دراسة توزيع الشدة لصورة جسم بيضوي الشكل
(دالة انتشار الجسم البيضوي)

علاء بدر حسن
قسم الفيزياء ، كلية التربية – ابن الهيثم ،جامعة بغداد

الخلاصة

في هذا البحث، صيغت معادلة جديدة لدالة توزيع الشدة في مستوى الصورة لجسم بيضوي الشكل (دالة انتشار الشكل البيضوي) باستخدام نظام بصري ذي فتحة دائرية الشكل. تم استخدام طريقة (كاوس) للتكامل العددي (1) في حساب تكامل المعادلة الخاصة. اعتمدت المنحنيات البيانية لتوزيع شدة الصورة لنظام بصري مثالي (خالي من الزيغ) ولنظام يحتوي على الخطأ البؤري، وكذلك توزيع الشدة في المستوى البؤري (العمق البؤري) (2).

النظرية

لمعرفة كفاية أي نظام بصري ينبغي تقييم جودة الصورة الناتجة منه، وفي حالة دراسة الصورة الناتجة يكون من الضروري اختيار الجسم المناسب. في هذا البحث اختيرت الجسم البيضوي لشيوع هكذا أجسام في التطبيقات الفلكية (المجرات البيضوية) والمجهرية (بعض أنواع الأحياء المجهرية والخلايا). إن دراسة توزيع شدة الصورة للجسم البيضوي (دالة انتشار الجسم البيضوي) بوصفه جسما ممتدا (غير نقطي) يعطينا تقييما جيدا لكفاية النظام البصري في حالة وجود الخطأ البؤري والزيغ بكل أنواعه.

تم في هذا البحث اشتقاق صيغة خاصة للجسم البيضوي لوصف توزيع شدة الصورة في مستوى الصورة لنظام بصري ذي فتحة دائرية الشكل (فتحة بؤبؤ الإخراج) بوصفه إن الفتحة الدائرية تعطي غالبا صورة جيدة وكذلك لها قدرة تحليل عالية.

إن الجسم البيضوي الذي له محاور أساسية معينة (A,B) هو جسم ذو بعدين يحتوي على مصادر نقطية غير محدودة ذي إضاءة غير متشاكهة (3)، فبأخذ التكامل ذي البعدين لدالة الانتشار النقطية وضربها بدالة شدة الجسم البيضوي، تنتج معادلة توزيع الشدة لصورة الجسم البيضوي (دالة انتشار الجسم البيضوي) (4):

$$E(z',m') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(z,m).G(z'-z,m'-m)\,dzdm \qquad [1]$$

واذ (z,m)،(z´,m´) هي الإحداثيات عديمة البعد في مستوى الجسم والصورة على التوالي، وتعطى بالعلاقات آلاتية:

$$z = 2\pi u \quad , \quad m = 2\pi v \quad , \quad z' = 2\pi u' \quad , \quad m' = 2\pi v'$$

E(z,m) هي شدة إضاءة الجسم البيضوي.

G(z´-z,m´-m) هي دالة الانتشار النقطية الناتجة من مصدر نقطي واحد في موقع (z,m) من مستوي الجسم، وتعطى بالعلاقة الآتية (5):

$$G(u',v') = |F(u',v')|^2 \qquad [2]$$

واذ F(u´,v´) هي القيمة المعقدة للشدة في مستوى الصورة، وتساوي:

$$F(u',v') = \int_y \int_x f(x,y).e^{2\pi i(u'x+v'y)}dxdy \qquad [3]$$

واذ f(x,y) هي دالة البؤبؤ، (x,y) هي إحداثياته، وتساوي الدالة للفتحة الدائرية ذات نصف قطر (R=1) (6):

$$f(x,y) = e^{ikw(x,y)} \quad for \quad x^2 + y^2 \le 1$$
$$f(x,y) = 0 \quad for \quad x^2 + y^2 > 1$$

واذ w(x,y) هي دالة الزيغ الموجود في النظام البصري. $k=2\pi/\lambda$، λ هو الطول الموجي لضوء المصدر المستخدم.
بتعويض المعادلة [3] في المعادلة [2] وإدخال الإحداثيات عديمة البعد، نحصل على:

$$G(z',m') = \int_y \int_{y_1} \int_x \int_{x_1} f(x,y)e^{i(z'x+m'y)} f^*(x_1,y_1)e^{-i(z'x_1+m'y_1)}dx_1dxdy_1dy \qquad [4]$$

