بناء إنموذج رياضي لتعظيم عائد الشركة الإنتاجية بإستعمال البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة – مع تطبيق عملي

أ.م.د.عبد الجبار خضر بخيت الباحث/ فاطمة عبد الباري حسين
جامعة بغداد / كلية الإدارة والاقتصاد / قسم الأحصاء

المستخلص

يتلخص البحث في بناء إنموذج رياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة (I.L.F.P) وإيجاد الحل الأمثل للمسألة الذي يعظم عائد الشركة الإنتاجية من خلال إيجاد أكبر عدد ممكن من الوحدات المنتجة وتعظيم دالة الهدف التي تمثل نسبة الأرباح الى التكاليف ومن ثم تعظيم الربح الإجمالي للشركة بأقل التكاليف ، وذلك بإستعمال طريقة خوارزمية Dinkelbach والطريقة التكميلة على بيانات شركة الصناعات الخفيفة لسنة 2013 ومقارنة النتائج مع نتائج الحل بطريقة برمجة الأهداف .

حيث تبين من خلال النتائج النهائية للحل إن طريقتي (خوارزمية Dinkelbach والطريقة التكميلة) جاءت بنتائج مقاربة جداً وكانت نسبة التعظيم متساوية،بينما طريقة برمجة الأهداف جاءت بنسبة تعظيم أقل .

ومن هذا نستنتج أن مسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة تعد أفضل من برمجة الأهداف ، وهذه النتيجة منطقية لأن برمجة الاهداف (G.P) تحاول خلق الإنسجام لتحقيق الأهداف المتناقضة ، كما ويعد هذا الإنموذج إنموذجاً عاماً لتعظيم عائد أية شركة إنتاجية .

المصطلحات الرئيسية للبحث / بناء إنموذج رياضي – البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة (I.L.F.P)– خوارزمية Dinkelbach – الطريقة التكميلية – برمجة الأهداف (G.P) .

مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية
المجلد 20
العدد 79
لسنة 2014
الصفحات310-336

*بحث مستل من رسالة ماجستير

المقدمة

مسألة البرمجة الكسرية الخطية (L.F.P) هي نوع خاص من مسائل البرمجة غير الخطية يتم إستخدامها كأداة تخطيط مهمة على مدى العقود الأربع الماضية في تخصصات مختلفة مثل الهندسة ، الأعمال التجارية ، الأعمال الإقتصادية ، وهي مفيدة في حل المسائل الإقتصادية في مختلف الأنشطة التي تستخدم موارد معينة بنسب مختلفة .

كما وتعد مسألة (L.F.P) من الأدوات الرياضية المفيدة التي تتعامل مع الأهداف المتضاربة ، حيث إن دالة الهدف تكون نسبة ما بين دالتين خطيتين ، وإن قيود المسألة عبارة عن معادلات أو متراجحات خطية ومتغيرات المسالة غير سالبة .

هناك تطبيقات مهمة لمسألة (L.F.P) منها تعظيم (الربح / الكلفة) أو (مخرجات / المدخلات) أو (الإنتاج / الكلفة) وغيرها من التطبيقات الإقتصادية الأخرى .

في حال كون المسألة تحتوي قيداً على المتغيرات متمثل بأن تكون متغيرات القرار أعداد صحيحة (Integer) فإن المسألة سوف تصبح مسألة برمجة كسرية خطية صحيحة (I.L.F.P) ، حيث إن أهمية الإنموذج الصحيح الامثل تنبع من حقيقة كون الكثير من المشاكلات العملية والأنشطة والموارد من الآلات ، الطائرات ، الأشخاص غير قابلة للتجزئة .

إن معظم التطبيقات على مسالة (I.L.F.P) تتمثل في مجال الإقتصاد والهندسة ، حيث إنه من المهم جداً أن يكون الحل أعداد صحيحة .

1- الهدف من البحث

يهدف البحث الى بناء إنموذج رياضي لتعظيم عوائد الشركة الإنتاجية بأستعمال البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة ، وذلك من خلال التوصل الى العدد الأمثل من المنتجات الواجب إنتاجها والتي تحقق أعظم ربح ممكن نسبة الى أقل تكلفة ، وبذلك سوف تحقق تعظيم دالة الربح الأجمالي للشركة .

2- عينة البحث

لقد تم إختيار شركة الصناعات الخفيفة كموقع لإجراء البحث لدور الشركة المهم في رفد الإقتصاد الوطني بالكثير من المنتجات .

تضم الشركة عدداً من المعامل وهي (معمل الثلاجات ، معمل المدافيء النفطية والطباخات الغازية ، ومعمل المجمدات) وهذه المعامل تنتج أنواع مختلفة من المنتجات وبأحجام مختلفة ، كما وتقوم بأنتاج بعض المنتجات عن طريق التجميع ومنها الطباخات بأنواع مختلفة وكذلك بعض أنواع الثلاجات .

تنتج الشركة ثمانية منتجات رئيسة وهي (المدافيء النفطية ، مجمدة 13 قدم ، مجمدة 10 قدم ، ثلاجة 19 قدم ، ثلاجة 16 قدم ، ثلاجة 15 قدم ، ثلاجة 9 قدم ، طباخ صالون) ، كما وتم إعتماد بيانات الشركة الخاصة بالعام 2013 لبناء الإنموذج الكسري المطلوب .

3- الجانب النظري

3-1- مفهوم البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة [14,13,11,9,7] (I.L.F.P)

تولدت الأهمية الرئيسة لمسألة البرمجة الكسرية الخطية (L.F.P) من حقيقة كون الكثير من مشاكلات الأمثلية في الهندسة والموارد الطبيعية والأقتصاد تتطلب تعظيم الأستفادة من نسبة بين الدوال العملية و / أو الأقتصادية ، وفي مثل هذه المسائل تظهر دالة الهدف كنسبة بين دالتين خطيتين بسط ومقام .

مسألة البرمجة الكسرية الخطية (L.F.P) تعد واحدة من أهم أساليب البرمجة غير الخطية التي أظهرت في الآونة الأخيرة كفاءة عالية في حل مشاكلات عديدة وملموسة ، وعلاوة على ذلك فمن المعروف أن نماذج الأمثلية غير الخطية تصف المشاكلات العملية بشكل أفضل بكثير من نماذج الأمثلية الخطية .

فأن مسألة البرمجة الكسرية الخطية (L.F.P) هي نوع خاص من مسائل البرمجة غير الخطية التي تكون فيها دالة الهدف عبارة عن نسبة بين دالتين خطيتين والقيود المفروضة على المسألة عبارة عن معادلات خطية ومتباينات خطية ، وهذا يعني أن مسألة (L.F.P) هي تعميم لمسألة البرمجة الخطية (L.P) ، ويمكن القول أن البرمجة الخطية (L.P) هي حالة خاصة من البرمجة الكسرية الخطية (L.F.P) ، وإن كل من البرمجة الخطية والبرمجة الكسرية الخطية تمثل مشاكلات الأمثلية بأستخدام المعادلات الخطية والمتباينات الخطية .

تعد مسألة (L.F.P) من الأدوات الرياضية المفيدة والمهمة التي تتعامل مع الأهداف المتضاربة و تسهم في تخطيط الأنتاج ، التخطيط المالي ، قطاع الشركات ، قطاع الرعاية الصحية وتنظيم المستشفيات ، وإتخاذ القرار الأمثل متمثلاً بتعظيم دالة البسط وتقليل دالة المقام ، لأن القرار النهائي يتخذ على أثر قرارات سابقة للمسألة .

في الوقت الحاضر أهم القضايا التي يركز عليها مديري المصانع هي تخطيط الأنتاج ، حيث تتطلب الشركات المصنعة وضع سياسة للأنتاج لتكون قادرة على المنافسة ، وإن من أكثر الأهداف التي يسعى المديرون الى تحقيقها هو تعظيم (المبيعات/المخزون) أو (الربح/الكلفة) أو (مخرجات/موظفين) أو (مخرجات/مدخلات) أو (التكلفة الفعلية/التكلفة القياسية) ، وغيرها .

تنشأ مشاكل البرمجة الكسرية الخطية (L.F.P) عندما يكون هناك ضرورة لتحسين كفاءة بعض الأنشطة ، على سبيل المثال الأرباح التي أكتسبتها الشركة لكل وحدة من نفقات العمل ، أو تكلفة الإنتاج لكل وحدة من السلع المنتجة ، الخ .

