استعمال أسلوب بيز لتقدير معلمات نموذج النمو الأسي المعدل الذي يعاني من مشكلة وجود الارتباط الذاتي وباعتماد قيم مختلفة لمعلمة الارتباط- باستعمال المحاكاة

د. سيف الدين هاشم قمر

الجامعة العراقية

Email: dr.saifhkamar@gmail.com

المستخلص

تناول هذا البحث أسلوب بيز وباستخدام نموذج النمو الأسي المعدل، حيث استُخدم هذا النموذج بشكل كبير في دراسة ظاهرة النمو، وقد تم التركيز على ثلاثة أنواع من الدوال السابقة (المعلوماتية، والمرافقة الطبيعية، والدالة المعتمدة على التجارب السابقة) لتوظيفها في أسلوب بيز، وحيث أن معظم مشاهدات ظاهرة النمو تعتمد على بعضها البعض، فإن ذلك يقود إلى وجود ارتباط بين تلك المشاهدات مما يمثل مشكلة في عدم دقة النتائج، الأمر الذي دعانا لمعالجة هذه المشكلة التي تسمى الارتباط الذاتي، ولتحقيق ذلك تم استخدام أسلوب بيز.

هدفت هذه الدراسة لمعرفة تأثير الارتباط الذاتي على تقديرات بيز، ولتحقيق هذا الهدف استُخدم أسلوب المحاكاة، حيث تم توليد عينات عشوائية بمعلمات معلومة وقيم مختلفة للارتباط، ومن النتائج الحسابية اتضحت أن جميع النتائج تأثرت بقيمة معامل الارتباط ، مما يعطي دلالة واضحة على حساسية مقدرات بيز بالارتباط الذاتي وأن هذه الحساسية تزداد كلما زاد حجم العينة.

المصطلحات الرئيسية للبحث/ أسلوب بيز- التقدير- النمو الأسي المعدل - الارتباط الذاتي .

مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية

المجلد 20

العدد 78

لسنة 2014

الصفحات 339-358

المقدمة Introduction

من المعروف أن النمو يعتمد على الزمن، وأن العلاقة بين الحجم (الذي يمثل متغير النمو) والزمن هي علاقة غير خطية، لذلك فإنه من المناسب استخدام نماذج الانحدار غير الخطية لوصف ذلك النمو، وقد استخدم نموذج النمو الأسي المعدل في هذه الدراسة لوصف ظاهرة النمو المطلوبة، ويعد هذا النموذج من أشهر نماذج النمو الأسية ذات الاتجاه الذي يقول إن مقدار النمو ينخفض بنسبة ثابتة، وحيث أن أغلب مشاهدات ظواهر النمو تكون معتمدةً بعضها على البعض الآخر الذي بدوره يؤدي إلى وجود ارتباط بين تلك المشاهدات، ومن المؤكد أن هذا الارتباط سيؤثر بشكلٍ سلبي على تحليل تلك الظواهر مما يدعو إلى العمل على معالجة مثل هذه المشكلة التي تسمى مشكلة الارتباط الذاتي الذي تناولته هذه الدراسة باستخدام أسلوب بيز لتقدير معلمات نموذج النمو المستخدم.

منحنى النمو الأسي المعدل Modified Exponential Growth Curve

يمكن تعريف منحنى النمو بأنه؛ أي تعبير عن حجم مجتمع بوصفه دالة لمتغير الزمن (t) بحيث يصف مسار نمـــوه [10]. وتعتبر منحنيات النمو من ضمن الدوال الرياضية المهمة التي تتعامل مع البيانات الطولية (Longitudinal data) المتمثلة بمشاهدات متكررة على طول الزمن الفعال التي يمكن أن تصاغ كعملية تصادفية [12]، ويختلف هذا النوع من البيانات عن أغلب أنواع البيانات الأخرى من حيث أنها يجب أن تأخذ بالحسبان الاعتمادية للاستجابة الحالية على الزمن الماضي.

يعد منحنى النمو الأسي المعدل واحداً من منحنيات النمو الأسية المشهورة، لكثرة استخدامه في تطبيقات واسعة، ويصف هذا المنحنى الاتجاه الذي يقول إن مقدار النمو ينخفض بنسبة ثابتة، وأن للمنحنى حداً أعلى لا يتجاوزه [4]، وصيغته العامة هي:

$$f(t) = \alpha + \lambda \theta^{t} \qquad (1)$$

حيث أن:

α : تمثل الحد الأعلى لحجم المجتمع (أو المفردة) بعد فترة من الزمن أي ($t \to \infty$).

λ : تمثل الحجم عند الزمن (0).

θ : تمثل معدل النمو النسبي (Relative Growth Rate) خلال الزمن (t).

يمتاز هذا المنحنى بأنه يناسب ظواهر النمو للمجتمعات التي لحجمها حد أعلى لا يتجاوزه ولكنه غير ملائم لتلك التي لها معدل نمو نسبي غير متناقص $(\theta > 1)$ ومقدار نمو غير ثابت. وقد استخدم هذا المنحنى في البحوث الحياتية وخاصة عن المجهريات ومعدلات الوفاة بسبب مرض معين [1].