اذ $f^*(x_1,y_1)$ هو المرافق المعقد لدالة البؤبؤ، (x_1,y_1) هي إحداثياته، ويساوي:

$$f^*(x_1,y_1) = e^{-ikw(x_1+y_1)}$$

يمكن كتابة المعادلة [4] بالشكل:

$$G(z'-z,m'-m) = \int_y \int_{y_1} \int_x \int_{x_1} f(x,y)f^*(x_1,y_1)e^{i(z'-z)(x-x_1)}e^{i(m'-m)(y-y_1)}dx_1dxdy_1dy \qquad [5]$$

نعوض المعادلة [5] في [1] :

$$\text{إن} E(z',m') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_y \int_{y_1} \int_x \int_{x_1} f(x,y)f^*(x_1,y_1)e^{i(z'-z)(x-x_1)}e^{i(m'-m)(y-y_1)}E(z,m)dx_1dxdy_1dydzdm \qquad [6]$$

شدة ضوء الجسم البيضوي تساوي:

$$E(z,m) = 1 \quad for \quad \left\{\begin{matrix} |z| & or & |m| \le A \\ |z| & or & |m| \le B \end{matrix}\right\}$$
$$E(z,m) = 0 \quad for \quad \left\{\begin{matrix} |z| & or & |m| > A \\ |z| & or & |m| > B \end{matrix}\right\}$$

اذ(A,B) هما المحاور الأساسية للجسم البيضوي، لذا تصبح المعادلة [6] :

$$\text{إن} E(z',m') = \int_y \int_{y_1} \int_x \int_{x_1} f(x,y)f^*(x_1,y_1)e^{iz'(x-x_1)}e^{im'(y-y_1)}dx_1dxdy_1dy\int_{-A}^{A}e^{-iz(x-x_1)}dz\int_{-B}^{B}e^{-im(y-y_1)}dm \qquad [7]$$

التكاملين الأخيران في المعادلة أعلاه تساوي :

$$\int_{-A}^{A}e^{-iz(x-x_1)}dz = \frac{\sin[(x-x_1)A]}{(x-x_1)}$$

$$\int_{-B}^{B}e^{-im(y-y_1)}dm = \frac{\sin[(y-y_1)B]}{(y-y_1)}$$

بما إن توزيع الشدة على مستوى الصورة متناظر، فلذلك ممكن اخذ إحداثي واحد(ź) يفي بغرض الدراسة بوصف الاحداثي الآخر (ḿ) يساوي صفر. فتصبح المعادلة [7] بالشكل:

$$E(z') = N\int_{y}\int_{y_1}\int_{x}\int_{x_1} f(x,y)f(x_1,y_1)e^{iz'(x-x_1)}\frac{\sin[(x-x_1)A]}{(x-x_1)}\frac{\sin[(y-y_1)B]}{(y-y_1)}dx_1dxdy_1dy \quad [8]$$

اذ (N) هو عامل المعايرة الذي يجعل الشدة تساوي (1) عند (ź=0)، أي (E(0)=1)، والعامل (N) تتغير قيمته مع قيم (A, B).

بتعويض قيم الدوال (f, f^*) في المعادلة [8]، ينتج:

$$E(z') = N\int_{y}\int_{y_1}\int_{x}\int_{x_1} e^{iz'(x-x_1)+ikw(x,y)-ikw(x_1,y_1)}\frac{\sin[(x-x_1)A]}{(x-x_1)}\frac{\sin[(y-y_1)B]}{(y-y_1)}dx_1dxdy_1dy$$

$$e^{iz'(x-x_1)+ikw(x,y)-ikw(x_1,y_1)} = \cos[z'(x-x_1)+kw(x,y)-kw(x_1,y_1)]+i\sin[z'(x-x_1)+kw(x,y)-kw(x_1,y_1)]$$

بما إن الشدة حقيقية، فالجزء الخيالي من المعادلة أعلاه يجب أن يساوي صفر.