في الوقت الحالي بسبب العجز في الموارد الطبيعية فأن إستخدام مثل هذه المعايير المحددة يصبح أكثر وأكثر موضوعية وذو صلة ، لذلك فأن تطبيق (L.F.P) في حل المشاكل الحقيقية المرتبطة بالكفاءة المثلى يمكن أن يكون مفيد كما في حالة البرمجة الخطية (L.P) .

المشكلة الوحيدة في مسألة (L.F.P) هي أنه حتى الآن لم يتم تصنيع حزمة برامجيات خاصة ومتقدمة لحل وتدريس مسألة (L.F.P) ، ويمكن تفسير ذلك لسببين هما :

الأول : في عام 1962 بين كل من العالمين A.Charnas و W.W.Cooper بأنه يمكن تقليص مسألة (L.F.P) الأصلية الى مسألة (L.P) من خلال تحويلات بسيطة ، ومن ثم يمكن حل مسألة (L.F.P) بأستخدام الطريقة المبسطة الخاصة بحل مسألة (L.P) العادية ، وهذا الأسلوب مفيد جداً وبالخصوص لعلماء الرياضيات لأن معظم النتائج النظرية المتقدمة في (L.P) يمكن توسيعها بسهولة بشكل نسبي لتشمل مشاكلات (L.F.P) .

الثاني : هو أنه في الأدبيات الخاصة باللغة الأنكليزية قد تم الأنتهاء من المناقشات الخاصة بتفسير المتغيرات الأقتصادية الثنائية في (L.F.P) من حيث المشتقات والصيغ المعقدة ، وتم إيضاح التفسير الكامل للمتغيرات الأقتصادية الثنائية في (L.F.P) من الناحية الأقتصادية والسبل الممكنة لأستخدام النتائج التي تم الحصول عليها .

لذلك قد يكون من المفيد جداً أن نبين وبناءً على ما ذكر انفاً بأننا قادرون على حل مشكلة (L.F.P) وذلك من خلال الأعتماد وبشكل رئيس على النظرية الأساسية في (L.F.P) ، والطريقة المبسطة ، و النظرية الثنائية في (L.F.P) والأستفادة من المعلومات التي يتم الحصول عليها مع الحل الأمثل .

2-4- **الإنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة** (I.L.F.P) [10،15،16]

إن الإنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة يمكن كتابته كما يأتي :

$$\text{Maximization (or Minimization) } Z(x) = \frac{C(X)}{D(X)} = \frac{C^T X + \propto}{d^T X + \beta}$$

Subject to

$$Ax \leq b$$

$$X \geq 0 \quad \text{and Integer}$$

$$d^T X + \beta > 0$$

حيث أن

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: يمثل متجه متغيرات القرار في النموذج الرياضي .

C : يمثل متجه معاملات المتغيرات X في دالة هدف البسط .

d : يمثل متجه معاملات المتغيرات X في دالة هدف المقام .

α& β : يمثلان الحد المطلق في دالة هدف البسط ودالة هدف المقام على التوالي .

A : تمثل مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود المسألة من الدرجة $m \times n$.

b : مصفوفة الحدود المطلقة لقيود المسألة من الدرجة $m \times 1$.

في حال كون دالة الهدف تعظيم Max Z فأن :

- البسط يمثل دالة تعظيم $C^T X + \propto$. Max $z_1(x)$=
- المقام يمثل دالة تقليل $d^T X + \beta$. Min $z_2(x)$=

أما إذا كانت دالة الهدف تقليل الى أقل قيمة Min Z فأن :

- البسط يمثل دالة تقليل $C^T X + \propto$. Min $z_1(x)$=
- المقام يمثل دالة تعظيم $d^T X + \beta$. Max $z_2(x)$=

3-4- تحديد المتغيرات والثوابت والمعالم للإنموذج الرياضي

لبناء أي إنموذج رياضي لابد من تحديد نوع المتغيرات التي يحتويها الإنموذج والتي يتم تمثيلها برموز بدلاً من عدد محدد ويرمز للمتغيرات بالرمز X وتفرعاته $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ وذلك لغرض تحديد دالة الهدف وتحديد القيود وقيد عدم السالبية ، وعليه سوف نُعرف متغيرات القرار لمشكلة البحث وكما موضح فيما يلي :

إن عدد المنتجات التي تنتجها شركة الصناعات الخفيفة تبلغ (8) منتجات وهذا يعني أن n=8 ، أي أن :

$X= (x_1,x_2,x_3,...,x_8)$

X_1 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المدافيء النفطية .

X_2 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المجمدات حجم 13 قدم .

X_3 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المجمدات حجم 10 قدم .

X_4 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من الثلاجات حجم 19 قدم .

X_5 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من الثلاجات حجم 16 قدم .

X_6 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من الثلاجات حجم 15 قدم .

X_7 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من الثلاجات حجم 9 قدم .

X_8 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من الطباخات الغازية .

فضلا عن تحديد متغيرات الإنموذج الرياضي يتم تحديد الثوابت والتي يقصد بها الكميات الثابتة والتي لا تتغير قيمتها ، وهذا الثابت إذا لم نُعطي له قيمة محددة فيمكنة إن يتخذ أي قيمة عددية وفي هذه الحالة سيطلق على الثابت بالمعلمة Parameter ، لذا يقال عن المعلمة بأنها الثابت المتغير .

وعليه فأن ثوابت ومعلمات الإنموذج الرياضي لهذا البحث تكون كما موضح فيما يلي :

- معاملات دالة الهدف (الأرباح) C_j ; j = 1,2,3,...,8

(التكاليف) d_j ; j = 1,2,3,...,8

- معاملات القيود (المعاملات التكنولوجية للمنتجات) a_{ij} ; i = 1,2,3,..., 56 ; j = 1,2,3,...,8

- الطرف الأيمن من القيود (الطاقة الأنتاجية المتاحة) b_i ; i = 1,2,3,...,56

- الأرباح الإضافية (ثابت معلوم) α

- الكلف الإضافية (ثابت معلوم) β

4-4- طرائــق الحـــل

سيتم إعتماد طريقتين لحل إنمـــوذج البرمجـــة الكســـرية الخطيـــة الصـــحيحة ومقارنـــة النتـــائج المستحصلة مع النتائج الخاصة بتطبيق طريقة برمجة الأهداف وكما موضح فيما يأتي:

4-4-1 طريقة خوارزمية Dinkelbach [18,17,12]

تعد طريقة خوارزمية **Dinkelbach** من الطرائق المهمة التي تم إكتشافت في العام **1967** من قبل العالم **Dinkelbach** ، حيث إستطاع من خلال هذه الخوارزمية إختزال الحل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية **(L.F.P)** الى حل سلسلة من مسائل البرمجة الخطية **(L.P)** ، وبشكل عام تعد طريقة خوارزمية **Dinkelbach** أوسع الطرائق حيث يمكن تطبيقها حتى عندما يكون لدينا دالة برمجة كسرية تتكون من نسبة بين دالتين ليس بالضروري أن تكون خطية (أي يمكن أن تطبق على البرمجة غير الخطية أيضاً) .

لو فرضنا إن

$$C(X) = C^T + \propto \quad ; \quad D(X) = d^T + \beta$$

وأن مسألة البرمجة الكسرية الخطية تكون بالشكل الآتي :

$$\text{MAX } Z(x) = \frac{C(X)}{D(X)} = \frac{C^T X + \propto}{d^T X + \beta}$$

علـى وفـق القيـود الآتيـة

$$Ax \leq b$$
$$X \geq 0$$
$$d^T X + \beta > 0$$

نعتبر الدالة الآتية $F(\lambda) = [\, C(x) - \lambda * D(x) \,] \longrightarrow \text{MAX}$

فإن خوارزمية الحل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية تتضمن الخطوات الآتية:

– <u>الخطوة (1) :</u>

ونفرض إن $K = 1$ ، ثم نجعل $\lambda = \lambda^{(1)} = 0$

حيث إن $F(\lambda^{(1)}) \geq 0$.

– <u>الخطوة (2) :</u>

نجد $X^{(K)}$ والذي يمثل الحل الأمثل لمسألة البرمجة الرياضية

$$F(\lambda^{(K)}) = [\, C(x) - \lambda^{(K)} * D(x) \,] \longrightarrow \text{MAX}$$

– <u>الخطوة (3) :</u>

إذا كانت $F(\lambda^{(K)}) = 0$ أو $F(\lambda^{(K)}) \leq \delta$ ، حيث إن (δ : إقل كمية ثابتة غير سالبة) .

نتوقف عن الحل ونجعل

$$X^{(K)} = X^{(*)}$$
$$\lambda^{(K)} = \lambda^{(*)}$$

تمثل الحل الأمثل .

