مقارنة قيم التوازن الأمثل لمعاملات مختلفة من الزيغ الكروي لنظام ذي فتحات مختلفة

علاء بدر حسن ، هبه ممتاز علي ، رجاء فيصل ربيع
قسم الفيزياء ،كلية التربية ابن الهيثم،جامعة بغداد

الخلاصة

تم في هذا البحث دراسة قيم التوازن الأمثل لمعاملات الزيغ الكروي من الدرجة الثالثة والخامسة والخطأ البؤري لنظام بصري ذي فتحات مختلفة (دائرية، بيضوية، مربعة، مثلثة)، ومقارنة النتائج لتوزيع الشدة في مستوى الصورة لدالة الانتشار النقطية.

استعملت طريقة (Marechal)(1) لإيجاد القيمة الصغرى لمعدل مربع الانحراف في جبهة الموجة، ومن ثم نحصل على القيمة العظمى للشدة المركزية حسب معيار (Strehl).

النظرية

تعد موازنة معاملات الزيغ ذي المراتب المختلفة من المواضيع المهمة في الأنظمة البصرية ، إذ الحصول على أفضل موازنة للمعاملات يعني الحصول على أفضل نوعية للصورة.

تم في هذا البحث استعمال طريقة (Marechal) (1) وذلك بإيجاد القيمة الصغرى لمعدل مربع الانحراف في جبهة الموجة ومنها نحصل على القيمة العظمى للشدة المركزية حسب معيار ستريل (Strehl) (2) الذي يعرف بالنسبة بين الشدة المركزية (I) لنظام متضمن كميات من الزيغ إلى الشدة المركزية (Io) للنظام المثالي الخالي من الزيغ عند أفضل بؤرة:

$$S = \frac{I}{I_O}$$

وقد وضع ستريل نسبة الشدة المعيرة المسموح بها ($S \geq 0.8$) للنظام عالي التصحيح.

إن معدل مربع الانحراف في جبهة الموجة المسمى بالتباين، يحسب من المعادلة(3):

$$V = \frac{1}{A}\int_y\int_x [w(x,y)]^2\,dxdy - \left[\frac{1}{A}\int_y\int_x w(x,y)dxdy\right]^2 \quad ...[1]$$

إذ أن: A= مساحة فتحة الإخراج

W(x,y)= معامل الزيغ

وعليه تكون الشدة العظمى لتوزيع الضوء في صورة المصدر النقطي للنظام المتضمن كميات من الزيغ هي(3):

$$I = \left(1 - 2\pi^2 V / \lambda^2\right)^2$$

وبعد مقارنة المعادلة أعلاه مع نسبة ستريل للشدة المسموح بها:

$$V \leq \lambda^2 / 180$$

وهذا ما يسمى بشرط(ستريل). أما حل المعادلة [1] فيكون بالشكل:

$$V = A_{22}W_{20}^2 + A_{44}W_{40}^2 + A_{66}W_{60}^2 + A_{24}W_{20}W_{40} + A_{26}W_{20}W_{60} + A_{46}W_{40}W_{60} \quad ...[2]$$

إذ ($A_{22}, A_{44}, A_{66}, ...A_{46}$) هي معاملات معادلة التباين تختلف قيمها حسب نوع فتحة الإخراج المستعملة وتحسب قيمها بوساطة استعمال طريقة (Gauss) للتكامل العددي لحل التكامل في المعادلة [1] التي تعد طريقة مناسبة لسرعتها ودقتها التي بدورها تمثل حاسوبيا ببرنامج (Quick Basic)(4). أما (w_{20}, w_{40}, w_{60}) فتمثل معامل الخطأ البؤري والزيغ الكروي من الدرجة الثالثة والخامسة على التوالي.