وبعد اخذ حدود التكامل لفتحة البؤبؤ الدائرية، تصبح معادلة دالة انتشار الشكل البيضوي بالصورة النهائية:

$$E(z') = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\cos\{k[w(x,y)-w(x_1,y_1)]+z'(x-x_1)\}\frac{\sin[(x-x_1)A]}{(x-x_1)}\frac{\sin[(y-y_1)B]}{(y-y_1)}dx_1dxdy_1dy \quad [9]$$

الحسابات

تم تصميم برنامج حاسوبي بلغة (quick basic) لحساب المعادلة (9) لنظام ذي فتحة دائرية ولجسم بيضوي ذي إضاءة غير متشاكهة، وحلّت المعادلة بطريقة (كاوس) للتكامل العددي لحدود التكاملات الأربعة بأخذ عشرين نقطة لكل من الإحداثيات (y, y_1, x, x_1) ، للحصول على القيم المعيرة لدالة انتشار الجسم البيضوي.

بعد الحصول على قيمة عامل المعايرة لكل قيمة من (A,B) يمكن الحصول على دالة انتشار الجسم البيضوي لقيم مختلفة من الاحداثي المختزل (ź) لنظام مثالي (الشكل(1,2)).

أما عند وجود الخطأ البؤري للنظام البصري (الشكل(3,4)) فيحصل تغير في نمط توزيع الشدة في مستوى الصورة، ولحصول ذلك تؤخذ دالة الزيغ بنظر الاعتبار بالشكل:

$$w(x,y) = w_{20}(x^2+y^2)$$
$$w(x_1,y_1) = w_{20}(x_1^2+y_1^2)$$

اذ (w_{20}) هو عامل الخطأ البؤري، ولتوضيح مقدار العمق البؤري في مستوى المحور الأساسي للنظام البصري تكون قيمة (ź=0)، بينما تؤخذ الشدة المعيرة لقيم مختلفة من عامل الخطأ البؤري (w_{20}) (الشكل (5,6)).

المناقشة

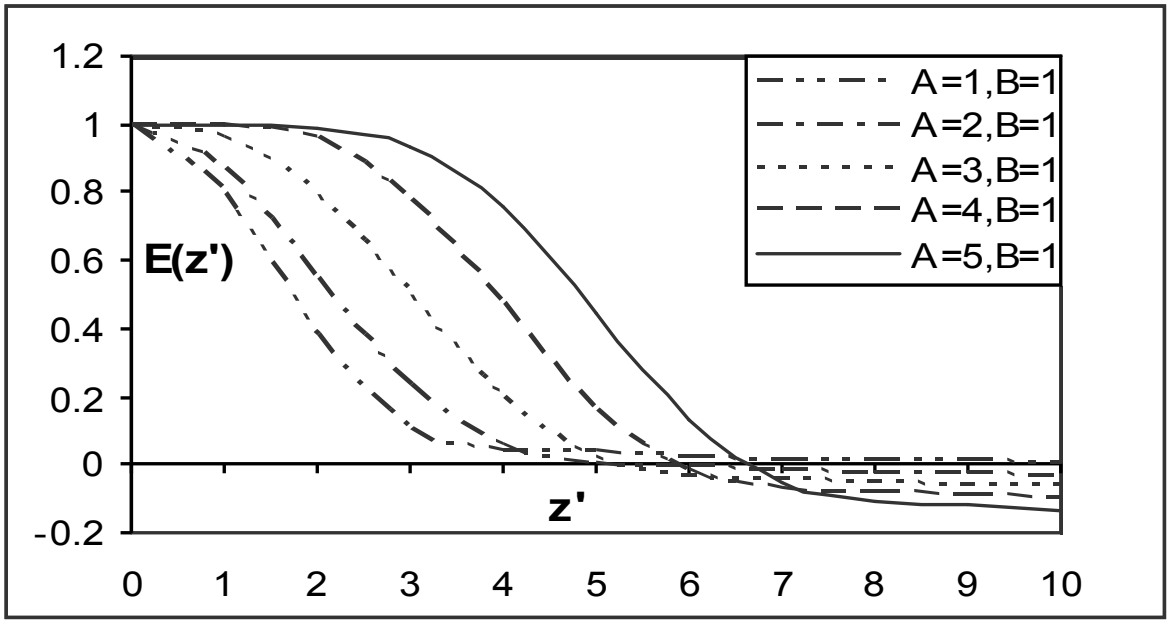
يوضح الشكلان(2,1) تغير نمط توزيع الشدة المعيرة مع تغير قيمة المحورين الأساسيين للجسم البيضوي (A,B) (أي تغير تفلطح الجسم البيضوي)، اذ تبقى قيمة الشدة المركزية مساوية للواحد بسبب عامل المعايرة، فنلاحظ زيادة شدة الصورة في المنطقة القريبة من المركز كلما ازداد تفلطح الشكل البيضوي، بينما تزداد حدة الصورة مع نقصان التفلطح وصولاً إلى شكل القرص (A=B) .