عكس ذلك إذهب الى الخطوة (4) .

– الخطوة (4) :

أحسب $\lambda^{(K+1)} = \frac{C(x^{(K)})}{D(x^{(K)})}$

وإجعل K = K +1 ، وإذهب الى الخطوة (2) .

4-2-4- الطريقة التكميلية لحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية [3,2]

لو كان لدينا النموذج الآتي :

$$\text{Max } Z(x) = \frac{C^T X + \propto}{d^T X + \beta}$$

Subject to

$Ax \leq b$

$X \geq 0$ and Integer

فأن خوارزمية الحل تكون كما يأتي :

1. يصمم جدول الحل (الجدول الأول في الطريقة المبسطة) بحيث يحتوي السطر الأول منه على قيم Z_e والتي تمثل معاملات دالة الهدف الجديدة والتي تحسب من القانون الآتي :

$Z_e = Z_2 C^T _ Z_1 d^T$

حيث أن Z_1 و Z_2 تمثلان قيمة معادلة البسط والمقام على التوالي بعد التعويض عن قيم X الناتجة ، و d,c تمثلان معاملات دالة هدف البسط والمقام على التوالي .

2. تحتوي سطور الجدول من السطر الثاني الى السطر m+1 على المتغيرات المهملة ($s_1, s_2, \ldots, s_m$).
3. السطر m+2 , m+3 يمثل قيم d,c مضروبة بأشارة سالبة .
4. نطبق الطريقة المبسطة على الجدول ، ويتم إستخراج Z_e مرة واحدة من القانون أعلاه ووضعها في الجدول والأستمرار بالحل الى حين الوصول الى الحل الأمثل والذي سيكون حلاً محلياً وقد يكون أحياناً شاملاً لكن ليس بشكل عام .
5. ومن ثم إستخدام أسلوب التفريع والتحديد أو أسلوب قطع المستوي لكومري لإيجاد الحل العددي الصحيح ، والتي سيتم توضيحها في الفقرتين (أ) و (ب) أدناه :

أ- أسلوب التفريع والتحديد [1] Branch and Bound Technique

وهو أسلوب آخر من أساليب حل مسائل البرمجة الصحيحة ، تم نشر هذا الأسلوب عام 1960 من قبل Land and Doig وتم تطويره بعد ذلك من قبل Dakin عام 1965 ، أما الخطوات الأساسية لهذا الأسلوب فهي :

– نجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة Simplixmethod بعد إهمال قيد الأعداد الصحيحة للمتغيرات فإذا كان الحل (جميع القيم) أعداد صحيحة كان هو الحل المطلوب ، وإذا لم نحصل على ذلك يتم إتباع مايأتي (نستمر بالخطوة التالية) .

– نقوم بتجزئة المسألة الأصلية الى مسألتين ، وذلك بإختيار أحد المتغيرات الأساسية ذو القيمة غير العددية بشكل عشوائي ويتم عمل قيدين جديدين تضاف الى المسألة الأصلية ، القيد الأول يتكون من العدد الصحيح الأكبر من القيمة غير العددية ، أما القيد الثاني فهو العدد الصحيح الذي يكون أصغر من القيمة العددية .

– تتم المباشرة بحل أحد المسألتين (أحد الفرعين) بعد إضافة القيد الى المسألة الأصلية بالطريقة المبسطة فإذا ظهر الحل أعداد صحيحة كان هو الحل المطلوب وإذا لم نحصل على ذلك نبدأ بحل المسألة الثانية الجديدة (الفرع الثاني) فإذا حصلنا على الأعداد الصحيحة كان هو الحل المطلوب وإذا لم نحصل على ذلك نبدأ بتفريع أحد المسألتين أي بعبارة أخرى نكرر الخطوات السابقة .

ب- أسلوب قطع المستوي لكومري[5،4] Geomory's Cutting-Plane **Technique**

يعد أسلوب قطع المستوي لكومري أول أسلوب تم إستخدامه لحل مسائل البرمجة الصحيحة ، حيث تم نشره عام 1958 ، ولحد الآن لازال من الأساليب الكفوءة لحل مسائل البرمجة الصحيحة ، وتعد من الأساليب المهمة والفعالة في تحويل النتائج غير الممكنة لمشكلات البرمجة الخطية الى نتائج ممكنة تتفق مع واقع الحال ويتم ذلك بإضافة قيود جديدة للمشكلة ، حيث أن القيد المضاف يسمى القطع **(cutting)** وتستمر عملية تكوين قيود جديدة وإضافتها الى المشكلة القديمة حتى يتم الوصول الى الحل الأمثل ، أما خطوات هذا الأسلوب فهي نفس خطوات طريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة) مع الأخذ بنظر الأعتبار مهمة تكوين قيد جديد يضاف الى الإنموذج الرياضي للمشكلة .

4-4-3- طريقة برمجة الأهداف لحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية[8،6]

لغرض تحليل المشاكلات التي تتسم بتعدد وتضارب الأهداف جرى تطوير طريقة لتحليل هذا النوع من المشاكلات تسمى برمجة الأهداف **(Goal programming)** .

تمثل برمجة الأهداف GP إحدى التقنيات التي تبشر بنجاح تحليل قرار متعلق بأهداف متعددة ، وهي أداة فعالة وتعد أسلوباً متطوراً ذي مستوى إختبار عالٍ ، إذ تقدم حلاً معاصراً لنظام معقد ذي أهداف متناقضة وتحل مشاكلات إتخاذ القرار ذا الهدف الواحد والأهداف المتعددة .

إن التطور الكبير في أسلوب برمجة الأهداف GP فسح المجال لإستخدامها في حل أي مشكلة متعددة الأهداف سواء كانت هذه المشكلة خطية أو غير خطية ، سواء صحيحة أو غير صحيحة ، وسواء أستخدمت لهذه المشاكلات الأولوية المفضلة أم الأوزان لتحديد أهمية كل هدف .

أن الفكرة الأساسية في برمجة الأهداف هي تحديد وزن محدد لكل هدف ضمن مستوى الأولوية الواحد ، ثم البحث عن حل يصغر المجموع (المرجح) لإنحرافات دوال الهدف عن أهدافها الخاصة ، أي أن متغيرات الزيادة أو التخفيض للقيود توضع بدل وظيفة الهدف وهي ما يراد تخفيضها .

ويمكن التعبير عن نموذج برمجة الأهداف الخطية بالشكل الرياضي الآتي :

$$\text{Min } \bar{a} = \{ p_1(d_i^-, d_i^+), p_2(d_i^-, d_i^+), \dots, p_k(d_i^-, d_i^+) \}$$

Subject to :

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , i= 1,2,...,m$$

$$X_j , d_i^- , d_i^+ \geq 0$$

حيث أن :

$\bar{a}$: متجه دالة الأنجاز .

P_k : الأولوية k .

X_j : متغير القرار .

C_{ij} : معامل المتغير j في الهدف i .

d_i^- : متغير الأنحراف السالب .

d_i^+ : متغير الأنحراف الموجب .

b_i : قيمة الهدف i .

ويمكن التعبير عن نموذج مع (أولويات موزونة) كما في الصيغة الآتية :

$$\text{Min } \bar{a} = \sum_{i=1}^{m} (p_k w_i^+ , k , d_i^+ + p_s w_i^- , s , d_i^-)$$

إذ إن :

w_i^+ , k : يمثل عامل الوزن للأولوية k الخاصة بمتغير الأنحراف الموجب .

w_i^- , s : يمثل عامل الوزن للأولوية s الخاصة بمتغير الأنحراف السالب .

Subject to :

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad , i= 1,2,...,m$$

$$X_j , d_i^- , d_i^+ \geq 0$$

طالما إن المتغيرات الأنحرافية d_i^- و d_i^+ لا يمكن جمعها معاً فسوف يساوى أحدهما أو كلاهما صـــفراً ، أي أن :

$$d_i^+ * d_i^- = 0$$

كما ينطبق شرط عدم السالبية على جميع المتغيرات ، أي إن :

$$d_i^- \ , \ d_i^+ \geq 0$$

لإن دالة الهدف في مسائل البرمجة الكسرية يمكن تحويلها الى دالتين أحدهما دالة البسط (الهدف الأول) والأخرى دالة المقام (الهدف الثاني) ، وبما أن طريقة برمجة الأهداف تستطيع حل المشاكلات ذات الأهداف المتعددة والمتناقضة ، لذلك يمكن أستخدامها في حل مشاكلات البرمجة الكسرية .

