AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

مقارنة بين طريقة انحدار الحرف البيزية وطريقة $(Kibria - Lukman)$ لتقدير معالم انموذج انحدار كاما في ظل وجود مشكلة تعدد خطي

عقيل حميد فرحان[1]
أ .د محمد صادق عبد الرزاق[2]

Aqeel_hameed@ymail.com
dr_aldouri@coadec.uobaghdad.edu.iq

المستخلص :

في هذا البحث، يتم التركيز على استعمال النهج البايزي في تقدير معالم نموذج الانحدار الكاما؛ وذلك في ظل وجود مشكلة التعدد الخطي. يُعرف أن النهج البايزي ليس من بين الأساليب التي تتعامل بشكل مباشر مع مشكلة التعدد الخطي. لذا، في هذا البحث، تم استعمال بعض الطرق المتبعة لتقدير المعالم عند وجود هذه المشكلة، مثل طريقة انحدار الحرف التي تم دمجها مع النهج البايزي. كما تم مقارنة هذه الطريقة بطرق معدلة لطريقة انحدار الحرف مثل طريقة (Kibria-Lukman). تم ذلك من خلال استعمال طريقة المحاكاة بناءً على عينات متفاوتة الحجم؛ فضلاً على استعمال طريقة المقارنة بين متوسط مربعات الخطأ.

الكلمات المفتاحية :(كاما ، بيز ، المحاكاة ، انحدار الحرف، Kibria ، Lukman)

Abstract:

In this study، the focus will be on using Bayesian approach to estimate parameters of the Gamma regression model، considering the issue of multicollinearity. It is known that the Bayesian approach is not among the methods that directly handle multicollinearity. Therefore، in this research، some common techniques were employed to estimate parameters when dealing with this issue، such as ridge regression method integrated with the Bayesian approach. Additionally، this method was compared with modified approaches to ridge regression like the Kibria-Lukman method. This was done using simulation method based on varied sample sizes، along with comparing mean squared error methods.

1- المقدمة

تحليل الانحدار هو أحد أهم الأدوات لبناء نموذج يمثل الظواهر المدروسة من خلال فهم العلاقة بين المتغيرات. في هذا السياق، يعدُّ أحد المتغيرات تابعًا (معتمدًا)، بينما تكون المتغيرات الأخرى تفسيرية. يقوم النموذج بربط هذه المتغيرات بمعادلة رياضية، ومن ثم يتم تقدير معالم النموذج، مما يتيح التنبؤ بالظاهرة المدروسة. لاستعمال هذا النموذج، يجب التحقق من شروط وفروض طريقة المربعات الصغرى المستخدمة في تقدير معالم النموذج. إذا كان المتغير المعتمد (Yi)يتبع توزيع كاما، فإنه يتم استعمال دوال ربط لتقدير معالم النموذج من خلال تركيبة خطية وفقًا لدوال الربط المفترضة. تواجه هذه النماذج عدة مشاكل، كما هو الحال في النماذج الاعتيادية، ومن أهم هذه المشاكل مشكلة التعدد الخطي[2][3]، التي تعدُّ من العوامل التي تؤثر على التقديرات.

2- مشكلة البحث

يعد نموذج انحدار كاما أحد النماذج المعممة حيث يتبع المتغير التابع توزيع كاما ذو معلمتين. المعلمة الأولى هي معلمة المتوسط M_i التي تتشكل من تركيبة خطية باستعمال دالة ربط معينة، وتشمل المتغيرات المستقلة ومعالم النموذج. المعلمة الثانية هي معلمة الشكل $\emptyset$ التي تتكون أيضًا من تركيبة خطية تتضمن معالم النموذج والمتغيرات التوضيحية. على الرغم من وجود دراسات متعددة تناولت نماذج انحدار كاما واقترحت طرقًا متنوعة لتقدير معالمه، إلا أن هذه النماذج تواجه بعض التحديات، ومن أبرزها مشكلة التعدد الخطي التي تؤثر بشكل ملحوظ على تقديرات نماذج انحدار كاما.

3- هدف البحث

يهدف هذا البحث إلى تقدير معالم نموذج انحدار كاما في ظل وجود مشكلة تعدد خطي. يتم استعمال أسلوب بيزي في تقدير معالم هذا النموذج، مع توظيف طريقة انحدار الحرف ضمن الأسلوب البيزي. كما تتم مقارنة هذه الطريقة مع طريقة (Kibria-Lukman) التي تستعمل أيضاً في تقدير نموذج انحدار كاما في ظل وجود مشكلة تعدد خطي، وذلك من خلال تجارب المحاكاة واستعمال أسلوب متوسط مربعات الخطأ للمقارنة بين الطريقتين.

4- أنموذج انحدار كاما:

يُعد نموذج انحدار كاما واحدًا من النماذج المعممة (GLM) التي اقترحها(Nelder & Wedderburn ، 1972) اذ تعد هذا النموذج امتدادًا للنموذج الخطي العام، ويشترط أن يكون توزيع متغير الاستجابة ضمن العائلة الأسية. يمكن كتابة دالة توزيع كاما كالآتي:

$$f(y،\alpha،\lambda) = \frac{1}{\Gamma_\alpha \lambda^\alpha} Y^{\alpha-1} e^{-\frac{Y}{\lambda}} \qquad Y،\alpha،\beta > 0 \qquad (1)$$

حيث ان α تمثل معلمة الشكل و λ تمثل معلمة القياس، ويمكن، إعادة صياغة دالة توزيع كاما وجعلها بدلالة معلمة المتوسط ومعلمة الشكل، وكما يأتي:

$$E(Y) = M = \alpha\lambda$$

نفترض أن يمكن لمعلمة الشكل أن تُكتب بهذا الشكل.[9]

$$\emptyset = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{1}{\emptyset}$$