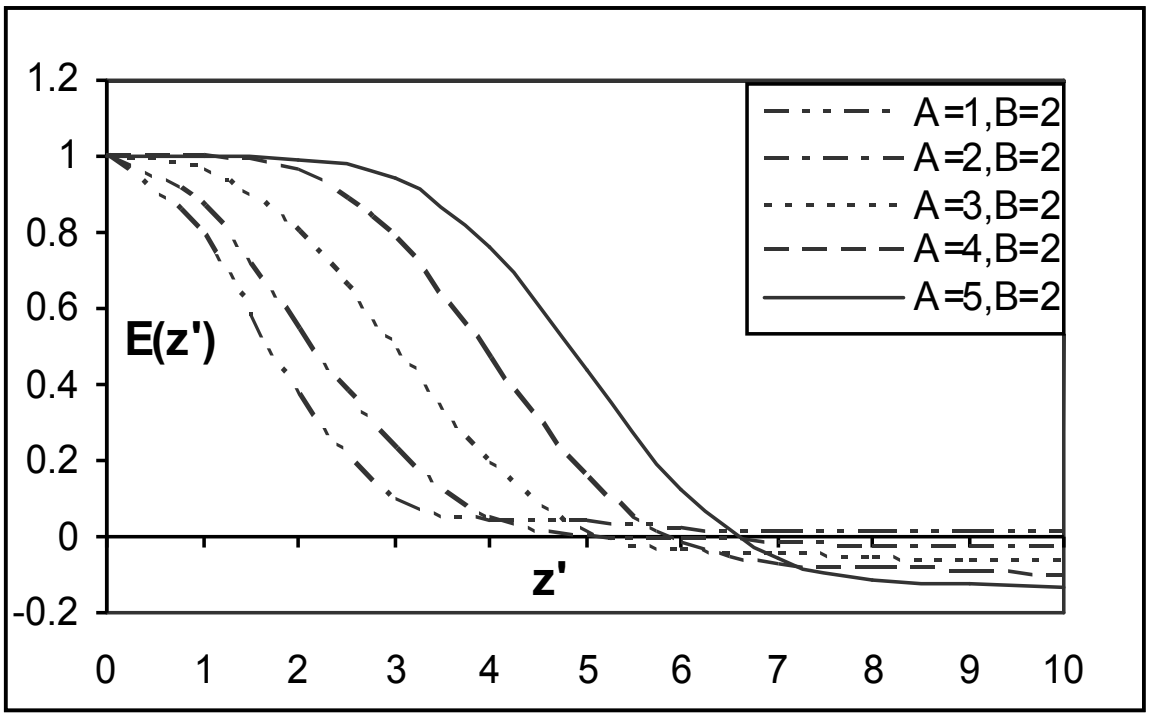
يوضح الشكلان (4,3) توزيع الشدة المعيرة بوجود الخطأ البؤري $(w_{20} = 0.5\lambda)$ لقيم مختلفة من(A,B)، اذ نلاحظ انحطاط الشدة بنقصان تفلطح الجسم البيضوي، وكذلك تغير ميل المنحنيات بالنسبة الى مثيلاتها في الشكلين(2,1)، أي هناك تغير في توزيع الشدة مع وجود الخطأ البؤري.

أما الشكلين (6,5) فيوضحان العمق البؤري للنظام البصري الذي يظهر عدم تغير العمق البؤري بصورة كبيرة مع تغير تفلطح الشكل البيضوي.