4- الجانب التطبيقي

5-1- وصف البيانات اللازمة لبناء الإنموذج الرياضي

فيما يأتي توضيح للبيانات التي تم الحصول عليها من سجلات الشركة لسنة 2013 ، حيث شملت هذه البيانات (تكلفة صنع الوحدة الواحدة من كل منتج ، سعر بيع الوحدة الواحدة من كل منتج ،ربح الوحدة الواحدة من كل منتج ، التكاليف الإضافية ، الأرباح الإضافية ، الكميات المتوفرة (المتاحة) من المواد الأولية ، كمية المواد الأولية الداخلة في صنع كل منتج ، الطاقات الأنتاجية ، عدد ساعات العمل في اليوم ، عدد العاملين في الشركة ، الوقت المستغرق لصناعة هذه المنتجات) .

جدول رقم (1) تفاصيل كلفة الصنع لكل منتج بالدينار العراقي

ت	نوع المنتج	وحدة القياس	المواد الأولية المباشرة 1	المواد المساعدة المباشرة 2	المواد المساعدة غير المباشرة 3	كلفة الصنع (3+2+1)4
1-	مدفأة نفطية	عدد	106000	2500	2500	111000
2-	مجمدة 13 قدم	عدد	320000	16500	5000	341500
3-	مجمدة 10 قدم	عدد	285000	12000	5000	302000
4-	ثلاجة 19 قدم	عدد	536000	12000	5000	553000
5-	ثلاجة 16 قدم	عدد	475000	11500	3000	489500
6-	ثلاجة 15 قدم	عدد	350000	11500	2000	363500
7-	ثلاجة 9 قدم	عدد	290000	11500	2000	303500
8-	طباخ صالون	عدد	423000	-	6000	429000

جدول رقم (2) التكاليف الكلية وسعر البيع والهامش الصناعي لكل منتج بالدينار العراقي

ت	نوع المنتج	وحدة القياس	كلفة الصنع 4	المصاريف الأخرى 5	التكاليف الكلية (5+4)6	سعر البيع 7	الهامش الصناعي (6 −7)8
1-	مدفأة نفطية	عدد	111000	22000	133000	150000	17000
2-	مجمدة 13 قدم	عدد	341500	22000	363500	425000	61500
3-	مجمدة 10 قدم	عدد	302000	22000	324000	400000	76000
4-	ثلاجة 19 قدم	عدد	553000	22000	575000	610000	35000
5-	ثلاجة 16 قدم	عدد	489500	22000	511500	535000	23500
6-	ثلاجة 15 قدم	عدد	363500	22000	385500	425000	39500
7-	ثلاجة 9 قدم	عدد	303500	22000	325500	335000	9500
8-	طباخ صالون	عدد	429000	22000	451000	455000	4000

جدول رقم (3) المصاريف الإضافية (الكلف الإضافية) بالدينار العراقي

ت	أسم الحساب	المصاريف الإضافية (كلف إضافية)
1-	الأدوات الإحتياطية	186562
2-	المياه والكهرباء	10959
3-	تجهيزات العاملين	8569
4-	الوقود والزيوت	95512
5-	مستلزمات خدمية	662133
6-	فوائد مدينة	707676
7-	إندثارات	350979
	مجموع المصاريف	2022390

جدول رقم (4) الإيرادات الإضافية (الأرباح الإضافية) بالدينار العراقي

ت	أسم الحساب	الإيرادات الإضافية (الأرباح الإضافية)
1-	إيرادات بيع مخلفات	190000
2-	إيراد خدمات الصيانة والتصليح	20000
	مجموع الأيرادات	210000

جدول رقم (5) الكميات المتوفرة (المتاحة) من المواد الأولية

ت	المادة الأولية	وحدة القياس	الكميات المتوفرة (المتاحة)
1-	فريون 12	كغم	17677
2-	فريون11	كغم	70370
3-	آيزو	كغم	95000
4-	بوليول	كغم	65460
5-	فريزر المنيوم (ثلاجة 9 قدم)	عدد	700
6-	فريزر المنيوم (ثلاجة 15 قدم)	عدد	290
7-	مبادل حراري (ثلاجة 9 قدم)	عدد	800
8-	مبادل حراري (ثلاجة 15 قدم)	عدد	800
9-	درایر	عدد	7100
10-	ضاغط 1/6 حصان	عدد	2000
11-	ثرموستات (ثلاجة)	عدد	800
12-	كوندينسر (ثلاجة 9 قدم)	عدد	600
13-	كوندينسر (ثلاجة 15 قدم)	عدد	2620
14-	حديد ثلاجة (أسود)	كغم	63000
15-	الواح بلاستك (باب)	عدد	3475
16-	الواح بلاستك (قلب)	عدد	800
17-	دايركاوتشوك كامل (ثلاجة 9 قدم)	عدد	600
18-	دايركاوتشوك كامل (ثلاجة 15 قدم)	عدد	300
19-	باودر طلاء أبيض	كغم	6960
20-	أنابيب المنيوم	كغم	5400
21-	مبادل حراري (مجمدة	عدد	3000
22-	ضاغط 1/4 حصان	عدد	1500
23-	ثرموستات (مجمدة)	عدد	3000
24-	كوندينسر (مجمدة 10 قدم)	عدد	7630
25-	كوندينسر (مجمدة 13 قدم)	عدد	3000
26-	حديد مجمدة (مصبوغ) بريبيتد (مطلي مسبقاً)	كغم	30000
27-	الواح بلاستك (باب) مجمدة	عدد	4500
28-	صفائح المنيوم (بطن فريزر كبير)	كغم	55000
29-	دايركاوتشوك كامل (مجمدة 10 قدم)	عدد	225
30-	دايركاوتشوك كامل (مجمدة 13 قدم)	عدد	3000
31-	طاقم مدفأة	عدد	6000
32-	فتيلة	عدد	7000
33-	باودر طلاء صوبة (بيجي،جوزي،رصاصي)	كغم	11000
34-	حديد أسود (صوبة)	كغم	65000
35-	حديد مغلون	كغم	11000
36-	حديد ستنلس ستيل	كغم	8000
37-	هيكل طباخ (طقم كامل)	عدد	1500

جدول رقم (6) كمية المواد الأولية اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج

ت	المادة الأولية / نوع المنتج	X_1 مدفأة نفطية	X_2 مجمدة 13 قدم	X_3 مجمدة 10 قدم	X_4 ثلاجة 19 قدم	X_5 ثلاجة 16 قدم	X_6 ثلاجة 15 قدم	X_7 ثلاجة 9 قدم	X_8 طباخ صالون
1-	فريون 12	–	0.290	0.190	–	–	0.260	0.180	–
2-	فريون11	–	1.200	1.300	–	–	1.105	0.765	–
3-	آيزو	–	4.200	3.700	–	–	3.185	2.205	–
4-	بوليول	–	2.900	2.500	–	–	2.210	1.53	–
5-	فريزر المنيوم (ثلاجة 9 قدم)	–	–	–	–	–	–	1	–
6-	فريزر المنيوم (ثلاجة 15 قدم)	–	–	–	–	–	1	–	–
7-	مبادل حراري (ثلاجة 9 قدم)	–	–	–	–	–	–	1	–
8-	مبادل حراري (ثلاجة 15 قدم)	–	–	–	–	–	1	–	–
9-	درایر	–	1	1	–	–	1	1	–
10-	ضاغط 1/6 حصان	–	–	–	1	1	1	1	–
11-	ثرموستات (ثلاجة)	–	–	–	–	–	1	1	–
12-	كوندينسر (ثلاجة 9 قدم)	–	–	–	–	–	–	1	–
13-	كوندينسر (ثلاجة 15 قدم)	–	–	–	–	–	1	–	–
14-	حديد ثلاجة (أسود)	–	–	–	–	–	39	31	–
15-	الواح بلاستك (باب)	–	–	–	–	–	1	1	–
16-	الواح بلاستك (قلب)	–	–	–	–	–	1	1	–
17-	دايركاوتشوك كامل (ثلاجة 9 قدم)	–	–	–	–	–	–	1	–
18-	دايركاوتشوك كامل (ثلاجة 15 قدم)	–	–	–	–	–	1	–	–
19-	باودر طلاء أبيض	–	–	–	–	–	1.200	1	–
20-	أنابيب المنيوم	–	1.800	1.800	–	–	–	–	–
21-	مبادل حراري (مجمدة	–	1	1	–	–	–	–	–
22-	ضاغط ¼ حصان	–	1	1	–	–	–	–	–
23-	ثرموستات (مجمدة)	–	1	1	–	–	–	–	–
24-	كوندينسر (مجمدة 10 قدم)	–	–	1	–	–	–	–	–
25-	كوندينسر (مجمدة 13 قدم)	–	1	–	–	–	–	–	–
26-	حديد مجمدة (مصبوغ) بريبيتد (مطلي مسبقاً)	–	15.610	15.610	–	–	–	–	–
27-	الواح بلاستك (باب) مجمدة	–	1	1	–	–	–	–	–