يلاحظ إن دالة الزيغ تعتمد على المحاور (x,y) التي تؤخذ من شكل الفتحة حسب العلاقات:

$$V = \frac{1}{\pi}\int_{y=-1}^{y=1}\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}}[w(x,y)]^2\,dxdy - \left[\frac{1}{\pi}\int_{y=-1}^{y=1}\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} w(x,y)dxdy\right]^2 \qquad (circle)$$

$$V = \frac{1}{\pi}\int_{y=-b}^{y=b}\int_{x=-a\sqrt{1-a^2y^2}}^{x=a\sqrt{1-a^2y^2}}[w(x,y)]^2\,dxdy - \left[\frac{1}{\pi}\int_{y=-b}^{y=b}\int_{x=-a\sqrt{1-a^2y^2}}^{x=a\sqrt{1-a^2y^2}} w(x,y)dxdy\right]^2 \qquad (ellipse)$$

$$V = \frac{1}{\pi}\int_{y=-\sqrt{\pi}/2}^{y=\sqrt{\pi}/2}\int_{x=-\sqrt{\pi}/2}^{x=\sqrt{\pi}/2}[w(x,y)]^2\,dxdy - \left[\frac{1}{\pi}\int_{y=-\sqrt{\pi}/2}^{y=\sqrt{\pi}/2}\int_{x=-\sqrt{\pi}/2}^{x=\sqrt{\pi}/2} w(x,y)dxdy\right]^2 \qquad (square)$$

$$V = \frac{1}{\pi}\int_{y=-1}^{y=1}\int_{x=-\frac{\pi}{4}(1-y)}^{x=\frac{\pi}{4}(1-y)}[w(x,y)]^2\,dxdy - \left[\frac{1}{\pi}\int_{y=-1}^{y=1}\int_{x=-\frac{\pi}{4}(1-y)}^{x=\frac{\pi}{4}(1-y)} w(x,y)dxdy\right]^2 \qquad (triangle)$$

وتجدر الإشارة إلى عد مساحة فتحات الإخراج الأربعة المستعملة في البحث كلها مساوية إلى (π) لتكون المقارنة موضوعية، حسب الشكل (1)، واعتمدت القيم(a=1.5 , b=0.5) بالنسبة الى الفتحة البيضوية التي مساحتها ($A=ab\pi$). فمثلاً عند إدخال الزيغ الكروي من المرتبة الثالثة والخامسة والخطأ البؤري، تكون معادلة الزيغ(4):

$$w(x,y) = w_{20}(x^2+y^2) + w_{40}(x^2+y^2)^2 + w_{60}(x^2+y^2)^3$$

وعند إجراء التكامل بالنسبة الى الفتحة الأولى (الدائرية) نحصل على المعادلة:

$$V = \frac{w_{20}^2}{12} + \frac{4w_{40}^2}{45} + \frac{9w_{60}^2}{112} + \frac{w_{20}w_{40}}{6} + \frac{3w_{20}w_{60}}{20} + \frac{w_{40}w_{60}}{6} \quad ...[3]$$

وبمقارنة المعادلة [3] مع المعادلة [2] نحصل على قيم المعاملات الخاصة بمعادلة التباين للفتحة الدائرية:

$$A_{22} = \frac{1}{12} \quad A_{44} = \frac{4}{45} \quad A_{66} = \frac{9}{112} \quad A_{24} = \frac{1}{6} \quad A_{26} = \frac{3}{20} \quad A_{46} = \frac{1}{6}$$

ولإيجاد القيمة الصغرى لمعادلة التباين تؤخذ المشتقة الجزئية لها وتساوى بالصفر، ففي حالة الخطأ البؤري مع الزيغ الكروي من المرتبة الثالثة $(w_{60} = 0)$:

$$\frac{\partial V}{\partial w_{20}} = 2A_{22}w_{20} + A_{24}w_{40} = 0$$

$$\frac{w_{20}}{w_{40}} = -\frac{A_{24}}{2A_{22}} \qquad ...[4]$$

وبتعويض قيم (A_{22}, A_{24}) في المعادلة (4):

$$w_{20} = -w_{40}$$

ويعوض هذا الشرط في معادلة [2] (باعتبار $w_{60} = 0$)، وبعد إدخال شرط(ستريل) ينتج:

$$V = (A_{22} + A_{44} - A_{24})w_{40}^2 \le \frac{\lambda^2}{180}$$

ومنه نحصل على قيم السماحية الخاصة بالزيغ الكروي من المرتبة الثالثة والخطأ البؤري للفتحة الدائرية:

$$w_{20} \le 1\lambda \qquad w_{40} \ge -1\lambda$$

أما عند إدخال الزيغ الكروي من المرتبة الخامسة، فتكون القيمة الصغرى للتباين عند الشرطين(5):

$$\frac{\partial V}{\partial w_{20}} = 2A_{22}w_{20} + A_{24}w_{40} + A_{26}w_{60} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial w_{40}} = A_{24}w_{20} + 2A_{44}w_{40} + A_{46}w_{60} = 0$$