معلمة Ø تمثل معلمة الشكل أو التشتت. يمكن استبدال معلمة α بقيمتها في دالة المتوسط للحصول على المعلمة λ كما يأتي:

$$\mathrm{M} = \frac{1}{\emptyset} * \lambda$$

$$\lambda = \mathrm{M} * \emptyset$$

بالطبع يمكننا ،إعادة صياغة دالة توزيع كاما بدلالة المعلمتين الجديدتين كما يأتي:

$$\mathrm{f}(\mathrm{y}،\emptyset،\mathrm{M}) = \frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{\emptyset}}(M\emptyset)^{\frac{1}{\emptyset}}} Y^{\frac{1}{\emptyset}-1} e^{-\frac{Y}{M\emptyset}} \qquad \mathrm{Y} \geq 0 \qquad (2)$$

بعد ، إعادة صياغة الدالة الاحتمالية للتوزيع، يمكننا القول بأن التوزيع ينتمي إلى العائلة الاسية بالشكل الآتي:

$$f(y،\theta،\emptyset) = \exp(\frac{Y\theta - b(\theta)}{\alpha(\emptyset)} + c(y،\emptyset)) \qquad (3)$$

إذ إن :

y: متغير الاستجابة الذي ينتمي للعائلة الاسية

θ: تمثل معلمة الموقع Location Parameter أو المعلمة القانونية Canonical Parameter

Ø: تمثل معلمة التشتت (Dispersion Paeameter) أو معلمة الشكل والتي تظهر في التوزيعات التي تحتوي على معلمتين أو اكثر .

$\alpha(\emptyset)$: دالة بدلالة معلمت التشتتØ .

$b(\theta)$:دالة بدلالة المعلمة القانونية أو معلمة الموقع.

$c(y،\emptyset)$: دالة بدلالة المشاهدات ومعلمة التشتت Ø.

ويمكن ،إعادة كتابة دالة توزيع كاما (2) وفق دالة العائلة الاسية (3) وكما يأتي :

$$f(Y،\theta\emptyset،) = \exp\left[\frac{\frac{Y}{M} - (-\ln(\theta))}{-\emptyset} + \frac{1-\emptyset}{\emptyset}\ln(Y) - \frac{\ln(\emptyset)}{\emptyset} - ln\Gamma\left(\frac{1}{\emptyset}\right)\right] \qquad (4)$$

إذ إن :

$$\theta = \frac{1}{M}\ ،b(\theta) = -\ln(M)\ ،\alpha(\emptyset) = -\emptyset،c(y،\emptyset) = \frac{1-\emptyset}{\emptyset}\ln(Y) - \frac{\ln(\emptyset)}{\emptyset} - ln\Gamma\left(\frac{1}{\emptyset}\right)$$

وان التوقع والتباين لتوزيع كاما وفقاً العائلة الاسية يمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$E(Y) = \frac{\partial b(\theta)}{\partial\theta} = b'(\theta) = M$$

$$\mathrm{var(Y)} = \frac{\partial^2 b(\theta)}{\partial\theta^2}\alpha(\emptyset) = b^{"}(\theta)\alpha(\emptyset) = \emptyset M$$

نظرًا لتوزيع كاما يعدُّ جزءًا من عائلة التوزيعات الاسية، يُستخدم الدوال الربط لتحويل هذا التوزيع إلى نموذج انحدار. يتم ذلك عن طريق تعديل معلمة الموقع التي تُمثل المتوسط. وبالرغم من أن معلمة الشكل غالبًا ما تعدُّ ثابتة في الأبحاث، فإن هذه الدراسة تفترض أنها متغيرة. لذا، تُقدر بشكل مماثل لمعلمة الموقع. يتم استعمال دالتين ربط: الأولى تكون دالة ربط الاسية لمعلمة المتوسط، والثانية دالة ربط طبيعية لمعلمة التشتت أو الشكل.

$$\eta_{1i} = g(M_i) = e^{X'\beta} \qquad (5)$$

$$\eta_{2i} = h(\emptyset_i) = Z'\gamma \qquad (6)$$

$(\beta_0،\beta_1، \dots \dots ،\beta_p)،(\gamma_0،\gamma_1، \dots \dots .،\gamma_0)$: هي متجهات معلمات الانحدار المتعلقة بالمتوسط و التشتت.

$g(M_i)$: دالة الربط للمتوسط (دالة ربط اسية).

$h(\emptyset_i)$:دالة ربط للشكل أو التشتت(دالة ربط طبيعية).

$\eta_{1i}،\eta_{2i}$: التنبؤات (التركيبات) الخطية.

$X_i = (X_{i1}،X_{i2}، \dots \dots .،X_{ip})'$: متجهة ل P من المتغيرات المستقلة .

$Z_i = (Z_{i1}،X_{i2}، \dots \dots .،Z_{iK})'$:متجهة ل K من المتغيرات المستقلة.