28-	صفائح المنيوم (بطن فريزر كبير)	–	5.500	3.250	–	–	–	–	–	–
29-	دايركاوتشوك كامل (مجمدة 10 قدم)	–	–	1	–	–	–	–	–	–
30-	دايركاوتشوك كامل (مجمدة 13 قدم)	–	1	–	–	–	–	–	–	–
31-	طاقم مدفأة	1	–	–	–	–	–	–	–	–
32-	فتيلة	1	–	–	–	–	–	–	–	–
33-	باودر طلاء صوبة (بيجي،جوزي،رصاصي)	0.310	–	–	–	–	–	–	–	–
34-	حديد أسود (صوبة)	10.755	–	–	–	–	–	–	–	–
35-	حديد مغلون	1.170	–	–	–	–	–	–	–	–
36-	حديد ستنلس ستيل	1.300	–	–	–	–	–	–	–	–
37-	هيكل طباخ (طقم كامل)	–	–	–	–	–	–	–	–	1

جدول رقم (7) الطاقة الأنتاجية للمنتجات للفترة من 2013/1/1 لغاية 2013/12/31

ت	نوع المنتج	وحدة القياس	الطاقة التصميمية للمكائن	الطاقة الأنتاجية المتاحة
1-	مدفأة نفطية	عدد	170000	25000
2-	مجمدة 13 قدم	عدد	45000	9000
3-	مجمدة 10 قدم	عدد	8000	2000
4-	ثلاجة 19 قدم	عدد	–	10000
5-	ثلاجة 16 قدم	عدد	–	10000
6-	ثلاجة 15 قدم	عدد	100000	8000
7-	ثلاجة 9 قدم	عدد	70000	8000
8-	طباخ صالون	عدد	165000	15000

جدول رقم (8) عدد العاملين في كل مصنع

ت	أسم المعمل	عدد العاملين
1-	معمل الثلاجات	91
2-	معمل المجمدات	60
3-	معمل المدافيء النفطية والطباخات الغازية	100
	المجموع الكلي للعاملين	251

جدول رقم (9) أيام العمل الفعلية للفترة من 2013/1/1 لغاية 2013/12/31

ت	الشهر	العدد الفعلي	وحدة القياس
1-	كانون الثاني (ك2)	18	يوم
2-	شباط	20	يوم
3-	آذار	20	يوم
4-	نيسان	22	يوم
5-	مايس	21	يوم
6-	حزيران	20	يوم
7-	تموز	23	يوم
8-	آب	20	يوم
9-	أيلول	22	يوم
10-	تشرين الأول (ت1)	20	يوم
11-	تشرين الثاني (ت2)	18	يوم
12-	كانون الأول (ك1)	22	يوم
	المجموع الكلي خلال السنة	246	يوم

جدول رقم (10) الوقت المستغرق لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج من الثلاجات بالساعة

ت	نوع المنتج / مسار التصنيع	ثلاجة 9 قدم	ثلاجة 15 قدم	ثلاجة 19 قدم	ثلاجة 16 قدم
1-	قسم التحضيرات والرفوف	0.5	0.5	0	0
2-	قسم السمكرة والبلاستك	0.116	0.116	0	0
3-	قسم الصباغة	2	2	0	0
4-	قسم التجميع والشحن	0.5	0.5	0.5	0.5
5-	قسم الفحص النهائي والتغليف	2	2	2	2
	مجموع الأوقات	5.116	5.116	2.5	2.5

جدول رقم (11) الوقت المستغرق لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج من المجمدات بالساعة

ت	نوع المنتج / مسار التصنيع	مجمدة 13 قدم	مجمدة 10 قدم
1-	قسم السمكرة والبلاستك	0.17	0.17
2-	قسم التجميع والشحن	1	1
3-	قسم الفحص النهائي والتغليف	2	2
	مجموع الأوقات	3.17	3.17

جدول رقم (12) الوقت المستغرق لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج من المدافيء والطباخات بالساعة

ت	نوع المنتج / مسار التصنيع	مدفأة نفطية	طباخ صالون
1-	قسم الكابسات	1	0
2-	قسم اللحام المنقط	0.5	0
3-	قسم الطلاء الزيتي	2	0
4-	قسم التجميع النهائي	1	1
5-	قسم الفحص النهائي والتغليف	0.5	0.5
	مجموع الأوقات	5	1.5

آلية حساب الوقت المتاح للعاملين في معمل (الثلاجات ، المجمدات ، المدافيء والطباخات) خلال سنة 2013 تتوضح من خلال المعادلات أدناه :

الوقت المتاح خلال السنة = عدد العاملين * عدد أيام العمل في السنة * عدد ساعات العمل في اليوم بالساعة
= 6 * 246 * 91
= 134316 ساعة عمل في السنة (الوقت المتاح لإنتاج الثلاجات)

الوقت المتاح خلال السنة = عدد العاملين * عدد أيام العمل في السنة * عدد ساعات العمل في اليوم بالساعة
= 6 * 246 * 60
= 88560 ساعة عمل في السنة (الوقت المتاح لإنتاج المجمدات)

الوقت المتاح خلال السنة = عدد العاملين * عدد أيام العمل في السنة * عدد ساعات العمل في اليوم بالساعة
= 6 * 246 * 100
= 147600 ساعة عمل في السنة (الوقت المتاح لإنتاج المدافيء والطباخات)

ومما تم ذكره في أعلاه يمكن صياغة قيود الوقت للمسألة وكما يأتي

- قيد الوقت المتاح لمعمل الثلاجات

$$2.5x_4 + 2.5x_5 + 5.116x_6 + 5.116x_7 \leq 134316$$

- قيد الوقت المتاح لمعمل المجمدات

$$3.17x_2 + 3.17x_3 \leq 88560$$

- قيد الوقت المتاح لمعمل المدافيء النفطية والطباخات

$$5x_1 + 1.5x_8 \leq 147600$$

جدول رقم (13) حجم الطلب على المنتجات

ت	نوع المنتج	وحدة القياس	حجم الطلب
1-	مدفأة نفطية	عدد	6000
2-	مجمدة 13 قدم	عدد	1200
3-	مجمدة 10 قدم	عدد	200
4-	ثلاجة 19 قدم	عدد	800
5-	ثلاجة 16 قدم	عدد	260
6-	ثلاجة 15 قدم	عدد	250
7-	ثلاجة 9 قدم	عدد	400
8-	طباخ صالون	عدد	800

2-5- **بناء الإنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة** (I.L.F.P)

إن بناء الإنموذج الرياضي لمسألة **(I.L.F.P)** الخاصة بمشكلة البحث يتطلب تكوين دالة الهدف بالإستفادة من المعلومات التي وردت في الجداول (1) و(2) و(3) و(4) أعلاه ، وكذلك بناء القيود المفروضة على العملية الأنتاجية والتي تحد من تحقيق الأهداف المرجوة التي تطمح الشركة الى تحقيقها ، وتتمثل هذه القيود بما يأتي :

1- قيود المواد الأولية [بالإعتماد على كميات المواد الأولية المتاحة في الجدول رقم (5) ونسبة كمية المواد الأولية في كل منتج وكما في الجدول (6)] .

2- قيود الطاقات الأنتاجية [بالإعتماد على جدول رقم (7)] .

3- قيود الوقت (ساعات العمل) [بالإعتماد على الجداول رقم (8) و (9) و(10) و(11) و (12)] .

4- قيود حجم الطلب [بالإعتماد على الجدول رقم (13)] .

5- قيد عدم السالبية .