تقدير معلمات نماذج الانحدار غير الخطية في حالة وجود الارتباط الذاتي باستخـــدام أسلوب بيز

Using Bayesian Method to Estimate the Parameters of Nonlinear Regression Models with treatment Autocorrelation

إن النماذج غير الخطية هي نماذج معقدة ومتداخلة الأمر الذي جعل تحليلها وطرق تقدير معلماتها هي الأخرى معقدة وتتطلب جهد كبير للوقوف على الصعوبات والمعوقات التي تعمل على تعقيد العمل ضمن هذه النماذج ومحاولة تجاوزها أو معالجتها باستخدام الطرق الإحصائية الملائمة، وبشكلٍ عام يمكن أن تأخذ نماذج الانحدار غير الخطية الصيغة الآتية:

$$\underline{Y} = f(\underline{X};\underline{\theta}) + \underline{\varepsilon}$$

(2)

حيث أن: $\underline{X} = \left(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_k\right)'$ **و** $\underline{\theta} = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p\right)$ **و** $\underline{\varepsilon}$ **: يمثل متجه الأخطاء العشوائية من مرتبة (n×1).**

وأن: $E(\underline{Y}) = f(\underline{X};\underline{\theta})$

إذ افترضـــــنا أن $[E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}]$. **وتحت افتراض أن الأخــــــطاء العشـــــوائية غير مرتبطـــة وأن** $[Var(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 I_n]$ **فيـــكون** $[\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I_n)]$ **، من هنا فإن المشاهدة (i) للمتغير المعتمد يمكن أن تكتب كالآتي:**

$$Y_i = f(\underline{X}_i;\underline{\theta}) + \varepsilon_i$$

(3)

ويمكن تسمية الدالة $f(\underline{X}_i;\underline{\theta})$ **بدالة الاستجابة غير الخطية (Nonlinear response function) إذ تكون غير خطية في المعلمات، ويعمد الكثير من الباحثين في أغلب الأحيان إلى عملية تحويل دوال الاستجابة الغير خطية إلى دوال خطية باستخدام بعض التحويلات الخاصة، ويمكن أن تتحول في أحيان كثيرة إلى دوال استجابة خطية بشكل جوهري [11].**

بافتراض أن توزيع الأخطاء لنموذج الانحدار غير الخطي المتعدد (2) يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (First Order Auto Correlation) أي أن:

$$\underline{\varepsilon} = \rho\underline{\varepsilon}_{-1} + \underline{e}$$

إذ أن عناصر $(\underline{e})$ **تمثل متجه الأخطاء العشوائية التي تتوزع توزيعاً طبيعياً، وبشكل مستقل بوسط** $(\underline{\theta})$ **ومصفوفة تباين–تباين مشترك** $\left(\sigma_e^2 I_n\right)$ **وأن** $\underline{\varepsilon}' = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\right)$ **و** $\underline{\varepsilon}'_{-1} = \left(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\right)$ **يمثلان متجهي الأخطاء المرتبطة، ومن مرتبة (n x 1) وأن:**

$$E\left(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}'\right) = \sigma_e^2\, \Psi$$

إذ أن (Ψ) مصفوفة معرفة موجبة من مرتبة (n×n)

$$\Psi=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1}\\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2}\\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \rho\\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & \rho & 1\end{bmatrix}$$

وأن (ρ) تمثل معلمة الارتباط الذاتي، ومن ثم فإن النموذج (2) يمكن إعادة كتابته بشكل عام باستخدام مفكوك سلسلة تايلور للدالة $f(\underline{X};\underline{\theta})$ واختصار هذا المفكوك عند المشتقة الأولى كما في الصيغة الآتية:

$$\underline{Y}^*=D\underline{\beta}+\underline{\varepsilon}$$

(4)

ومن ثم يمكن إعادة صياغة النموذج (4) بوجود معلمة الارتباط الذاتي كالآتي:

$$\underline{Y}^*=\rho\underline{Y}^*_{-1}+(D-\rho D_{-1})\underline{\beta}+\underline{e}$$

(5)

إذ أن $\underline{Y}^{*\prime}=(Y_1^*,Y_2^*,...,Y_n^*)$ و$\underline{Y}^{*\prime}_{-1}=(Y_0^*,Y_1^*,...,Y_{n-1}^*)$ يمثلان متجهي المشاهدات للمتغير المعتمد، ومن مرتبة (n×1)، و $\underline{\beta}'=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_p)$ يمثل متجه معلمات النموذج ومن مرتبة (1×p) وأن:

$$D=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\dots D_{1p}\\ D_{21} & D_{22}\dots D_{2p}\\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots\\ D_{n1} & D_{n2}\dots D_{np}\end{bmatrix}\quad D_{-1}=\begin{bmatrix}D_{01} & D_{02} & \cdots & D_{0p}\\ D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ D_{(n-1)\times1} & D_{(n-1)\times2} & \cdots & D_{(n-1)\times p}\end{bmatrix}$$

ولتقدير معلمات نموذج الانحدار المتعدد (5) وعن طريق تطبيق قاعدة (Jeffery) للمعلمات $(\underline{\beta})$ و (σ_e) [2] [16]، وبافتراض أن كلاً من المعلمات $(\rho,\sigma_e,\underline{\beta})$ تتوزع بشكل مستقل الواحدة عن الأخرى، فإن دوال الكثافة الاحتمالية السابقة غير المعلوماتية لكل من المعلمات $(\operatorname{Log}\sigma_e,\rho,\underline{\beta})$ التي ستُعتمد هنا ستأخذ الشكل الآتي [6]:

$$f(\underline{\beta},\sigma_e)\propto\sigma_e^{-1}$$

(6)

$$f(\rho)\propto(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}$$

(7)

إذ أن كل من $(\underline{\beta})$ و $(\operatorname{Log}\sigma_e)$ تتوزع توزيعاً منتظماً ضمن المجال $(-\infty<\underline{\beta}<\infty)$ و $(0<\sigma_e<\infty)$ و (ρ) لها دالة كثافة احتمالية بتوزيع بيتا (Beta) بالمعلمات (½ ,½) ضمن المجال $(|\rho|<1)$ أي أن هذا التوزيع السابق غير المعلوماتي يُعتمد فقط عندما تكون دالة الارتباط الذاتي للأخطاء مستقرة.