وبالعودة إلى دالة توزيع كاما *(2)* يمكن ، إعادة كتابتها بدلالة دوال الربط لتحويلها إلى انموذج انحدار كأما، وكما يأتي :

$$f(y،X،\gamma،\beta) = \frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{Z'\gamma}}\left(e^{X'\beta}Z'\gamma\right)^{\frac{1}{Z'\gamma}}} . Y^{\left(\frac{1}{Z'\gamma}-1\right)} \quad e^{-\frac{Yi}{Z'\gamma e^{X'\beta}}} \tag{7}$$

ويمكن تبسيطها المعادلة أعلاه، يمكن الحصول على صيغة الآتية :

$$f(y،X،\gamma،\beta) = \frac{e^{\left[\left(-\frac{1}{Z'\gamma}\right)\log(Z'\gamma)\right]}}{\Gamma_{\frac{1}{Z'\gamma}}} \; Y^{\left(\frac{1}{Z'\gamma}-1\right)} \; . \; e^{-\frac{1}{Z'\gamma}\left[Yi\, e^{-X'\beta}+X'\beta\right]} \tag{8}$$

تعدُّ المعادلة(8) الشكل النهائي بعد دمج توزيع كاما مع أنموذج انحدار خطي ليتكون لدينا أنموذج انحدار كأما. ، وبتعظيم دالة اعلاه للحصول على دالة الامكان الاعظم :

$$L(y،X،\gamma،\beta) = \left(\frac{e^{\left[\left(-\frac{1}{Z'\gamma}\right)\log(Z'\gamma)\right]}}{\Gamma_{\frac{1}{Z'\gamma}}}\right)^{n} \pi_{i=1}^{n} \, Y^{\left(\frac{1}{Z'\gamma}-1\right)} \; . \; e^{-\frac{1}{Z'\gamma}\,\Sigma\left[Yi\, e^{-X'\beta}+X'\beta\right]} \tag{9}$$

5- تقديرات معلمات أنموذج انحدار كأما

تنقسم تقديرات معالم نموذج انحدار كاما إلى قسمين. يتمثل القسم الأول في تقدير معالم النموذج باستعمال مقدرات بيز وتقنيةRidge ، التي توظف لحل مشكلة التعدد في تقدير معالم نموذج انحدار كأما. بينما يتمثل القسم الثاني في تقدير معالم النموذج باستعمال طريقة".(Kibria-Lukman)

أ- مفهوم نظرية بيز

يعتمد مفهوم "بيز" على فرضية أن المتغيرات التي يجب تقديرها تكون متغيرات عشوائية وليست قيمًا ثابتة، ويتم تقدير هذه المتغيرات باستعمال المعلومات السابقة، المعروفة أيضًا بالتوزيعات السابقة، بالإضافة إلى المعلومات الحالية أو المشاهدات. يتم تمثيل هذه المعلومات بواسطة دالة الإمكان، وعند ربط هاتين الدالتين، نحصل على ما يُعرف بالدالة الاحتمالية اللاحقة. يمكن تعريف التوزيع السابق كالأساس الذي يُستخدم لتقدير المتغيرات الأولية، بناءً على الدراسات السابقة، ويتم تقسيمه على نوعين: التوزيعات السابقة غير المعروفة والتوزيعات السابقة المعروفة.

أما التوزيع اللاحق، فيُعرف بأنه الدالة التي تضم جميع المعلومات المتعلقة بالمتغيرات التي تُقدر وتُحدد عن طريق ضرب دالة التوزيع السابق للمتغير بدالة الإمكان للمشاهدات.

ب- استعمال اسلوب بيز لتقدير أنموذج كاما

تُوضَّح سابقًا في مفهوم نظرية بيز أنها تعتمد على توزيع سابق للمعلمات، وبما أن هناك نوعين من التوزيعات السابقة: توزيعات سابقة معلومة وتوزيعات سابقة غير معلومة، فإنه في هذه الدراسة يتم بناء نظرية بيز على أساس توزيعات سابقة معلومة للمعلمات؛ لذلك لافتراض توزيع معلوم للمعلمات يجب اختيار توزيع قريب من توزيع المتغير المعتمدY ، وبما أن توزيع المتغير المعتمد Y هو توزيع كاما، فإنه لاختيار توزيع سابق للمعلمات يجب أن يكون من التوزيعات التي

تنتمي إلى العائلة الأسية أو من التوزيعات التي تكون فترة التوزيع أكبر من الصفر. من أهم هذه التوزيعات هو التوزيع الأسي الذي تعد التوزيع الأقرب إلى كاما باعتباره حالة خاصة من توزيع كاما، ويمكن كتابة دالة التوزيع الاسي بالشكل الآتي:

$$(y،\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{Y}{\lambda}} \qquad Y،\lambda > 0 \tag{10}$$

وإن أهم خصائص توزيع الاسي والمتمثلة بالوسط الحسابي والتباين تكون بالشكل الآتي:

$$\mathrm{m(Y)} = \lambda$$

$$var(Y) = \lambda^2$$

وبالعودة إلى تقديرات نموذج انحدار كاما اعتمادًا على نظرية بايز، التي تفترض وجود توزيع سابق للمعلمات، سيتم افتراض أن توزيع المعلمات، هو التوزيع الأسي:

،يمكن كتابة دالة توزيع المعلمات على النحو الآتي:

$$\pi(\beta) = C\left(e^{-\frac{\beta_1}{\lambda_1}}، e^{-\frac{\beta_2}{\lambda_2}}، \dots \dots ، e^{-\frac{\beta_p}{\lambda_p}}\right) \tag{11}$$

إذ إن C عبارة عن مصفوفة قطرية من الدرجة (P×P) أي أن:

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \frac{1}{\lambda_p} \end{bmatrix}$$

β: متجهة المعالم $\left(\beta_0، \beta_1، \dots . ، \beta_p\right)$.