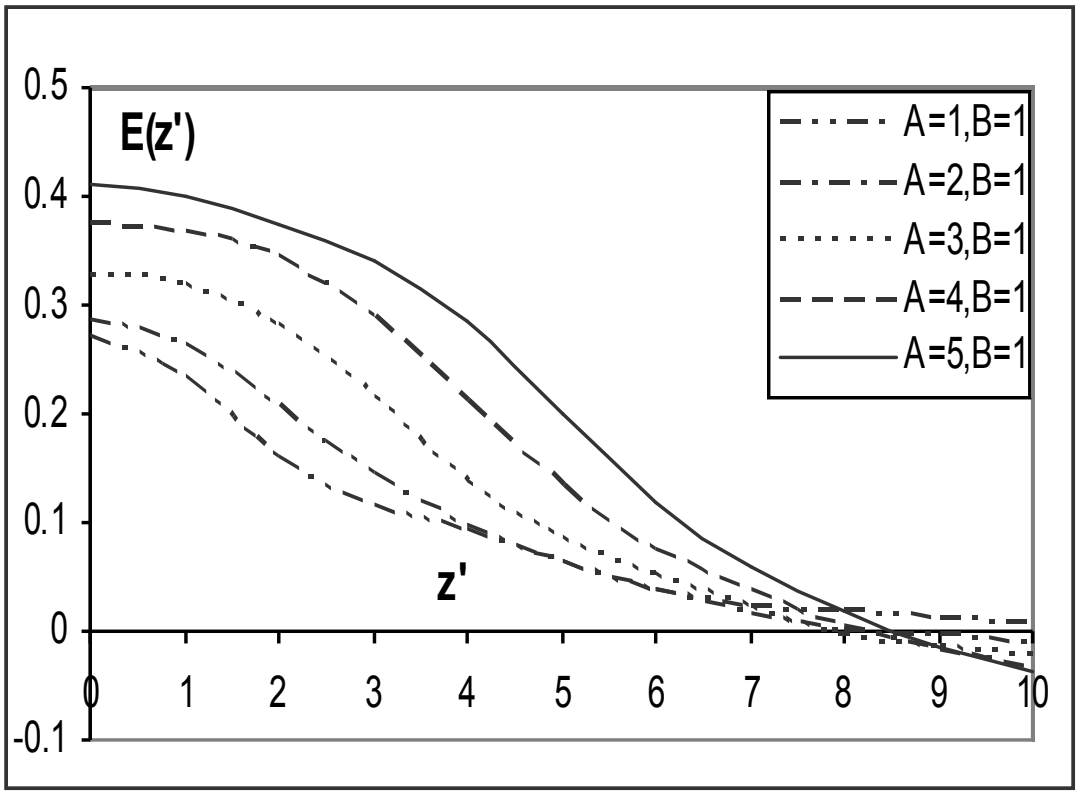
المصادر

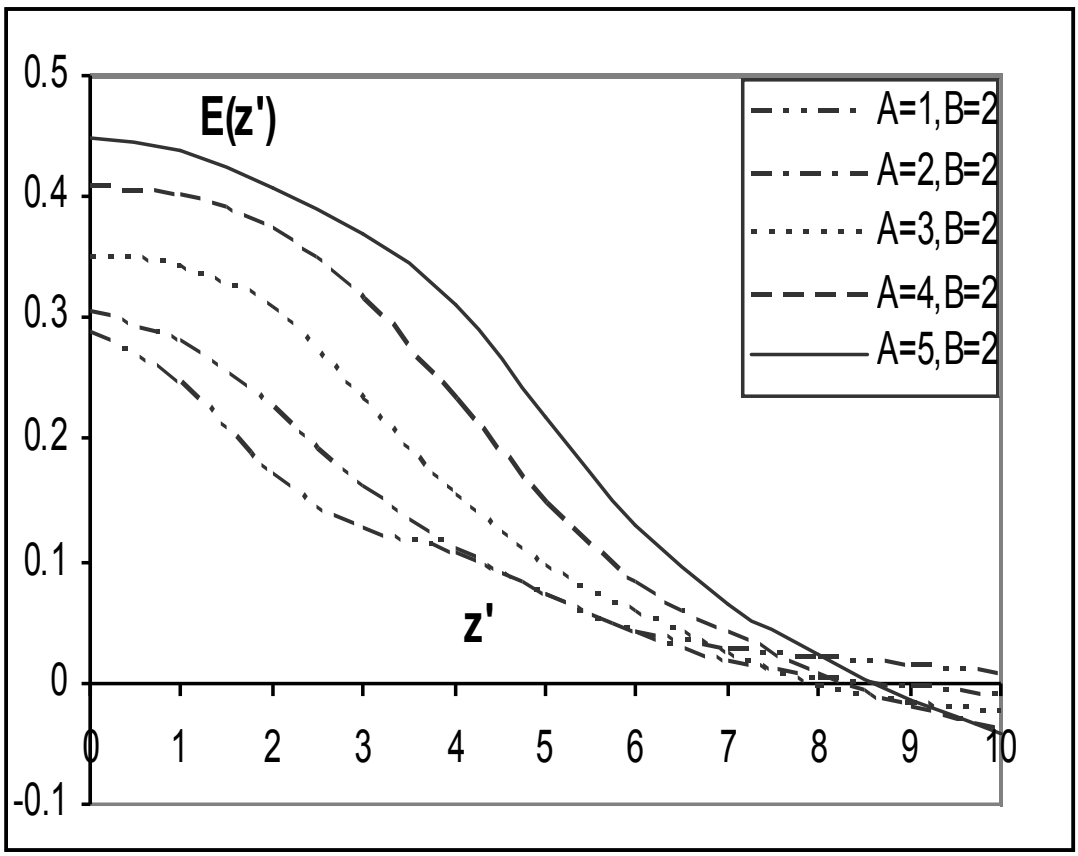
1. Gerald, Patrick, O.(1989).Applied Numerical Analysis,4th-Edition,(Addison- Wesley publishing company).
2. Al-Jizany, A. B. (2001). (Studying and evaluation of image intensity and aberrations effectiveness for triangle object). Msc. Thesis (Baghdad University).
3. Karam, G. S. (2001). (Calculating of total illuminance in image of point object). Ph.D. Thesis (Mustansirya University).
4. Ahmed, Q. K. and Amin, H. M. (1989).Journal of modern optics. 36(2): 271-277.
5. Al-Qazzaz, H. H. (1998). (Studying of line spread function in circular aperture). Msc. Thesis (Baghdad University).
6. Hecht, E. (2000). Optics, 1st-Edition, 288-294.