ومن الصيغتين (5) و (7) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية السابقة المشتركة لكل من المعلمات $\left(\text{Log}\,\sigma_e, \rho, \underline{\beta}\right)$ وهي:

$$f\left(\underline{\beta}, \sigma_e, \rho\right) \propto \left(1-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sigma_e^{-1}$$
(8)

ودالة الإمكان ستأخذ الشكل الآتي[8]:

$$L\left(\underline{Y}^* / \underline{\beta}, \sigma_e, \rho\right) \propto \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_e^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right)'\left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right)\right]\right\}$$
(9)

إذ أن:

$$W = R\,\underline{Y}^*$$
$$D^* = R\,D$$

وأن (R) تمثل مصفوفة تحويل من مرتبة $(n\times n)$ معرفة كما يأتي:

$$R = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

وبضرب دالة الكثافة الاحتمالية السابقة (8) بدالة الإمكان (9) يتم الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة الآتية:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho, \sigma_e / Y^*\right) \propto \frac{1}{\sigma_e^{n+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right)'\left(\underline{W} - D^*\underline{\beta}\right)\right]$$
(10)

وبإجراء عملية التكامل للدالة (10) بالنسبة إلى حدود $\left(\sigma_e\right)$ نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة لـــ $\left(\rho, \sigma^2\right)$ وهي[6]:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho / \underline{Y}^*\right) \propto (RSS)^{-\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{\left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}\right)' D^{*\prime} D^* \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}\right)}{RSS}\right]^{-\frac{n}{2}}$$
(11)

إذ أن:

$$RSS = v\,\hat{\sigma}_e^2 = \left(\underline{W} - D^*\hat{\underline{\beta}}\right)'\left(\underline{W} - D^*\hat{\underline{\beta}}\right) \quad , \quad v = n - p$$

$$\hat{\underline{\beta}} = \left(D^{*\prime} D^*\right)^{-1} D^{*\prime}\,\underline{W}$$

والدالة $f\left(\underline{\beta}/\rho,\underline{Y}^{*}\right)$ في حالة افتراض (ρ) معلومة وبالاعتماد على الصيغة (11) يكون لها توزيع (t) متعدد المتغيرات (Multivariate Student t) بوسط $\left(\hat{\underline{\beta}}\right)$ الذي يمثل تقدير بيز للمعلمات $\left(\underline{\beta}\right)$ في حالة اعتماد دالة خســـارة تربيعية.

يُستخرج تقدير معلمات نموذج الانحدار غير الخطي (2) عند التكرار الأول حسب الصيغة:

$$\hat{\underline{\theta}}^{(1)}=\underline{\theta}^{(0)}+\hat{\underline{\beta}}^{(0)} \tag{12}$$

وتستمر عمليات التكرار بوضع $\left(\hat{\underline{\theta}}^{(1)}\right)$ بدلاً من $\left(\hat{\underline{\beta}}^{(0)}\right)$ حتى يتم الحصول على تقديرات متقاربة.

أما في حالة افتراض أن تكون المعلومات المتوافرة حول المعلمات المراد تقديرها متواضعة كالحدود الدنيا والعليا للمعلمات، ففي هذه الحالة يمكن أن نستخدم نفس قاعدة (Jeffery) ولكن بمجال مقيد للمعلمات بدلاً من أن يكون المجال من $(-\infty)$ إلى (∞) ومن ثم سيكون لدينا توزيع منتظم بقيود حول المعلمات، فتحت افتراض (p) من المعلمات وأن:

$$a_j<\beta_j<b_j \qquad , \qquad j=1,2,\ldots,p$$

إذ أن:

a_j: تمثل الحد الأدنى للمعلمة (β_j)

b_j: تمثل الحد الأعلى للمعلمة (β_j)

وباعتماد القيود أعلاه على دالة الكثافة الاحتمالية السابقة لمتجه المعلمات $\left(\underline{\beta}\right)$، وبافتراض أن $(\operatorname{Log}\sigma_e)$ تتوزع توزيعاً منتظماً ضمن المجال $(0<\sigma_e<\infty)$ و (ρ) لها دالة كثافة احتمالية بتوزيع بيتا (Beta)، وبشكل مستقل لكل معلمة عن الأخرى، يمكن ببساطة استخراج دالة الكثافة الاحتمالية السابقة المشتركة للمعلمات $\left(\underline{\beta},\sigma_e,\rho\right)$ وهي:

$$f\left(\underline{\beta},\sigma_e,\rho\right)\propto\frac{1}{\sigma} \quad , \quad \underline{a}<\underline{\beta}<\underline{b} \quad , \quad 0<\sigma<\infty \tag{13}$$

وبضرب الصيغة (13) بدالة الإمكان الموضحة في الصيغة (9) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة لـــ $\left(\underline{\beta},\sigma\right)$ وهي:

$$f\left(\underline{\beta},\sigma_e,\rho/\underline{Y}^{*}\right)\propto\frac{1}{\sigma_e^{(n+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^{2}}\left[v\hat{\sigma}_e^{2}+\left(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}\right)'D^{*\prime}D^{*}\left(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}\right)\right]\right\} \;,\; \underline{a}<\underline{\beta}<\underline{b} \;,\; 0<\sigma_e<\infty \tag{14}$$