لذلك، للحصول على توزيع سابق للمعالم، يجب تحويلها إلى توزيع أسي. يتم ذلك باستعمال دالة ربط، ويمكن استعمال دالة الربط الأسية لهذا الغرض، التي يمكن تسميتها بـ η_{3i}. يمكن كتابة هذه الدالة على الشكل الآتي:

$$\eta_{3i} = T(M_i) = e^{(\mathrm{X}'\beta)} \tag{12}$$

إذ إن :

$T(M_i)$:دالة الربط للمتوسط الخاصة بالتوزيع الأسي(دالة ربط الاسية).

η_{3i}، التنبؤات (التركيبات) الخطية الخاصة بالتوزيع الاسي.

$X_i = \left(X_{i1}، X_{i2}، \ldots \ldots . ، X_{ip}\right)'$: متجهة ل P من المتغيرات المستقلة.

يمكن ،إعادة صياغة دالة توزيع الأسي بالأسلوب المتبع في توزيع كاما ويمكن توضيح ذلك بافتراض ان معلمة توزيع الاسيλ والمتمثلة بالمتوسط يمكن، إعادة صياغتها دالة التوزيع الأسي بدلالة المتوسط؛ وذلك باستعمال دالة الربط η_{3i} ويمكن توضيح ذلك كما يأتي :

$$\eta_{3i} = M = \lambda = e^{(X'\beta)}$$

يمكن، إعادة صياغة دالة توزيع الاسي(10) ، وذلك بدلالة معالم انموذج β بالشكل الآتي:

$$f\left(X،\beta\right) = \frac{1}{e^{(X'\beta)}} e^{-} \frac{\beta}{e^{(X'\beta)}} \qquad (13)$$

المعادلة (13) تمثل التوزيع السابق للمعالم انموذج β ، يمكن ،إعادة المعادلة (11) بدلالة المعادلة (13) وكما يأتي :

$$\prod(\beta) = C\left(e^{-} \frac{\beta_1}{e^{(X_1{}'\beta_1)}} ، \ldots \ldots \ldots ، e^{-} \frac{\beta_p}{e^{(X_p{}'\beta_p)}}\right) \qquad (14)$$

إذ إن C مصفوفة مربعة من الدرجة P×P، يمكن تمثيلها بالصيغة الآتية:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{e^{(X_1{}'\beta_1)}} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \frac{1}{e^{(X_p{}'\beta_p)}} \end{bmatrix}$$

ومن أجل الحصول على التوزيع اللاحق وحسب نظرية بيز يتم ضرب التوزيع السابق للمعلمات مع دالة الإمكان الأعظم مع تعظيم الدالة أي أن:

$$\prod\left(\beta/Y ، X\right) = L\left(\beta/Y ، X\right) * \prod(\beta) \qquad (15)$$

وذلك عن طريق ضرب معادلة دالة الإمكان الأقصى الموجودة في المعادلة (9) بمعادلة التوزيع السابقة:

$$\prod\left(\beta،\gamma/Y ، X\right) = \left(\frac{e^{\left[\left(-\frac{1}{Z'\gamma}\right)\log(Z'\gamma)\right]}}{\Gamma_{\frac{1}{Z'\gamma}}}\right)^n \pi_{i=1}^n Y^{\left(\frac{1}{Z'\gamma}-1\right)} \cdot e^{-\frac{1}{Z'\gamma}\Sigma\left[Yi\, e^{-X'\beta}+X'\beta\right]} \cdot \prod\left(\frac{1}{e^{(X'\beta)}} e^{-} \frac{\beta}{e^{(X'\beta)}}\right)$$

ويمكن كتابتها بالشكل النهائي الآتي:

$$\prod\left(\beta، \gamma / Y ، X\right) = \left(\frac{e^{\left[\left(-\frac{1}{Z'\gamma}\right)\log(Z'\gamma)\right]}}{\Gamma_{\frac{1}{Z'\gamma}}}\right)^{n} \pi_{i=1}^{n} Y^{\left(\frac{1}{Z'\gamma}-1\right)} e^{-\frac{1}{X'\beta}} e^{-\frac{1}{Z'\gamma}\sum\left[Yi\, e^{-X'\beta}+X'\beta\right]} * \left(\frac{1}{e^{(X'\beta)}}\right)^{n} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta}{e^{(X'\beta)}}} \tag{16}$$

ان للمعادلة (16) تمثل دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة لمتجه المعالم β وكذلك لمتجه المعالمγ وعلية فأن دالة المخاطرة، تكون بالشكل الآتي :

$$h\left(\beta، \gamma / Y، X\right) = \frac{\prod\left(\beta، \gamma / Y ، X\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots . \int_{-\infty}^{\infty} \prod\left(\beta / Y ، X\right) d_{\beta 1} \ldots . d_{\beta p}} \tag{17}$$

المعادلة (17) تسمى دالة المخاطرة لمتجة المعالم β، يمكن أن نحصل على تقدير نقطي لمتجه المعالم؛ وذلك بالاعتماد على نظرية بيز، حيث يتم تحديد دالة الخسارة والتي تم ذكرها سابقا $L = L\left(\hat{\beta}، \beta\right)$،ويعتمد هذا التقدير النقطي على إيجاد قيمة $\hat{\beta}$ وكذلك $\hat{\gamma}$والتي تقلل الخسارة، بعبارة أخرى :

$$Min_{\hat{\theta}} \mathrm{E}\left[L\left(\hat{\beta}، \beta\right)\right] = \mathrm{Min}_{\hat{\theta}} \int L\left(\hat{\beta}، \beta\right) * p(\beta / \mathrm{Y}) d\beta \tag{18}$$