وكما سنبينها في أدناه :

$$Maximize\ Z(x)= \frac{17000X_1+61500X_2+76000X_3+35000X_4+23500X_5+39500X_6+9500X_7+4000X_8+210000}{133000X_1+363500X_2+324000X_3+575000X_4+511500X_5+385500X_6+325500X_7+451000X_8+2022390}$$

Subject to

$$0.290X_2 + 0.190X_3 + 0.260X_6 + 0.180X_7 \le 17677 \quad \dots (2)$$
$$1.200X_2 + 1.300X_3 + 1.105X_6 + 0.765X_7 \le 70370 \quad \dots (3)$$
$$4.200X_2 + 3.700X_3 + 3.185X_6 + 2.205X_7 \le 95000 \quad \dots (4)$$
$$2.900X_2 + 2.500X_3 + 2.210X_6 + 1.53X_7 \le 65460 \quad \dots (5)$$
$$X_7 \le 700 \quad \dots (6)$$
$$X_6 \le 290 \quad \dots (7)$$
$$X_7 \le 800 \quad \dots (8)$$
$$X_6 \le 800 \quad \dots (9)$$
$$X_2 + X_3 + X_6 + X_7 \le 7100 \quad \dots (10)$$
$$X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \le 2000 \quad \dots (11)$$
$$X_6 + X_7 \le 800 \quad \dots (12)$$
$$X_7 \le 600 \quad \dots (13)$$
$$X_6 \le 2620 \quad \dots (14)$$
$$39X_6 + 31X_7 \le 63000 \quad \dots (15)$$
$$X_6 + X_7 \le 3475 \quad \dots (16)$$
$$X_6 + X_7 \le 800 \quad \dots (17)$$
$$X_7 \le 600 \quad \dots (18)$$
$$X_6 \le 300 \quad \dots (19)$$
$$1.200X_6 + X_7 \le 6960 \quad \dots (20)$$
$$1.800X_2 + 1.800X_3 \le 5400 \quad \dots (21)$$
$$X_2 + X_3 \le 3000 \quad \dots (22)$$
$$X_2 + X_3 \le 1500 \quad \dots (23)$$
$$X_2 + X_3 \le 3000 \quad \dots (24)$$
$$X_3 \le 7630 \quad \dots (25)$$
$$X_2 \le 3000 \quad \dots (26)$$
$$15.610X_2 + 15.610X_3 \le 30000 \quad \dots (27)$$
$$X_2 + X_3 \le 4500 \quad \dots (28)$$
$$5.500X_2 + 3.250X_3 \le 55000 \quad \dots (29)$$
$$X_3 \le 225 \quad \dots (30)$$
$$X_2 \le 3000 \quad \dots (31)$$
$$X_1 \le 6000 \quad \dots (32)$$
$$X_1 \le 7000 \quad \dots (33)$$
$$0.310X_1 \le 11000 \quad \dots (34)$$
$$10.755X_1 \le 65000 \quad \dots (35)$$
$$1.170X_1 \le 11000 \quad \dots (36)$$
$$1.300X_1 \le 8000 \quad \dots (37)$$
$$X_8 \le 1500 \quad \dots (38)$$
$$X_1 \le 25000 \quad \dots (39)$$
$$X_2 \le 9000 \quad \dots (40)$$
$$X_3 \le 2000 \quad \dots (41)$$

$$X_4 \le 10000 \quad \dots (42)$$

$$X_5 \le 10000 \quad \dots (43)$$

$$X_6 \le 8000 \quad \dots (44)$$

$$X_7 \le 8000 \quad \dots (45)$$

$$X_8 \le 15000 \quad \dots (46)$$

$$2.5x_4 + 2.5x_5 + 5.116x_6 + 5.116x_7 \le 134316 \quad \dots (47)$$

$$3.17x_2 + 3.17x_3 \le 88560 \quad \dots (48)$$

$$5x_1 + 1.5x_8 \le 147600 \quad \dots (49)$$

$$x_1 \ge 6000 \quad \dots (50)$$

$$x_2 \ge 1200 \quad \dots (51)$$

$$x_3 \ge 200 \quad \dots (52)$$

$$x_4 \ge 800 \quad \dots (53)$$

$$x_5 \ge 260 \quad \dots (54)$$

$$x_6 \ge 250 \quad \dots (55)$$

$$x_7 \ge 400 \quad \dots (56)$$

$$x_8 \ge 800 \quad \dots (57)$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 \ge 0 \text{ and Integer} \quad \dots (58)$$

5-3- حل الإنموذج الرياضي لمشكلة البحث بإستعمال طريقة خوارزمية Dinkelbach

سيتم حل الإنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة (I.L.F.P) الذي تم بناءه في الفقرة (5–2) بإستعمال طريقة خوارزمية Dinkelbach وكما تم ذكرها في الفقرة (4–4–1) ، حيث تم التوصل الى إنموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$F(\lambda^{(3)}) = [\, C(x) - \lambda^{(3)} * D(x) \,] \longrightarrow \text{MAX}$$
$$= [\, C(x) - 0.09884 * D(x) \,] \longrightarrow \text{MAX}$$
$$\text{MAX } F(\lambda^{(3)}) = 3854.28\, X_1 + 25571.66\, X_2 + 43975.84\, X_3 - 21833\, X_4 - 27056.66\, X_5 + 1397.18\, X_6 - 22672.42\, X_7 - 40576.84\, X_8 + 10106.9724$$

Subject to :

القيود لهذه المسألة هي نفس قيود المسألة التي تم بناءها في الفقرة (5–2) والمتمثلة بالمعادلات من (2–58) .

وبحل الإنموذج الخطي المذكور في أعلاه بإستعمال برنامج WINQSB سنحصل على النتائج الآتية :

$$X^{(3)} = (6000, 1275, 225, 800, 260, 290, 400, 800)^T$$

أي إن

$$F(\lambda^{(3)}) = 3854.28 * (6000) + 25571.66 * (1275) + 43975.84 * (225) - 21833 * (800) - 27056.66 * (260) + 1397.18 * (290) - 22672.42 * (400) - 40576.84 * (800) + 10106.9724$$

$$\therefore F(\lambda^{(3)}) = 7828.0724 > 0$$

نلاحظ إن قيمة λ غير متزايدة حيث إن $\lambda^{(3)} = \lambda^{(4)} = 0.09884$ ، وهذا يعني إن $F(\lambda^{(3)}) =$ 7828.0724 تمثل أقل كمية ثابتة غير سالبة يمكن أن نتوصل إليها ، لذلك سوف نتوقف عن الحل ونجعل

$X^{(3)} = X^{(*)}$

$\lambda^{(3)} = \lambda^{(*)}$

والتي تمثل الحل الأمثل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة (I.L.F.P).

أي إن :

$X^{(*)}=(6000, 1275, 225, 800, 260, 290, 400, 800)^T$ هو الحل الأمثل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة (I.L.F.P) .

أي الكمية المثلى من كل منتج وكما يأتي :

كمية الإنتاج المثلى من المدافيء النفطية = 6000 وحدة .

كمية الإنتاج المثلى من المجمدات حجم 13 قدم = 1275 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من المجمدات حجم 10 قدم = 225 وحدة .

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 19 قدم = 800 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 16 قدم = 260 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 15 قدم = 290 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 9 قدم = 400 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الطباخات الصالون = 800 وحدة.

وعليه فأن

$$\lambda^{(*)} = \frac{C(x^{(*)})}{D(x^{(*)})} = 0.09884$$

تمثل قيمة دالة الهدف لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة (I.L.F.P) .

أي إن نسبة تعظيم الأرباح الى التكاليف هو 0.09884 $\cong$ 0.10 ، وهذا يعني إن تعظيم العائد للشركة من الأرباح هو 10% .

5-3- حل الإنموذج الرياضي لمشكلة البحث بالطريقة التكميلية

سيتم حل الإنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة (I.L.F.P) الذي تم بناءه في الفقرة (5-2) بإستعمال الطريقة التكميلية والتي تم توضيحها في الفقرة (4-4-2) أعلاه ، حيث تم التوصل الى إنموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z_e(x) = {} & 6450630000 X_1 + 48041985000 X_2 + 85661640000 X_3 \\ & - 49966350000 X_4 - 59888835000 X_5 - 10705950000 X_6 \\ & - 49142295000 X_7 - 86620440000 X_8 \end{aligned}$$

Subject to :

القيود لهذه المسألة هي نفس قيود المسألة التي تم بناءها في الفقرة (5-2) والمتمثلة بالمعادلات من (2-58).

وبحل الإنموذج الخطي المذكور في أعلاه بإستعمال برنامج WINQSB سنحصل على النتائج الآتية :

X^T=(6000, 1275 , 225 , 800 , 260 , 250 , 400 , 800)

يمثل الحل الأمثل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة (I.L.F.P) ، أي إن قيمة الحل الأمثل لمتغيرات القرار (الكمية المثلى من كل منتج) تكون كما يأتي :

كمية الإنتاج المثلى من المدافيء النفطية = 6000 وحدة .

كمية الإنتاج المثلى من المجمدات حجم 13 قدم = 1275 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من المجمدات حجم 10 قدم = 225 وحدة .

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 19 قدم = 800 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 16 قدم = 260 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 15 قدم = 250 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 9 قدم = 400 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الطباخات الصالون = 800 وحدة.