وبأخذ التكامل للصيغة (14) ولحدود المعلمة (σ_e) نحصل على التوزيع اللاحق المشترك للمعلمات $(\underline{\beta},\rho)$:

$$f\left(\underline{\beta},\rho/\underline{Y}^*\right)\propto\left[v+\left(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}\right)'\frac{D^{*\prime}D^*}{\hat{\sigma}_e^2}\left(\underline{\beta}-\hat{\underline{\beta}}\right)\right] \quad , \quad \underline{a}<\underline{\beta}<\underline{b}$$

(15)

والصيغة (15) وبافتراض أن (ρ) معلومة تمثل توزيع **t** متعدد المتغيرات المبتور **(Truncated Multivariate t)**.

وللحصول على تقدير بيز للمعلمات $(\underline{\beta})$ يجب الحصول على قيمة التوقع الرياضي لعناصر $(\underline{\beta})$ حسب الدالة الاحتمالية (15) وذلك باستخدام أسلوب التكاملات العددية لهذه الدالة [9].

ويمكن الحصول على تقدير بيز لمتجه المعلمات $(\underline{\theta})$ بالنسبة للنموذج غير الخطي المتعدد (2) حسب الصيغة (12)، ومن ثم القيام بعملية التكرار المشروحة سابقاً للوصول إلى التقديرات النهائية.

فضلاً عن كل ما تقدم افترض الباحثان **(Cholton)** و **(Troskie)** [3]، أن $(\underline{\beta})$ تمتلك توزيعاً طبيعياً مسبقاً متعدد المتغيرات كما في الصيغة الآتية:

$$f\left(\underline{\beta}/\sigma\right)=\frac{1}{\sigma^p}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\underline{\beta}-\bar{\underline{\beta}}\right)'Q^{-1}\left(\underline{\beta}-\bar{\underline{\beta}}\right)\right]\right\} \quad , \quad -\infty<\underline{\beta}<\infty$$

(16)

وأن (σ_e) لها توزيعاً سابقاً هو معكوس گاما كما في الصـيغة الآتية:

$$f(\sigma)\propto\frac{1}{\sigma^{(a+1)}}\exp\left(\frac{-a\hat{\sigma}^2}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad 0<\sigma<\infty \quad , \quad a>0$$

(17)

وأن (ρ) لها توزيعاً سابقاً هو بيتا، وكما موضـح في الصـيغة (7)، وبضرب التوزيعات الثلاثة يمكن الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية السابقة المشتركة للمعلمات $(\rho,\sigma_e,\underline{\beta})$ ومن ثم ضربها بدالة الإمكان الموضحة في الصيغة (9) لنحصل على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة للمعلمات وهي:

$$f\left(\underline{\beta},\rho,\sigma_e/\underline{Y}^*\right)\propto\frac{1}{\sigma^{(n+p+a+1)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[a\hat{\sigma}_e^2+\left(\underline{W}-D^*\underline{\beta}\right)'\left(\underline{W}-D^*\underline{\beta}\right)+\left(\underline{\beta}-\bar{\underline{\beta}}\right)'Q^{-1}\left(\underline{\beta}-\bar{\underline{\beta}}\right)\right]\right\}$$

(18)

إذ أن $(Q,a,\hat{\sigma}_e^2,\underline{\beta})$ تعتمد على المعلومات المسبقة.

وبإجراء عملية التكامل للصيغة (18) بالنسبة لحدود (σ_e) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة لكل من $(\rho,\underline{\beta})$ وهي:

$$f\left(\underline{\beta},\rho/\underline{Y}^*\right)\propto\left[a\hat{\sigma}_e^2+\left(\underline{W}-D^*\underline{\beta}\right)'\left(\underline{W}-D^*\underline{\beta}\right)+\left(\underline{\beta}-\bar{\underline{\beta}}\right)'Q^{-1}\left(\underline{\beta}-\bar{\underline{\beta}}\right)\right]^{\frac{-(n+p+a)}{2}}$$

(19)

والصيغة الأخيرة (19) هي (Kernel of Multivariate – t)، وتحت افتراض أن (ρ) معلومة فإن تقدير بيز للمعلمات $(\underline{\beta})$ هو:

$$\hat{\underline{\beta}} = \left(D^{*'} D^{*} + Q^{-1}\right)^{-1} \left(Q^{-1}\overline{\underline{\beta}} + D^{*'}\,\underline{W}\right)$$

(20)

الصيغة الأخيرة (20) تمثل مقدر بيز للمعلمات $(\underline{\beta})$ في حالة اعتماد دالة خسارة تربيعية، ومن ثم نحصل على التقدير للمعلمات $(\underline{\theta})$ الخاصة بالنموذج غير الخطي كما شُرح سابقاً باستخدام أسلوب التكرار.