من الجدير بالذكر هنا أنه، كما ذُكر سابقاً، اعتمد على دالة الخسارة التربيعية؛ وذلك لتوضيح عمل هذه الدالة في الحصول على تقديرات نموذج الانحدار:

$$L\left(\hat{\beta}، \beta\right) = \left(\hat{\beta} - \beta\right)^{2} \tag{19}$$

وبأخذ التوقع إلى المعادلة السابقة

$$E(L\left(\hat{\beta}، \beta\right) = E\left(\hat{\beta} - \beta\right)^{2} \tag{20}$$

وبعد تبسيط المعادلة (20) تكون بالشكل الآتي:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{\beta} - \beta\right)^{2} h\left(\beta / Y، X، \emptyset\right) d_{\beta 1} \ldots d_{\beta p}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\beta}^{2} - 2\hat{\beta}\beta + \beta^{2}) h\left(\beta / Y، X، \emptyset\right) d_{\beta 1} \ldots d_{\beta p}$$

$$\begin{aligned} = \; & \hat{\beta}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\beta / Y، X، \emptyset\right) d_{\beta 1} \ldots d_{\beta p} \\ & - 2\hat{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \beta \; h\left(\beta / Y، X، \emptyset\right) d_{\beta 1} \ldots d_{\beta p} \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{2} h\left(\beta / Y، X، \emptyset\right) d_{\beta 1} \ldots d_{\beta p} \end{aligned}$$

إذ إن الحد الأول يكون مساوي إلى الواحد

$$\hat{\beta}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta / Y ، X ، \emptyset) d_{\beta 1} \dots d_{\beta p} = \hat{\beta}^2$$

أما الحد الثاني فيكون مساويا إلى:

$$2\hat{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \beta \; h(\beta / Y ، X ، \emptyset) d_{\beta 1} \dots d_{\beta p} = 2\hat{\beta} E(\beta / Y ، X ، \emptyset)$$

أما الحد الثالث فيكون مساويا إلى:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 h(\beta / Y ، X ، \emptyset) d_{\beta 1} \dots d_{\beta p} = E(\beta^2 / Y ، X ، \emptyset)$$

وبعد تبسيط واستخراج نتائج التكاملات لجميع الحدود ستكون معادلة (20) بالشكل الآتي:

$$E(L(\hat{\beta} ، \beta) = \hat{\beta}^2 - 2\hat{\beta} E(\beta / Y ، X ، \emptyset) + E(\beta^2 / Y ، X ، \emptyset) \qquad (21)$$

وبأخذ المشتقة إلى $E(L(\hat{\beta} ، \beta)$ بالنسبة إلى $\hat{\beta}$ ومساواتها إلى الصفر فإن :

$$\frac{\partial E(L(\hat{\beta} ، \beta)}{\partial \hat{\beta}} = 2\hat{\beta} - 2E(\beta / Y ، X ، \emptyset) = 0$$

وبعد تبسيط الدالة يتم الحصول على تقدير نقطي إلى متجهة المعالم.

$$\underline{\hat{\beta}} = E(\beta / Y ، X ، \emptyset) \qquad (22)$$

يتضح من المعادلة (22) أن تقدير النقطي للمعلمة (β) يكون أمثل عندما يتساوى بتوقع دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمعلمة(β) ، أي يكون التقدير البايزي للمعلم(β) ، بالاعتماد على دالة خسارة تربيعية، يتساوى مع الوسط الحسابي للتوزيع اللاحق للمعلمة .(β) شكل المقدر يكون كما يأتي:

$$E(\beta / Y ، X ، \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\beta} \, h(\beta / Y ، X ، \emptyset) d_{\beta 1} \dots d_{\beta p} \qquad (23)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdot\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\beta} \; \frac{\left(\frac{e^{\left[\left(-\frac{1}{Z'\gamma}\right) \log(Z'\gamma)\right]}}{\Gamma_{\frac{1}{Z'\gamma}}} \right)^{n} \pi_{i=1}^{n} Y^{\left(\frac{1}{Z'\gamma}-1\right)} e^{-\frac{1}{X'\beta} e^{-\frac{1}{Z'\gamma} \sum\left[Yi\, e^{-X'\beta}+X'\beta\right]}} * \left(\frac{1}{e^{(X'\beta)}}\right)^{n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta}{e^{(X'\beta)}}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \cdot\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{\left[\left(-\frac{1}{Z'\gamma}\right) \log(Z'\gamma)\right]}}{\Gamma_{\frac{1}{Z'\gamma}}} \right)^{n} \pi_{i=1}^{n} Y^{\left(\frac{1}{Z'\gamma}-1\right)} e^{-\frac{1}{X'\beta} e^{-\frac{1}{Z'\gamma} \sum\left[Yi\, e^{-X'\beta}+X'\beta\right]}} * \left(\frac{1}{e^{(X'\beta)}}\right)^{n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta}{e^{(X'}}}}$$

يتم تقدير المعلمة γ بالأسلوب المستعملة في تقدير المعلمة β ، كما هو موضح أعلاه.