يجب أن نعوض قيمة المتجه X^T في دالة الهدف لمسألة البرمجة الكسرية لإيجاد قيمتها .

$$\text{Max } Z(x)= \frac{17000(6000)+61500(1275)+76000(225)+35000(800)+23500(260)+39500(250)+9500(400)+4000(800)+210000}{133000(6000)+363500(1275)+324000(225)+575000(800)+511500(260)+385500(250)+325500(400)+451000(800)+2022390}$$

أي إن

$$\text{Max } Z(x)= \frac{248707500}{2514727500}$$

$$\text{Max } Z(x) = 0.0989$$

تمثل قيمة دالة الهدف لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة (I.L.F.P) .

ومما ذكر في أعلاه فقد تم إيجاد العدد الأمثل لكل منتج والذي يحقق أقصى ربح ممكن وبأقل التكاليف ، إعتماداً على المواد الأولية المتوفرة (المتاحة) في الشركة وبما يحقق الأستغلال الأمثل للموارد المتاحة .

أي أن نسبة تعظيم الأرباح الى التكاليف هو 0.0989 $\cong$ 0.10 ، وهذا يعني إن تعظيم العائد للشركة من الأرباح هو 10% .

5-4- **حل الإنموذج بطريقة برمجة الأهداف** Goal programming

بما إن مسألة البرمجة الكسرية تتعامل ما بين هدفين متضادين (متضاربين) ، فبالإمكان حل الإنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة لمشكلة البحث بإستعمال برمجة الأهداف Goal programming (G.P) وكما سيوضح في أدناه:

إن الإنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الصحيحة هو

Max

$$Z(x) = \frac{17000X1+61500X2+76000X3+35000X4+23500X5+39500X6+9500X7+4000X8+210000}{133000X1+363500X2+324000X3+575000X4+511500X5+385500X6+325500X7+451000X8+2022390}$$

Subject to :

القيود لهذه المسألة هي نفس قيود المسألة التي تم بناءها في الفقرة (5-2) والمتمثلة بالمعادلات من (2-58) .

سنقوم بإضافة متغير جديد X_9 حيث إن معاملات هذا المتغير تمثل الحدود الثابتة في دالتي البسط والمقام من دالة الهدف الكسرية ، وإن مقدار هذا المتغير هو عبارة عن قيمة ثابتة تساوي 1 ويتم تمثيل ذلك في قيود المسألة بالمعادلة $X_9=1$ ، وكذلك نحول مسألة البرمجة الكسرية الى برمجة الأهداف حيث أن :

G_1= **Max**

Z_1= 17000X1 + 61500X2 + 76000X3 + 35000X4 + 23500X5 + 39500X6 + 9500X7 + 4000X8 + 210000X9

G_2= **Min**

Z_2=

133000X1 + 363500X2 + 324000X3 + 575000X4 + 511500X5 + 385500X6 + 325500X7 + 451000X8 + 2022390X9

Subject to :

القيود لهذه المسألة هي نفس قيود المسألة التي تم بناءها في الفقرة (5-2) والمتمثلة بالمعادلات من (2-58) ، مع إضافة قيد جديد وهو عبارة عن المعادلة $X_9=1$ الى قيود المسألة ، وذلك للتخلص من الحد الثابت في كل من بسط ومقام دالة الهدف وإدخال القيم الثابتة بصفة معامل لمتغير ثابت مقداره يساوي 1 ، والغرض من هذا الإجراء هو لإدخال معادلتي البسط والمقام (الهدف الأول والهدف الثاني على التوالي) بأكملها في البرنامج وإخراج قيم المتغيرات وقيمة دالة الهدف بخطوة واحدة دون الحاجة لإعادة حساب قيمة دالة الهدف من خلال تعويض قيم المتغيرات وجمعها بالقيم الثابتة .

وبحل الإنموذج الخطي المذكور في أعلاه بإستعمال برنامج WINQSB سنحصل على النتائج الآتية :

قيمة الحل الأمثل لمتغيرات القرار (الكمية المثلى من كل منتج) تكون كما يأتي :

كمية الإنتاج المثلى من المدافيء النفطية = 6000 وحدة .

كمية الإنتاج المثلى من المجمدات حجم 13 قدم = 1275 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من المجمدات حجم 10 قدم = 225 وحدة .

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 19 قدم = 1050 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 16 قدم = 260 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 15 قدم = 290 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الثلاجات حجم 9 قدم = 400 وحدة.

كمية الإنتاج المثلى من الطباخات الصالون = 1500 وحدة.

يجب أن نعوض القيمة المثلى لمتغيرات القرار في دالة الهدف لمسألة البرمجة الكسرية لإيجاد قيمتها وكما يأتي :

Max
Z(x)=

$$\frac{17000(6000)+61500(1275)+76000(225)+35000(1050)+23500(260)+39500(250)+9500(400)+4000(1500)+210000\,(1)}{133000(6000)+363500(1275)+324000(225)+575000(1050)+511500(260)+385500(250)+325500(400)+451000(1500)+2022390\,(1)}$$

$$\text{Max } Z(x) = \frac{261837488}{2991619840}$$

Max Z(x) = 0.0875

أي أن نسبة تعظيم الأرباح الى التكاليف بأستعمال طريقة برمجة الأهداف هو 0.0875 $\cong$ 0.09 . وهذا يعني إن تعظيم العائد للشركة من الأرباح هو 9% .

6- **النتائج النهائية**

بعد أن تم حل الإنموذج الرياضي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة لمشكلة البحث بالطرق التي تم ذكرها (طريقة خوارزمية Dinkelbach ، الطريقة التكميلية ، طريقة برمجة الأهداف) ، حيث سنبين في الجدول أدناه النتائج النهائية المثلى التي تم الحصول عليها من كل طريقة وكما يأتي :

جدول رقم (20) النتائج النهائية المثلى لطرائق الحل الثلاثة

ت	نوع المنتج	الرمز الرياضي	وحدة القياس	خوارزمية Dinkelbach	الطريقة التكميلية	برمجة الأهداف
-1	مدفأة نفطية	X_1	عدد	6000	6000	6000
-2	مجمدة 13 قدم	X_2	عدد	1275	1275	1275
-3	مجمدة 10 قدم	X_3	عدد	225	225	225
-4	ثلاجة 19 قدم	X_4	عدد	800	800	1050
-5	ثلاجة 16 قدم	X_5	عدد	260	260	260
-6	ثلاجة 15 قدم	X_6	عدد	290	250	290
-7	ثلاجة 9 قدم	X_7	عدد	400	400	400
-8	طباخ صالون	X_8	عدد	800	800	1500
	نسبة تعظيم الأرباح الى التكاليف			0.0998	0.0998	0.0875

ومن الجدول أعلاه يتضح بأن النتائج التي تم التوصل إليها من خلال حل الإنموذج بطريقة (خوارزمية Dinkelbach ، الطريقة التكميلية) كانت متقاربة وحققت نفس النسبة للتعظيم والتي تساوي 10% تقريباً .

أما طريقة برمجة الأهداف فكانت النتائج المتحققة تختلف عن الطريقتين السابقتين وكانت نسبة تعظيم العائد أقل مما جاءت به كل من طريقة (خوارزمية Dinkelbach ، الطريقة التكميلية) حيث كانت النسبة 9% تقريباً .

7- الإستنتاجات والتوصيات

7-1- الإستنتاجات

تم التوصل الى أهم الإستنتاجات وكما مبين في أدناه :

1- من خلال حل الإنموذج الرياضي الخاص بتعظيم الأرباح نسبة الى التكاليف لشركة الصناعات الخفيفة بأستعمال طرق حل مسألة البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة تم إيجاد الحل الأمثل الذي يحدد الكميات المثلى المنتجة من كل نوع والتي تؤدي الى تعظيم دالة الأرباح الكلية بأقل التكاليف وكما مبين في الجدول رقم (20) .

2- من خلال تطبيق طرق الحل الثلاثة والمتمثلة بطريقة (خوارزمية Dinkelbach ، الطريقة التكميلية ، برمجة الاهداف) كانت هناك إختلافات بسيطة بين الطريقتين الأولى والثانية تكاد تكون متساوية من حيث تحديد الكميات المثلى المنتجة وتعظيم نسبة الأرباح الى التكاليف بالمقارنة مع طريقة برمجة الأهداف ، وكما مبين في الجدول رقم (20) .

3- من خلال إستخدام طريقة خوارزمية Dinkelbach ، نلاحظ إن عدد التكرارات في الخوارزمية كانت (3) تكرارات أي إن K=3 ، وفي كل تكرار يتم حساب قيمة λ جديدة ودالة هدف خطية جديدة بالإعتماد على نفس قيود المسألة الكسرية .