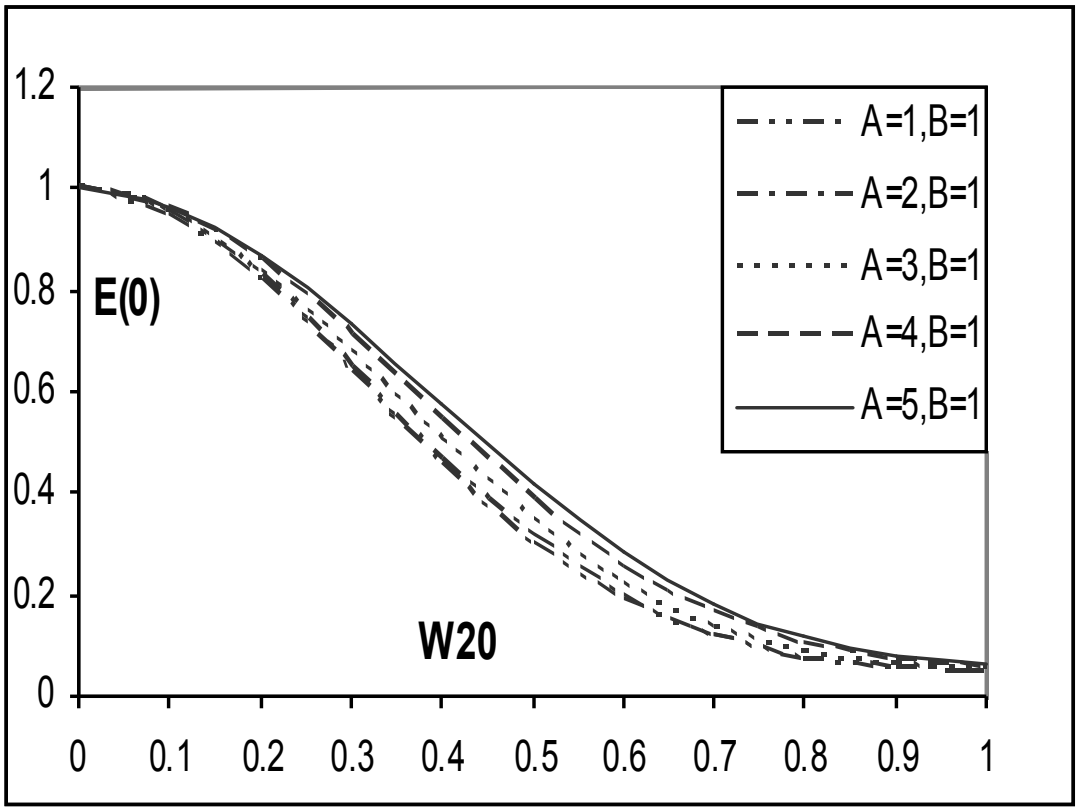


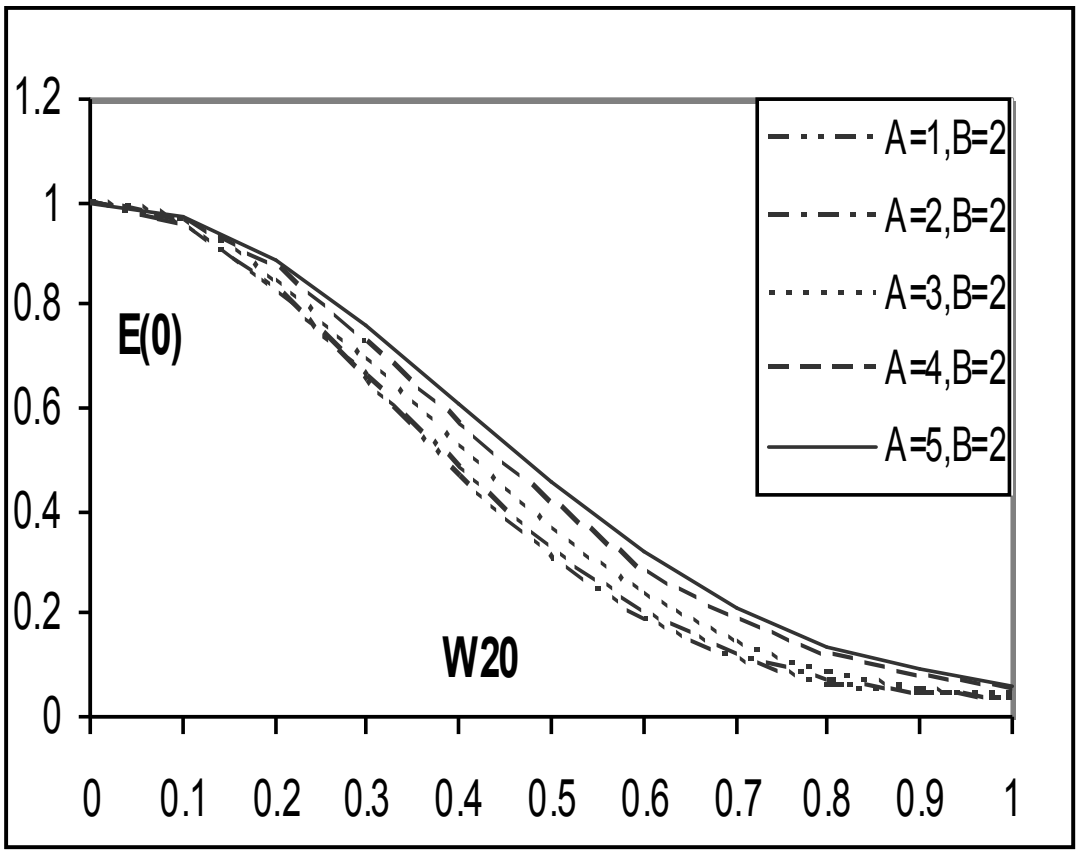
الشكلان (2,1) يوضحان توزيع الشدة المعيرة في مستوى الصورة(للنظام المثالي) لدالة انتشار الشكل البيضوي لقيم مختلفة من (A,B).





الـشكلان (4,3) يوضـحان توزيـع الـشدة المعيـرة فـي مـستوى الـصورة لنظـام بـصري يحتـوي علـى الخطـأ البؤري($W20=0.5\lambda$) لدالة انتشار الشكل البيضوي لقيم مختلفة من (A,B).





الشكلان(6,5) يوضحان العمق البؤري للشدة المركزية المعيرة لدالة انتشار الشكل البيضوي لقيم مختلفة من عامل الخطأ البؤري (W20).

Studying Of Image Intensity Distribution Of Elliptical Object (Elliptical Spread Function)

A. B. Hasan Al-Jizany
Department of Physics, College of Education Ibn Al- Haitham
University of Baghdad

Abstract

In this work, a new formula of intensity distribution in image plane of elliptical object was founded (Elliptical spread function), by using optical system including circular aperture. The Gauss quadrature method of numerical integral was used for calculating equation's integrals. Curves are shown for system having focal error and intensity distribution in focal axis.