وتحل المعادلتين أعلاه آنيا فتكون:

$$\frac{w_{20}}{w_{60}} = \frac{2A_{44}A_{26} - A_{24}A_{46}}{A_{24}^2 - 4A_{22}A_{44}}$$

$$\frac{w_{40}}{w_{60}} = \frac{2A_{22}A_{46} - A_{24}A_{26}}{A_{24}^2 - 4A_{22}A_{44}} \qquad ...[5]$$

وبتعويض قيم المعاملات في المعادلتين [5] ينتج:

$$\frac{w_{20}}{w_{60}} = \frac{3}{5} \quad , \quad \frac{w_{40}}{w_{60}} = -\frac{3}{2}$$

ويعوض الشرطان أعلاه في المعادلة[2] مع إدخال شرط (ستريل) نحصل على قيم التوازن الأمثل بالنسبة للنظام البصري ذي الفتحة الدائرية:

$$w_{20} \le 12/5\lambda \quad , \quad w_{40} \ge -6\lambda \quad , \quad w_{60} \le 4\lambda$$

أما بالنسبة الى الفتحات الأخرى فنتبع الأسلوب نفسه أعلاه لإيجاد قيم التوازن الأمثل الخاص بشكل الفتحة المستعملة في النظام البصري.

إن الهدف من هذا البحث هو مساعدة الباحث لمعرفة قيم التوازن الأمثل لمعاملات الزيغ الكروي من الدرجة الثالثة والخامسة والخطأ البؤري لأي فتحة في نظام بصري للحصول على أفضل صورة ممكنه بوجود هذا النوع من الزيغ .

النتائج والمناقشة

عند استعمال قيم التوازن الأمثل في معادلة دالة الانتشار النقطية لنظام بصري ذي فتحات مختلفة (دائرية، بيضوية، مربعة، مثلثة) نحصل على النتائج المبينة في الجدول (1) والجدول (2) اللذان يشيران إلى أفضلية قيم التوازن الأمثل الخاصة بالفتحة المثلثة عن سواها من الفتحات بالنسبة الى الشدة المركزية.

أما توزيع الشدة في مستوى الصورة بوجود قيم التوازن الأمثل(الزيغ الكروي من المرتبة الثالثة والخطأ البؤري)

أي $(w_{60}=0)$ [كما في الشكل (2)]، وبوجود الزيغ الكروي من المرتبة الثالثة والخامسة والخطأ البؤري،

أي $(w_{60}\neq 0)$ [كما في الشكل (3)] فيبين أن نصف قطر نمط توزيع الشدة يكون اصغر للفتحة البيضوية، ومن هذا نستنتج أن للفتحة البيضوية قدرة تحليل أفضل من غيرها وتمتلك حدة أفضل للصورة.وهذا ما يرجح كفة استعمال الفتحة البيضوية في الأنظمة البصرية التي تدرس صور الأجسام الصغيرة أو الأجسام البعيدة والمتقاربة (مثل الميكروسكوب والتلسكوب) شرط وجود أنواع الزيغ آنفة الذكر في النظام البصري.