4- إن طريقة حل الإنموذج الكسري بالطريقة التكميلية يتطلب فقط تحويل دالة الهدف الكسرية الى دالة هدف خطية مع نفس قيود المسألة الكسرية ويتم حل الإنموذج والحصول على النتائج مباشرة من دون الحاجة الى تكرارات .

5- نلاحظ إن النتائج التي توصلنا إليها من خلال حل الإنموذج الكسري بالطريقتين (خوارزمية Dinkelbach ، الطريقة التكميلية) كانت متقاربة حيث كانت نسبة تعظيم الأرباح الى التكاليف متساوية وهي 10% للطريقتين .

6- عند إستخدام طريقة برمجة الأهداف على بيانات الشركة لسنة 2013 ، كانت النتائج المتحققة تختلف عن نتائج الطريقتين السابقتين وكانت نسبة تعظيم العائد أقل مما جاءت به كل من طريقة (خوارزمية Dinkelbach ، الطريقة التكميلية) حيث كانت نسبة تعظيم الأرباح الى التكاليف هي 9% تقريباً ، وهذا منطقي لأن (G.P) تحاول أن تخلق الإنسجام لتحقيق الهدفين المتناقضين .

7- إن إستخدام إسلوب البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة يعد أفضل من إستخدام إسلوب برمجة الأهداف ، وذلك لأن نسبة تعظيم الأرباح الى التكاليف كانت أفضل مما كانت عليه في برمجة الأهداف.

7-2- التوصيات

1- يوصي الباحث من خلال النتائج التي توصل إليها بأن تعتمد شركة الصناعات الخفيفة إنتاج الكميات المثلى التي تم الحصول عليها من الطريقتين (خوارزمية Dinkelbach ، الطريقة التكميلية) للحصول على أعظم نسبة ربح الى التكاليف وإستغلال الطاقات المعطلة .

2- يوصي الباحث بأن تقوم الشركة بتحديث الخطوط الإنتاجية وإستحداث خطوط جديدة لمواكبة التطور الحاصل في المجال الصناعي ، وذلك من خلال تحديث القوالب والتصاميم وشراء الماكنات الحديثة لجعل المنتوج الوطني بمواصفات حديثة معاصرة تشجع الزبائن على شرائها .

3- يوصي الباحث بأن تقوم الشركة بتشجيع التسويق من خلال الأعلان عن منتجاتها بالقنوات المرئية وكذلك وسائل الإعلام السمعية والمقروءة .

4- يوصي الباحث جميع الشركات الأنتاجية بالإستفادة من الإنموذج الرياضي لتعظيم الأرباح نسبة الى التكاليف ، لأن هذا الإنموذج عام وليس مخصص لشركة معينة .

5- نظراً لعدم وجود حزم برامج خاصة بحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية الصحية وتكون بنفس الوقت مكلفة حين شرائها من الشركات المتخصصة بالبرامجيات خارج العراق ، لذلك نوصي بأن يكون هناك عمل متعاون بين أقسام الدراسات العليا في كليات جامعة بغداد بالتنسيق بين تخصص علوم الحاسبات وبحوث العمليات لغرض إعداد حزم برامج مخصصة لحل مسائل البرمجة الكسرية من دون اللجوء لطرق التحويلات الخطية .

6- نوصي بأستخدام أسلوب البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة في حل مشكلات المؤسسات والشركات التي لديها أهداف متضاربة وترغب بتحقيقها في نفس الوقت .

7- نوصي بأستخدام أسلوب البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة متعددة الأهداف (M.I.L.F.P) مستقبلاً.

8- في حال كون البيانات غير مؤكدة نوصي بإستخدام أسلوب البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة الضبابية مستقبلاً .

المصادر :

أ. المصادر العربية

1- حسن ، ضوية سلمان ، جابر ، عدنان شمخي ، الشمري ، نذير عباس ، " بحوث العمليات " ، مكتبة الجزيرة للطباعة والنشر ، الطبعة الأولى ، العراق – بغداد ، 2013.

2- حسن،عباس أحمد و متلف ،رشا جلال و صادق، فاطمة أحمد ، " مقارنة لحل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة مكملات المتغيرات المهملة والطريقة التكميلية " ، مجلة كلية التربية الأساسية ، العدد 77(2013) ، 781-789 .

3- الحسناوي ، وليد خالد جابر ، " دراسة وتحليل طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية " ، رسالة ماجستير ، قسم العلوم التطبيقية ، الجامعة التكنولوجية ، (2004) .

4- حمدان ، فتحي خليل ، " بحوث العمليات مع تطبيقات بأستخدام الحاسوب " ، دار وائل للنشر ، الطبعة الأولى ، عمان ، 2010 .

5- الفضل ، مؤيد عبد الحسين ، " المنهج الكمي في إتخاذ القرارات الإدارية " ، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ، عمان- الأردن ، 2010 .

6- لايذ، واثق حياوي ، " إتخاذ القرارات ذات الدوال الكسرية بأستخدام طريقة برمجة الأهداف " ، مجلة الهندسة ، العدد 8 ، مجلد 18 ، (2012) .

ب. المصادر الأجنبية

7- B.S.Nehra , " Astudy on various Applications of Generalized fractional programming problems " , university of Rajastham , Jaipur-302004, India , 2013.

8- C.LEON,F.Palacios , " Evaluation of rejected cases in an acceptance system with data evelopment analysis and goal programming " , Journal of the operational research society , 60(2009) , 1411-1420 .

9- E.B.Bajalinov , " Linear Fractional programming : Theory , Methods , Applications and Software " , Kluwer Academic Publishers , Boston , 2003 .

10- H.Zhu,W.W.H.uang , " Planning of regional energy system : An inexact mixed – integer fractional programming model" , Applied Energy , 113(2014) , 500-514 .

11- J.B.G.Frenk& S.Schaible , " Fractional programming " , ERS-2004-074-LIS. , 2004.

12- M.Kumar & B.B.Pal , " Dinkelbach Approach for solving Interval – valued Multiobjective Fractional Programming problems using Goal Programming " , International Journal of computer Applications (0975-8887) , Vol.57 , No.8 , 2012 .

13- P.Pandian & M.Jayalakshmi , " on solving Linear Fractional programming problem " , Modern Applied Science , Vol.7 , N0.6 , 2013 .

14- R.CABALLERO & M.HERNANDEZ , " Resolutionof the Linear Fractional Goal programming problem " , Revista Electronica de comunicaciones Y Trabajos de Asepuma . Rect@,2010, Valumen 11 , p.27-40 .

15- S.C.Sharma & A.Bansal , " An Integer Solution of Fractional programming problem " , Gen. Math. Notes , Vol.4 , No.2 , 2011 , pp.1-9 .

16- S.Tantawy," AN ITERATIVE METHOD FOR SOLVING LINEAR FRACTIONAL PROGRAMMING (LFP) PROBLEM " Mathematical and computational applications , 13(2008) , 147-151.

17- Stancu-Minasian,I.M., "Fractional Programming: Theory, Methods and Applications" ; Kluwer Academic Publishers , 1997.

18- T.Matsui , Y.Saruwatari & M.Shigeno , " An Analysis of Dinkelbach،s Algorithm for 0-1 fractional programming problems " , Metr 92-14 , 1992 .

بناء إنموذج رياضي لتعظيم عائد الشركة الإنتاجية بإستعمال البرمجة الكسرية الخطية الصحيحة – مع تطبيق عملي

Building a mathematical model to Maximize the productivity company's revenue using Integer linear fractional programming – with practical application

Abstract

This search summaries in building a mathematical model to the issue of Integer linear Fractional programming and finding the best solution of Integer linear Fractional programming (I.L.F.P) that maximize the productivity company's revenue by using the largest possible number of productivity units and maximizing denominator objective which represent's proportion of profits to the costs , thus maximizing total profit of the company at the lowest cost through using Dinkelbach algorithm and the complementary method on the Light industries company data for 2013 and comparing results with Goal programming methods results .

It is clear that the final results of resolution and Dinkelbach algorithm and complementary method are very near and maximizing proportion is equal , while, Goal programming methods is less .

From this , we can exclude that the Integer linear Fractional programming considers the best one , this result is logical because goal programming are trying to create harmony to achieve the goal of contrasting , This is considered as amodel in the model to maximize the return on any company productivity.

key words:- Building a mathematical model , Integer Linear Fractional programming (I.L.F.P) , Dinkelbach algorithm , complementary method , Goal programming (G.P) .