وتقوم الحالة الأخيرة التي تمت دراستها في هذا البحث على أساس استخدام المعلومات التي نحصل عليها من التجارب السابقة فضلاً عن المعلومات التي نحصل عليها من العينة المخصوصة بالبحث، وبالأخذ بنظر الاعتبار معالجة مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء للتجارب المستخدمة، ويتم تسخير هذه المعلومات السابقة بعد صياغتها كدالة توزيع احتمالية سابقة معلوماتية مع المعلومات التي نحصل عليها من التجربة تحت البحث التي تكون بصيغة دالة الإمكان من أجل الحصول على توزيع ملائم يمكن من خلاله الحصول على مقدرات بيز للمعلمات المراد تقديرها، وإذا رمزنا لمشاهدات العينة من التجربة السابقة بـــ $\left(\underline{Y}_1^{*}, D_1\right)$ ولحجم العينة السابقة بـــ (n_1)، ولمشاهدات العينة من التجربة تحت البحث بـــ $\left(\underline{Y}_2^{*}, D_2\right)$ ولحجم العينة تحت البحث (n_2)، تكون دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمعلمات $\left(\underline{\beta}, \sigma_1\right)$ كالآتي:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho, \sigma_1 / \underline{Y}_1^{*}\right) \propto \frac{1}{\sigma_1^{(n+1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left[v_1\hat{\sigma}_1^2 + \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_1\right)' D_1{}' D_1 \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_1\right)\right]\right\}$$

(21)

إذ أن: $v_1 = n_1 - p$

وأن الصيغة (21) تمثل دالة كثافة احتمالية سابقة لمعلمات العينة المدروسة التي لها دالة إمكان بمعلمات $\left(\underline{\beta}, \sigma_2\right)$ ومشاهدات $\left(\underline{Y}_2^{*}, D_2\right)$ وبالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ تعتمد على نوع العلاقة بين المعلمتين (σ_1) و (σ_2)، فتحت افتراض أن $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma)$ إذ اعتمدنا على تجربة سابقة واحدة فقط. وبالاعتماد على دالة التوزيع السابق الموضح في الصيغة (18) للمعلمات $\left(\underline{\beta}, \rho, \sigma_1\right)$، يمكن الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة عن طريق ضرب دالة التوزيع السابق بدالة الإمكان الأعظم الخاصة بمشاهدات العينة المدروسة كالآتي[14]:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho, \sigma_e / \underline{y}_1^{*}, \underline{y}_2^{*}\right) \propto \frac{1}{\sigma_e^{(n_1+n_2+1)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[v_1\hat{\sigma}_{e_1}^2 + v_2\hat{\sigma}_{e_2}^2 + \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_1\right) D_1^{*'} D_1^{*} \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_1\right) \right.\right.$$
$$\left.\left. \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_2\right) D_2^{*'} D_2^{*} \left(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}_2\right)\right]\right\} \qquad (22)$$

وبإجراء عملية التكامل للصيغة (22) بالنسبة لحدود (σ_e) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة المشتركة للمعلمات $(\rho, \underline{\beta})$ الآتية:

$$f\left(\underline{\beta}, \rho / \sigma_e, \underline{Y}_1^*, \underline{Y}_2^*\right) \propto \left[1 + \left(\underline{\beta} - \underline{E}\right)' \frac{B^*}{M}\left(\underline{\beta} - \underline{E}\right)\right]^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

(23)

إذ أن:

$$\underline{E} = \left(D_1^{*'} D_1^* + D_2^{*'} D_2^*\right)^{-1}\left(D_1^{*'} \underline{W}_1 + D_2^{*'} \underline{W}_2\right)$$

(24) $\beta^* = D_1^{*'} D_1^* + D_2^{*'} D_2^*$

(25)

$$M = \left(v_1 \hat{\sigma}_{e_1}^2 + v_2 \hat{\sigma}_{e_2}^2 + \underline{\hat{\beta}}_1' D_1^{*'} D_1^* \underline{\hat{\beta}}_1 + \underline{\hat{\beta}}_2' D_2^{*'} D_2^* \underline{\hat{\beta}}_2\right) - \underline{E}' B^* \underline{E}$$

(26)

الصيغة (23) تحت افتراض أن (ρ) معلومة يكون لها توزيع (t) متعدد المتغيرات بوسط $(\underline{E})$ الذي يمثل مقدر بيز للمعلمات $(\underline{\beta})$ في حالة اعتماد دالة خسارة تربيعية، ومن ثم نحصل على التقدير للمعلمات $(\underline{\theta})$ الخاصة بالنموذج غير الخطي، وباستخدام أسلوب التكرار المشروح سابقاً نصل إلى التقدير النهائي.

الجانب التجريبي

لإتمام هذه الدراسة وصولاً للنتائج المطلوبة، فقد استخُدمت لغة R التي تُعد من اللغات المتخصصة بمعالجة المخططات والمسائل الإحصائية المتقدمة وما يرتبط بها من مسائل أخرى، وتعتبر هذه اللغة إصدار متقدم ومكمل للغة S الإحصائية التي أنشئت عام (1980) [5] [13] [15]، إضافة لبرامج ولغات أخرى مثل C و ++C، حيث تم توليد بيانات بحجم تكرار (1000) تجربة تمثل الأخطاء العشوائية وتتوزع توزيعاً طبيعياً مع معاناتها من مشكلة وجود الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى وفق المعادلة $\varepsilon_i = \rho \varepsilon_{i-1} + e_i$، إذ وُلـدت (e_i)على أساس أنها تتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي صفر وانحراف معياري يأخذ القيم (0.5, 2.0)، كما أن أحجام العينات المولدة هي (20) و (40) مشاهدة وبالاعتماد على منحنى النمو الأسي المعدل الموضح في المعادلة (1)[*]، فوُلّدت ثمان نماذج افتراضية كما موضح في الجدول (1) لتمثل هذا النموذج، وباستخدام أربع قيم للارتباط الذاتي هي: (0.9 ,0.8 ,0.7 , 0.6)

(*) اعتمدت القيم الأولية لمعلمات هذا النموذج على بيانات نمو الدخل لإحدى الدول بالاعتماد على المصدر [7].