المصادر

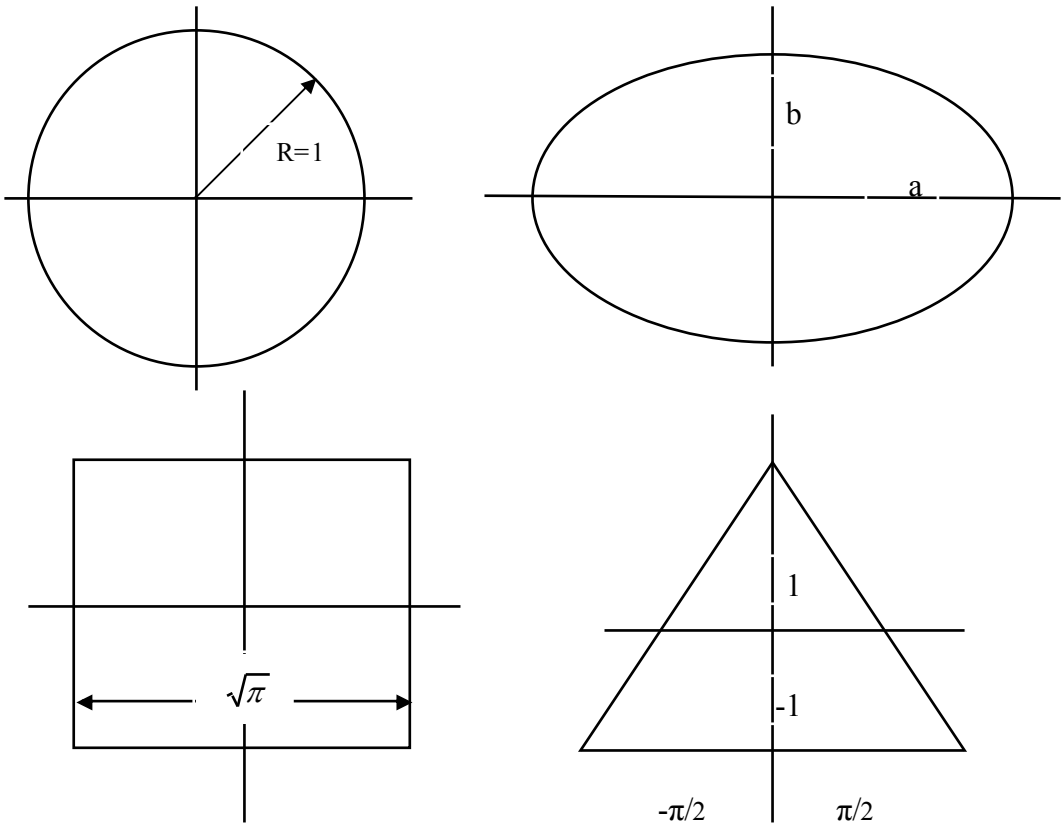
1. Marechal,A. (1947). Rev. Opt. 26:257-260
2. Strehl,K. (1964). Theoric de Fohrehrs. 15(4):115-118
3.Al-Qazzaz. H. H. (1998). (Studying of line spread function in circular aperture) M.sc. Thesis. (Baghdad University).
4.Al-Jizany. A. B. (2001). (studying and evaluation of image intensity and aberrations effectiveness for triangle object) M.sc. Thesis. (Baghdad University).
5. Ojeda,J. (1988). Applied Optics.27(3):140-144.

الجدول (1): قيم التوازن الأمثل بوجود الخطأ البؤري والزيغ الكروي من المرتبة الثالثة $(w_{60}=0)$ وما يناظرها من الشدة المركزية لنظام بصري ذي فتحات مختلفة

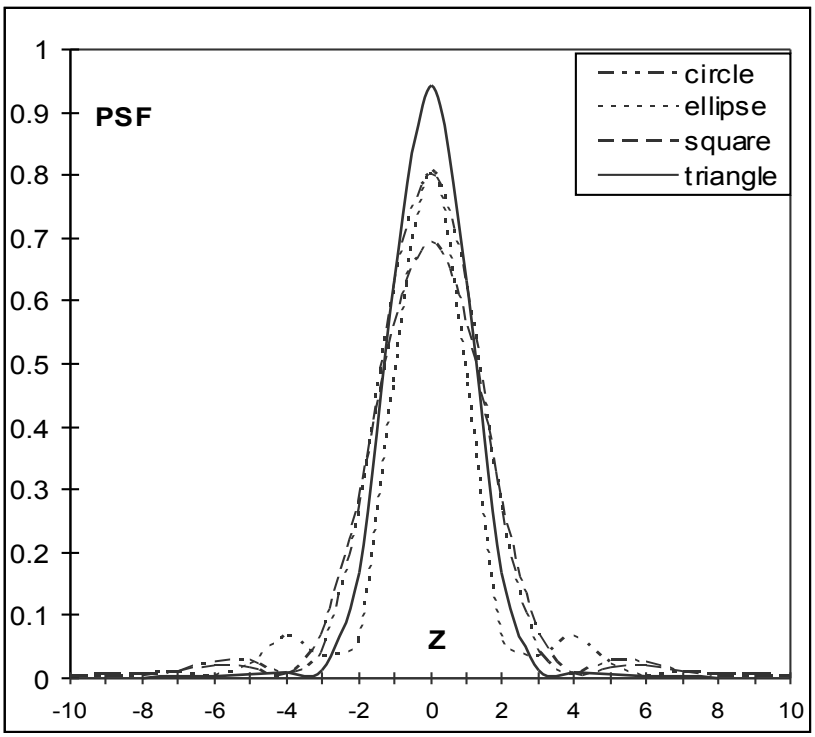
aperture	w20	w40	PSF
circle	-1	1	0.8004
ellipse	-0.4526	0.2479	0.8074
square	-0.57	0.69	0.6927
triangle	-0.1666	0.0707	0.9429