$$\left(\gamma/Y،X،\beta\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\beta}\, h\left(\beta/Y،X،\emptyset\right) d_{\gamma 1} \dots d_{\gamma k} \qquad (24)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdot\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\gamma}\, \frac{\left(\frac{e^{\left[\left(-\frac{1}{Z'\gamma}\right)\log(Z'\gamma)\right]}}{\Gamma_{\frac{1}{Z'\gamma}}}\right)^{n} \pi_{i=1}^{n} Y^{\left(\frac{1}{Z'\gamma}-1\right)} e^{-\frac{1}{X'\beta}} e^{-\frac{1}{Z'\gamma}\sum\left[Yi\, e^{-X'\beta}+X'\beta\right]} * \left(\frac{1}{e^{(X'\beta)}}\right)^{n} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta}{e^{(X'\beta)}}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \cdot\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{\left[\left(-\frac{1}{Z'\gamma}\right)\log(Z'\gamma)\right]}}{\Gamma_{\frac{1}{Z'\gamma}}}\right)^{n} \pi_{i=1}^{n} Y^{\left(\frac{1}{Z'\gamma}-1\right)} e^{-\frac{1}{X'\beta}} e^{-\frac{1}{Z'\gamma}\sum\left[Yi\, e^{-X'\beta}+X'\beta\right]} * \left(\frac{1}{e^{(X'\beta)}}\right)^{n} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta}{e^{(X'\beta)}}}}$$

يُظهر من الصيغة أعلاه، أن الحصول على تقديرات لمقدار بيز يُعدُّ صعبًا، بسبب وجود P من التكاملات لمعلمات β و γ، هذا يسبب تعقيدًا في إيجاد التقديرات البيزية. لمعالجة هذه المشكلة، يُنصح باستعمال الطرق العددية للحصول على التقديرات؛ إذ تشمل هذه الطرق خوارزمية .Metropolis-Hastings تُعد خوارزمية Metropolis-Hastings إحدى طرق سلسلة ماركوف مونت كارلو(MCMC) ؛ إذ تعدُّ مفيدة بشكل خاص عندما يكون من الصعب أو مستحيلاً أخذ عينات من التوزيعات الاحتمالية المعقدة المستهدفة.

ج- توظيف تقنية Ridge Regression

يهدف هذا البحث إلى استعمال تقنية انحدار الحرف في الأسلوب البيزي لتقدير معالم نموذج انحدار كاما؛ وذلك في سياق وجود مشكلة تعدد الخطي؛ إذ تُعدُّ تقنية انحدار الحرف واحدة من أقدم أساليب التنظيم التي تترك أثراً مهماً في حل مشكلة التعدد الخطي من خلال تقليل تباين التقديرات مع التضحية بقدر بسيط من التحيز؛ إذ تسهم هذه التقنية في تحسين دقة التنبؤ.

ولتوضيح كيفية ايجاد مقدرات المعلمات حسب الصيغ السابقة لمقدرات بيز $(24،23)$ ؛ إذ إن تقنية Ridge Regression تعتمد على الصيغة الآتية:

$$min_{\beta}\left(\sum (Y_i - X'\beta)^2\right) + \delta \sum_{j=1}^{Pi} \beta_j^2 \qquad (25)$$

إذ إن الصيغة العامة لتقنية *Ridge* هي

$$L\left(\delta،\beta\right) = |Y - X'\beta|^2 + \delta \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2 \qquad (26)$$

إذ إن

δ : تمثل معلمة التنظيم الخاصة بتقنية *Ridge Regression*

ومن خلال تقليل المعادلة (25) يمكن الحصول على مقدر Ridge

$$\hat{\beta}_{Ridg} = \underset{\beta}{\arg min} \{L(\delta،\beta)\} \quad (27)$$

باستعمال تقنية Ridge Regression في التقدير البيزي، نفترض أن معلمة التنظيم δ لها توزيع أولي. يتم تقدير هذا المعلمة العشوائية بأفتراض لها توزيع أولي يتم تقديرها عند معلمات النموذج β ويمكن توضيح ذلك كما يأتي :

$$\delta/\beta_j \sim \exp(r)$$

إذ إن r هي معلمة توزيع الخاصة بالمتغير δ .

ومن اجل الحصول على مقدرات بيز باستعمال تقنية Ridge وذلك بالاعتماد على الصيغة الآتية:

$$min_{\beta_{Bay}} \left(\sum \left(Y_i - X'\beta_{Bay}\right)^2\right) + \delta \sum_{j=1}^{Pi} \beta^2_{j\,Bay} \quad (28)$$

باستعمال تقنية (Cross-validation)، يتم الحصول على التقديرات النهائية لانحدار الحرف البيزي، بالطريقة نفسها يتم تقدير المعلمة γ وفقًا لتقنية انحدار الحرف الموظفة في النموذج البيزي.

د- طريقة $(Kibria - Lukman\ Method)$.[ ][ ][ ]

في الفترة الأخيرة، اقترحت مجموعة من الباحثين طرقًا معدلة لطريقة انحدار الحرف التي تظهر أقل تحيزاً من الطرق التقليدية. ومن بين هؤلاء الباحثين، قدم باحثان (Kibria-Lukman) طريقة معدلة لانحدار الحرف، مما أدى إلى مقارنة هذه الطريقة المعدلة مع عدة طرق أخرى عام 2023 ولتوضيح هذه الطريقة نتبع ما يأتي:

$$\hat{\beta}_{GKLE} = (X'W_1X + KI)^{-1}\left(X'\widehat{W_1}X - KI\right)\hat{\beta}_{MLE} \quad (29)$$

$$= (F_1 + KI)(F_1 - KI)\hat{\beta}_{MLE}$$

$$= D_K\hat{\beta}_{MLE}$$

إذ إن

$\hat{\beta}_{MLE}$:تمثل مقدرات الامكان الأعظم؛ إذ حصل عليها من خلال استعمال الخوارزمية الامكان الاعظم الموزونة .

D_K= $(F_1 + KI)(F_1 - KI)$.

K: تمثل معلمة التحيز.