جدول (1)

القيم الافتراضية لمعلمات نموذج النمو الأسي المعدل

Model	1	2	3	4	5	6	7	8
α	14.1	14.1	14.5	14.5	14.1	14.1	14.5	14.5
λ	3.2	3.5	3.2	3.5	3.2	3.5	3.2	3.5
θ	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
σ	0.5	0.5	0.5	0.5	2	2	2	2

المصدر: من إعداد الباحث.

ومن خلال كل عينة مولدة في أثناء تنفيذ تجربة المحاكاة ولكل نموذج من نماذج النمو الافتراضية المستخدمة قدرت معلمات كل نموذج باستخدام طرق بيز المختلفة التي تعتمد تقديراتها على معلومات العينة المولدة والمعلومات السابقة حول معلمات نموذج النمو المدروس وفي حالة وجود مشكلة الارتباط الذاتي، وفيما يلي عرض لتلك الطرق طبقاً لحالة المعلومات السابقة لمعلمات نموذج النمو.

- المعلومات السابقة على شكل دالة سابقة معلوماتية

بالأخذ بنظر الاعتبار وجود مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء المتتالية، وتحت افتراض أن قيمة الارتباط معلومة، فإنه تم تحديد المعلمات بمتباينات تعرف كمعلومات سابقة يستفاد منها لتقدير معلمات نموذج النمو المخصوص في هذا البحث باستخدام طريقة بيز بالاعتماد على دالة سابقة معلوماتية(*)، حيث تُحدد الحدود العليا والدنيا لتلك المتباينات استناداً إلى فترة الثقة الموضحة في المعادلة (27) وبمستوى معنوية ($\alpha=0.05$) للقيم الافتراضية للمعلمات حسب النموذج المستخدم وبالاعتماد على أحجام العينات المفترضة كافة.

$$C.I.=\beta_j \pm T_{(0.05,n-p)}\cdot(\sigma_e^2(D^{*'}D^*)^{-1})_{jj}^{\frac{1}{2}} \quad , \quad j=1,2,\dots,p$$

(27)

حيث أن (T) تمثل القيمة الجدولية لتوزيع (T) وحسب ما محدد من مستوى معنوية ودرجة حرية، وبقية الرموز تأخذ مسمياتها السابقة نفسها.

ومن تقديرات المعلمات لنموذج النمو الأسي المعدل حُسبت الأوساط الحسابية ومتوسطات مربعات الخطأ لتلك التقديرات، والنتائج مبينة في الجدول (2) والجدول (3) مقربة إلى أربع مراتب عشرية، والرموز المستخدمة تأخذ مسمياتها السابقة نفسها.

(*) اعتُمدت المعادلة (15) كتوزيع لاحق مشترك لـ $(\underline{\beta},\rho)$ وتحت افتراض أن قيمة المعلمة (ρ) معلومة.

جدول (2) الأوساط الحسابية لتقديرات المعلمات (α و λ و θ) ومتوسطات مربعات الخطأ لتلك التقديرات عند حجم عينة مولدة (20) مشاهدة باستخدام دالة سابقة معلوماتية

Model	ρ	$\hat{\alpha}$	MSE	$\hat{\lambda}$	MSE	$\hat{\theta}$	MSE
1	0.6	14.2832	0.1592	3.1323	0.0228	1.2013	0.0000
	0.7	14.0051	0.1728	3.2069	0.0213	1.2000	0.0000
	0.8	14.1613	0.1964	3.1648	0.0244	1.2007	0.0000
	0.9	14.0855	0.2282	3.2042	0.0200	1.2001	0.0000
2	0.6	14.1551	0.1496	3.2098	0.0123	1.2048	0.0000
	0.7	14.1085	0.1449	3.4644	0.0222	1.2008	0.0000
	0.8	14.3714	0.1995	3.4010	0.0280	1.2017	0.0000
	0.9	14.2012	0.1959	3.4591	0.0248	1.2009	0.0000
3	0.6	14.5354	0.1362	3.1536	0.0210	1.2010	0.0000
	0.7	14.5675	0.1558	3.1593	0.0215	1.2008	0.0000
	0.8	14.5083	0.1920	3.1757	0.0234	1.2006	0.0000
	0.9	14.6074	0.1945	3.1675	0.0166	1.2006	0.0000
4	0.6	14.1551	0.1496	3.2098	0.0123	1.2048	0.0000
	0.7	14.6740	0.1667	3.4437	0.0224	1.2010	0.0000
	0.8	14.6622	0.1725	3.4286	0.0250	1.2014	0.0000
	0.9	14.5016	0.1615	3.5183	0.0199	1.1997	0.0000
5	0.6	14.7658	0.2712	3.4284	0.0225	1.2012	0.0000
	0.7	14.1551	0.1496	3.2098	0.0123	1.2048	0.0000
	0.8	14.5329	2.6605	3.0821	0.2993	1.2021	0.0001
	0.9	14.0433	3.1940	3.2149	0.3138	1.2000	0.0001
6	0.6	14.4483	3.2936	3.2975	0.2509	1.1984	0.0001
	0.7	14.0062	2.3116	3.5581	0.2783	1.1993	0.0001
	0.8	14.4572	2.3386	3.4108	0.2544	1.2015	0.0001
	0.9	14.3455	2.2541	3.4701	0.2249	1.2007	0.0001
7	0.6	14.9995	4.6063	3.2511	0.3416	1.2041	0.0001
	0.7	14.1551	0.1496	3.2098	0.0123	1.2048	0.0000
	0.8	15.1085	2.6727	3.0440	0.2948	1.2029	0.0001
	0.9	14.8050	3.2847	3.1404	0.3550	1.2011	0.0001
8	0.6	15.0125	2.3294	3.3337	0.2761	1.2030	0.0001
	0.7	15.0640	2.7994	3.4308	0.2764	1.2010	0.0001
	0.8	14.6927	2.7654	3.6886	0.2975	1.1969	0.0001
	0.9	14.0027	3.6456	3.6181	0.2689	1.1983	0.0001

المصدر: من إعداد الباحث.