الجدول (2) قيم التوازن الأمثل بوجود الخطأ البؤري والزيغ الكروي من المرتبة الثالثة والخامسة $(w_{60}\neq 0)$ وما يناظرها من الشدة المركزية لنظام بصري ذي فتحات مختلفة

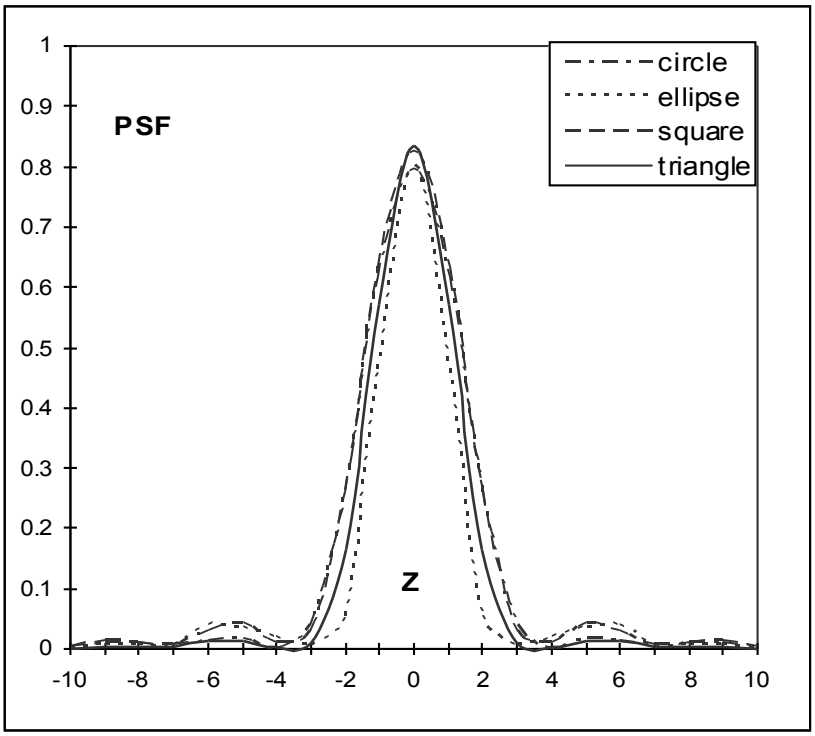
aperture	w20	w40	w60	PSF
circle	2.4	-6	4	0.7958
ellipse	0.9764	-1.3002	0.4422	0.8035
square	1.55	-2.98	1.51	0.8245
triangle	0.6341	-0.6391	0.1586	0.834



الشكل (1) فتحات الإخراج المستعملة في النظام البصري



الشكل (2) توزيع الشدة في مستوى الصورة لدالة الانتشار النقطية لنظام بصري ذي فتحات مختلفة بوجود الخطأ البؤري والزيغ الكروي من الدرجة الثالثة فقط $(w_{60} = 0)$



الشكل(3) توزيع الشدة في مستوى الصورة لدالة الانتشار النقطية لنظام بصري ذي فتحات مختلفة بوجود الخطأ البؤري والزيغ الكروي من الدرجة الثالثة والخامسة $(w_{60} \neq 0)$

Comparison of Optimum Balance Values For Different Coefficients of Spherical Aberration of Optical System Including Different Apertures

Al. Badr Hassan, H. Mumtaz Ali, R. Faisal Rabee
Department of Physics ,College of Education Ibn Al-Haitham,
University of Baghdad

Abstract

The optimum balance values for different coefficient of spherical aberration (third and fifth degree also focal shift) were studied, the optical system includes different apertures (circle, ellipse, square and triangle) using point spread function (PSF).

By using (Marechal) method; the minimum value of mean square of variance in wave front was founded, so we can get the maximum of central intensity according to (Strehl) criterion.