ويمكن احتساب مصفوفة التباين والتباين لهذه الطريقة وكما يأتي:

$$Cov(\hat{\beta}_{GKLE}) = Cov(D_K\hat{\beta}_{MLE}) \quad (30)$$

$$= \hat{\text{б}}_1 D_K F_1^{-1} {D_K}'$$

ولاحتساب متوسط مربعات الخطأ يجب بالأول احتساب MMSE

$$\text{MMSE}(\hat{\beta}_{GKLE}) = Cov(\hat{\beta}_{GKLE}) + B(\hat{\beta}_{GKLE})B'(\hat{\beta}_{GKLE}) \quad (31)$$

$$= \hat{\text{б}}_1 D_K F_1^{-1} D_K' + 4K^2(F_1+KI)^{-1}\beta\beta'((F_1+KI)^{-1})'$$

$$= \hat{\text{б}}_1 D_{K_1} F_1^{-1} D_K'$$

ويمكن احتساب $\hat{\text{б}}_1$ وفق الصيغة الآتية :

$$\hat{\text{б}}_1 = (n-p)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - \widehat{M_\iota}}{\widehat{M_\iota}}\right)^2 \quad (32)$$

ويمكن احتساب MSE بأخذ الاثر للمصفوفة $MMSE$

$$MSE(\hat{\beta}_{GKLE}) = tr\left(\text{MMSE}(\hat{\beta}_{GKLE})\right) \quad (33)$$

$$= D_{K_1} F_1^{-1} D_K' \text{tr}(D_{K_1} F_1^{-1} D_K')$$

$$= \hat{\text{б}}_1 \sum_{i=1}^{P} \frac{(\varepsilon_1 - K)^2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+K)^2} + 4K^2 \sum_{i=1}^{P} \frac{e_{i1}^2}{(\varepsilon_1+k)^2}$$

علما ان e_{i1}^2 قيمة يمكن احتسابها على وفق الصيغة الآتية:

$$e_{i1} = A'\hat{\beta}_{MLE} \quad (34)$$

وان A' تمثل الموجهة المميز للمصفوفة F_1 ،أما بالنسبة ε_1 تمثل قيمة الجذور المميزة لمصفوفة ${F_1}^{-1}$.

وبنفس الاسلوب السابق نتبع لتقدير المعلمة γ وكما يأتي :

$$\hat{\gamma}_{GKLE} = (Z'W_2Z + KI)^{-1}(Z'\widehat{W}_2Z - KI)\hat{\gamma}_{MLE} \quad (36)$$

أما مصفوفة التباين والتباين المشترك الصيغة النهائية تكتب بالشكل الآتي:

$$Cov(\hat{\gamma}_{GKLE}) = \hat{\text{б}}_2 D_K F_2^{-1} {D_K}' \quad (37)$$

أما متوسط مربعات الخطأ تكون صيغته النهائية بالشكل الآتي:

$$MSE(\hat{\gamma}_{GKLE}) = \hat{\sigma}_2 \sum_{j=1}^{K} \frac{(\varepsilon_2 - K)^2}{\varepsilon_2(\varepsilon_2 + K)^2} + 4K^2 \sum_{j=1}^{K} \frac{e_{i2}^2}{(\varepsilon_2 + k)^2} \quad (38)$$

ويمكن احتساب $\hat{\sigma}_2$

$$\hat{\sigma}_2 = (n-K)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - \hat{\emptyset}_j}{\hat{\emptyset}_j}\right)^2 \quad (39)$$

أما معلمة التحيز K توجد العديد من الصيغ المستعلمة لاحتساب معلمة التحيز لذلك في هذا البحث تم استعمال صيغة $\underline{(Horel - Kennard)}$ ويمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$K_1 = \frac{\hat{\sigma}_i}{e_{i\,max}^2} \quad (40)$$

وكذلك صيغة (Hoe): ويمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$K_2 = \frac{P\hat{\sigma}_i}{\hat{e}'\hat{e}} \quad (41)$$

6- المحاكاة

في هذا الجزء، نقوم بشرح كيفية بناء نموذج انحدار كاما، باستعمال تجارب المحاكاة بواسطة برنامج MATLAB ، باستعمال تجارب .Monte Carlo يتم توليد متغير$Y \sim G(M_i،\emptyset_j)$ بمعلمتين هي معلمة المتوسط Mi ؛ إذ تُولد باستعمال دالة الربط $M_i = \exp(X_i'\beta)$ ، وكذلك معلمة الشكل، فتولد باستعمال دالة الربط$(\emptyset_i) = Z_i'\gamma$ ؛ إذ اختير حجم العينة (100، 70، 50) والارتباطات (0.9،0.95،0.99)، أما الدالة المستعلمة لتوليد المتغيرات المستقلة هي:

$$X_{ij} = (1-\rho^2)Z_{ij} + \rho Z_{iq} \quad i = 1،2، \ldots.n \quad j = 1،2، \ldots ،q \quad (42)$$

علما بأن ρ درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة ، Z_{ij} تمثل المتغيرات المستقلة التي تتوزع توزيعاً طبيعي القياس. أما q تمثل عدد المتغيرات المستقلة التي سوف يتم اعتماد توليد على ثلاثة متغيرات، أي أن (q=3) أما المعلمات التي اعطيت قيم افتراضية لمعلمات أنموذج انحدار كاما وكما موضحة في الجدول الآتي:

	Mean Parameter				Shape parameter			
	β_0	β_1	β_2	β_3	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4

Model								
Model1	1.6	0.3	0.05	12.7	8.1	0.7	0.6	2.9
Model2	2.9	0.99	0.76	20	9.8	0.65	0.38	3.9