نلاحظ من الجدول (2) ما يأتي:

(1) أن قيمة MSE في النموذج الأول والثالث والثامن بشكلٍ عام قد تأثرت بقيم معاملات الارتباط التي استخدمت لتوليد تلك النماذج، حيث زادت قيمة MSE بشكل عام مع ازدياد قيمة معامل الارتباط، بينما كانت النتائج غير منضبطة في النماذج الأخرى.

(2) زيادة قيمة MSE بزيادة قيمة (σ) المستخدمة لتوليد النماذج، ويتضح ذلك جلياً في النماذج الخامس والسادس والسابع والثامن مقارنةً بباقي النماذج الأخرى.

جدول (3) الأوساط الحسابية لتقديرات المعلمات (α و λ و θ) ومتوسطات مربعات الخطأ لتلك التقديرات عند حجم عينة مولدة (40) مشاهدة باستخدام دالة سابقة معلوماتية

Model	ρ	$\hat{\alpha}$	MSE	$\hat{\lambda}$	MSE	$\hat{\theta}$	MSE
1	0.6	14.2285	0.0526	3.1977	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	14.1269	0.0548	3.2002	0.0000	1.2000	0.0000
	0.8	14.2201	0.0860	3.2010	0.0001	1.2000	0.0000
	0.9	14.2820	0.1644	3.2009	0.0001	1.2000	0.0000
2	0.6	14.2645	0.0611	3.4960	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	14.1402	0.0689	3.4998	0.0001	1.2000	0.0000
	0.8	14.2100	0.0842	3.4966	0.0001	1.2000	0.0000
	0.9	14.1962	0.0953	3.4985	0.0000	1.2000	0.0000
3	0.6	14.6159	0.0482	3.1978	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	14.5568	0.0586	3.1977	0.0001	1.2000	0.0000
	0.8	14.6102	0.0957	3.1988	0.0001	1.2000	0.0000
	0.9	14.6788	0.1780	3.1959	0.0001	1.2000	0.0000
4	0.6	14.4971	0.0377	3.5004	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	14.6160	0.0621	3.4994	0.0000	1.2000	0.0000
	0.8	14.5508	0.0796	3.5010	0.0001	1.2000	0.0000
	0.9	14.5939	0.1264	3.4984	0.0001	1.2000	0.0000
5	0.6	14.2374	0.6143	3.1990	0.0006	1.2000	0.0000
	0.7	14.4733	0.9473	3.1971	0.0007	1.2000	0.0000
	0.8	13.9888	1.3573	3.2044	0.0009	1.2000	0.0000
	0.9	14.8133	2.2047	3.1937	0.0010	1.2001	0.0000
6	0.6	14.1727	0.6430	3.4994	0.0006	1.2000	0.0000
	0.7	13.8838	1.0369	3.5056	0.0008	1.2000	0.0000
	0.8	15.1207	2.4049	3.4861	0.0011	1.2001	0.0000
	0.9	14.5838	2.0657	3.5017	0.0011	1.2000	0.0000
7	0.6	14.4528	0.5848	3.1976	0.0006	1.2000	0.0000
	0.7	14.6877	0.9163	3.2028	0.0007	1.2000	0.0000
	0.8	14.2551	1.3900	3.2045	0.0009	1.2000	0.0000
	0.9	14.8109	1.9173	3.1816	0.0013	1.2002	0.0000
8	0.6	14.9934	0.8189	3.4912	0.0006	1.2001	0.0000
	0.7	14.8310	0.8410	3.4976	0.0006	1.2000	0.0000
	0.8	14.9261	1.4011	3.4977	0.0008	1.2000	0.0000
	0.9	14.5705	2.0919	3.5072	0.0012	1.1999	0.0000

المصدر: من إعداد الباحث.

نلاحظ من الجدول (3) ما يأتي:

(1) أن قيمة MSE بشكلٍ عام ولكافة النماذج قد تأثرت بقيم معاملات الارتباط التي استخدمت لتوليد تلك النماذج، حيث زادت قيمة MSE مع ازدياد قيمة معامل الارتباط.

(2) زيادة قيمة MSE بزيادة قيمة (σ) المستخدمة لتوليد النماذج، ويتضح ذلك جلياً في النماذج الخامس والسادس والسابع والثامن مقارنةً بباقي النماذج الأخرى.

