer-Verlag Heidelberg.
20. Peitgen,H.O and Richter,P.H.(1986),"Images of Complex Dynamical Systems",Belin Heidelberg New York Tokyo:Springer.
21. Schroederr , M.(1991),"Fractals,Chaos ,Power Laws " ,New York .

22. Walter,P.H.(1992),"Time Series Analysis of Synchronization and Choas ",Academic Press,Inc.
23. Wolfswift, J.D and Swinney ,H.L.(1985)"Determining Lyapunov Exponents Form A Time Series ",Physica 160:285-317.
24. Yamazaki,H. and Mino.(1989),"Chaos in Ware Instability Theory Experiment" Physics No,98.

Chaotic Behavior Of Two Dimensions Mathematical Models

Maysoon M.Aziz and Manal S. Hamde
Department of Mathematics, College of Computers & Mathematical Sciences, University of Mosul, Mosul, Iraq

Abstract:

In this paper, We study the chaotic behavior of three Mathematical Models .The First model is the host population and the micro paretic epidemic population, have been studied on two types of bacteria that found normally in the mouth of human on the surface of his teeth and gingival .The Second and the third are prey and predator models were studied on two types of animals (mink and mouse).After analyzing of the chaotic behavior by determining Lyapunov dimension , Correlation Dimension and plot of time series, it was found that the three models have chaotic behavior.