أما بالنسبة لعدد مرات تكرار التجربة فسوف تُكرار 1000 ، أما بالنسبة لمقياس متوسط مربعات الخطأ احتسب وفقاً للصيغة الآتية:

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{1000}\sum_{r=1}^{1000}(\hat{\beta}_r - \beta)'(\hat{\beta}_r - \beta) \qquad (43)$$

وبعد إجراء التجارب بالنسبة للمعلومات أعلاه توصل البحث إلى النتائج الآتية:

أ- النموذج الأول:

جدول رقم (1) يمثل متوسط مربعات الخطأ

N	ρ	GRE		Bay_{RR}
		K1	K2	
50	*0.9*	6.8	7.2	*10.5*
	0.95	6.9	7.5	*10.6*
	0.99	7.1	7.9	*11. 9*
70	*0.9*	6.1	6.9	*9.7*
	0.95	5.8	7.1	*9.5*
	0.99	4.8	6.8	*9.3*
100	*0.9*	4.7	6.8	*5.7*
	0.95	3.7	6.4	*5.5*
	0.99	2.6	6.4	*5.2*

يتبين من تحليل النتائج للنموذج الأول أن طريقة GRE حققت أقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ، مما يشير إلى أن قيم هذا

المتوسط تتناقص مع زيادة حجم العينة، فضلاً عن، ارتفاع قيمة الارتباط بين المتغيرات المستقلة. كما تبين أن قيم متوسط مربعات الخطأ لطريقة GRE بمعلمة التحيز K1 هي الأفضل مقارنة بمعلمة التحيز K2.

أما بالنسبة لطريقة انحدار الحرف البيزية، فقد كان متوسط مربعات الخطأ أعلى من طريقةGRE ، مما يشير إلى أن قيم المتوسط تتناقص مع زيادة حجم العينة وقيمة الارتباط بين المتغيرات.

ب- النموذج الثاني

جدول رقم (1) يمثل متوسط مربعات الخطأ

N	ρ	GRE		Bay_{RR}
		$K1$	K2	
50	0.9	6.5	6.9	5.8
	0.95	5.9	5.7	5.5
	0.99	4.9	5.6	5.3
	0.9	3.9	4.9	4.9
	0.95	3.6	4.8	4.6
70	0.99	3.1	4.1.	4.7
	0.9	2.7	3.9	3.2
	0.95	2.6	3.6	3.1
	0.99	2.4	3.2	2.7
100				

من خلال دراسة نتائج تجارب المحاكاة للنموذج الثاني، يُظهر أن قيم متوسط مربعات طريقتين هي GRE مع معلمة التحيز K1 وطريقة انحدار البايزية تكون متقاربة، وتتناقص مع زيادة حجم العينة وقيمة الارتباط. ويزداد فعالية الطرق مع زيادة حجم العينة، في حين تظهر طريقة GRE مع معلمةK2

7- الاستنتاجات

بناءً على تحليل نتائج التجارب للنموذجين، وبالنظر إلى جميع أحجام العينات المختلفة وقيم الارتباطات المختلفة، يمكن استنتاج أن طريقة GRE مع معلمة التحيز K1 كانت الأفضل في النموذجين على حد سواء، ولجميع الأحجام العينات وأنواع الارتباطات.

أما طريقة انحدار الحرف البيزية، فقد كانت الأفضل في النموذج الثاني، مع تحقيقها لنتائج جيدة لجميع أحجام العينات وأنواع الارتباطات أيضًا. بالنسبة لطريقة GRE مع معلمة التحيزK2 ، فكانت النتائج جيدة للنموذج الأول ولجميع أحجام العينات وأنواع الارتباطات، لكنها لم تكن فعالة بالشكل المطلوب في النموذج الثاني.

8- التوصيات

1- يوصي الباحث ضرورة توظيف طرق أخرى في الأسلوب البيزي في معالجة مشكلة التعدد الخطي.
2- يوصي الباحث في الدراسات المستقبلية استعمال دوال ربط أخرى غير دوال الربط الطبيعية والاسية على سبيل المثال الدوال اللوغاريتمية.

المصادر

1-Adekanmbi ، D. B. (2017)، "Generalized Gamma Regression Model With Application to cell Data of Aids Patients" ، International Journal of Applied Mathematics & Sciences (IJAMSS)،6(4)،19-36.

2-Algamal ، Z. Y.(2018)، "Shrinkage estimators for gamma regression model " ، Electronic Journal of Applied Statistical Analysis ، 11(1)، 253-268.

3- Algamal، Z. Y. & Asar ، Y(2018)، "Liu-type estimator for the gamma regression model" ، Communications in Statistics – simulation and computation ، 1-14.

"Paired bootstrapping procedure in gamma ، K. B. (2011)، Z. Y. & Rasheed،4- Algamal 201-211.، 37(4)، Journal of of Basrah Researches،regression model using R"

" Influence diagnostics in ، M.(2019)، & Qasim،M.، Aslam ،M.، Amanullah، M.،5- Amin ، 89(3)،gamma ridge regression model " Journal of statistical computation and simulation 536-556.

"Performance of Asar and Genc and ، M. (2019)، & Amaunullah ، M.، Qasim ، M.،6- Amin Huang and Yang s Two – Parameter estimation methods for the gamma regression model" 2951-2963.، 43(6)، Transactions A: Science ،Iranian Journal of Science and Technology

9- Corrales، M & Cuervo، E.C ،(2020)، "Package Gammarg"

10- Kibria، B.M.G.، and Lukman، A.F.(2023)"Some Modified Kibria-Lukman Estimator for the Gamma Regression Model" Simulation and application.Scientifica ISSN (1110-4716)