- **<u>المعلومات السابقة على شكل دالة سابقة مرافقة طبيعية</u>**

اعتمدت كل من الدالة السابقة الطبيعية (16) لمتجه المعلمات $(\underline{\beta})$ والدالة السابقة (17) للمعلمة (σ_e)، والدالة السابقة (7) للمعلمة (ρ)، لتقدير معلمات نموذج النمو الأسي المعدل باستخدام طريقة بيز باعتماد دالة سابقة مرافقة طبيعية، علماً أن الدالة السابقة المرافقة الطبيعية الناتجة (19) تحدد فيها قيم المتجه $(\underline{\bar{\beta}})$ بالاعتماد على القيم الافتراضية لمعلمات المتجه $(\underline{\beta})$، أما قيم المصفوفة (Q) فتكون كالآتي:

$$\sigma_e^2 Q = \sigma_e^2 (D^{*'} D^*)^{-1}$$

وذلك للنماذج الافتراضية وأحجام العينات المفترضة كافة. ومن تقديرات المعلمات لنموذج النمو الأسي المعدل حُسبت الأوساط الحسابية ومتوسطات مربعات الخطأ لتلك التقديرات، والنتائج مبينة في الجدول (4) والجدول (5) مقربة إلى أربع مراتب عشرية، والرموز المستخدمة تأخذ مسمياتها السابقة نفسها.

جدول (4)

الأوساط الحسابية لتقديرات المعلمات (α و λ و θ) ومتوسطات مربعات الخطأ لتلك التقديرات عند حجم عينة مولدة (20) مشاهدة باستخدام دالة سابقة مرافقة

Model	ρ	$\hat{\alpha}$	MSE	$\hat{\lambda}$	MSE	$\hat{\theta}$	MSE
1	0.6	13.9918	0.2308	3.2317	0.0313	1.1996	0.0000
	0.7	13.5340	0.6126	3.3549	0.0645	1.1975	0.0000
	0.8	13.7723	0.4644	3.2756	0.0497	1.1987	0.0000
	0.9	13.6394	0.9373	3.3048	0.0846	1.1985	0.0000
2	0.6	13.7978	0.7986	3.3219	0.0806	1.2030	0.0000
	0.7	13.7167	0.3840	3.6106	0.0460	1.1985	0.0000
	0.8	14.2340	0.2246	3.4499	0.0290	1.2009	0.0000
	0.9	13.7628	0.4891	3.6062	0.0553	1.1987	0.0000
3	0.6	14.1915	0.2935	3.2560	0.0302	1.1993	0.0000
	0.7	14.2155	0.3760	3.2780	0.0456	1.1988	0.0000
	0.8	14.0841	0.5999	3.3066	0.0651	1.1985	0.0000
	0.9	14.1586	0.8015	3.2803	0.0754	1.1989	0.0000
4	0.6	13.7978	0.7986	3.3219	0.0806	1.2030	0.0000
	0.7	14.4279	0.2530	3.5056	0.0313	1.2002	0.0000
	0.8	13.9899	0.7604	3.6922	0.1023	1.1971	0.0000
	0.9	14.4483	0.6149	3.5336	0.0580	1.1996	0.0000

5	0.6	13.7978	0.7986	3.3219	0.0806	1.2030	0.0000
	0.7	13.2784	6.1063	3.4476	0.9284	1.1967	0.0002
	0.8	11.9772	18.4333	3.7527	2.8324	1.1940	0.0004
	0.9	12.8022	16.8445	3.6487	2.2532	1.1953	0.0004
6	0.6	12.3567	13.9757	4.1774	2.9616	1.1918	0.0003
	0.7	12.8819	9.9890	3.8411	1.6593	1.1970	0.0002
	0.8	12.7512	14.0664	3.9131	2.1715	1.1957	0.0003
	0.9	12.7079	20.6668	3.9143	2.9062	1.1975	0.0004
7	0.6	13.7978	0.7986	3.3219	0.0806	1.2030	0.0000
	0.7	14.0021	6.1752	3.4584	1.1553	1.1973	0.0002
	0.8	13.0628	11.8764	3.6843	2.1170	1.1942	0.0003
	0.9	12.5349	19.1987	3.6200	3.5124	1.1963	0.0004
8	0.6	13.5409	8.5026	3.8391	1.5788	1.1969	0.0002
	0.7	13.5521	9.8959	3.9910	1.9746	1.1941	0.0003
	0.8	12.9261	14.2747	4.3525	3.0549	1.1894	0.0004
	0.9	11.5581	28.7475	4.0687	3.1708	1.1964	0.0005

المصدر: من إعداد الباحث.

نلاحظ من الجدول (4) ما يأتي:

(1) أن قيمة MSE في النموذج الأول والثالث والخامس والسابع والثامن قد تأثرت بقيم معاملات الارتباط التي استخدمت لتوليد تلك النماذج، حيث زادت قيمة MSE بشكل عام مع ازدياد قيمة معامل الارتباط، بينما كانت النتائج غير منضبطة في النموذج الثاني والرابع والسادس.

(2) زيادة قيمة MSE بزيادة قيمة (σ) المستخدمة لتوليد النماذج، ويتضح ذلك جلياً في النماذج الخامس والسادس والسابع والثامن مقارنةً بباقي النماذج الأخرى.

جدول (5)

الأوساط الحسابية لتقديرات المعلمات (α و λ و θ) ومتوسطات مربعات الخطأ لتلك التقديرات عند حجم عينة مولدة (40) مشاهدة باستخدام دالة سابقة مرافقة

Model	ρ	$\hat{\alpha}$	MSE	$\hat{\lambda}$	MSE	$\hat{\theta}$	MSE
1	0.6	14.0967	0.0373	3.2002	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	13.8705	0.1167	3.2049	0.0001	1.2000	0.0000
	0.8	14.0124	0.1030	3.2032	0.0001	1.2000	0.0000
	0.9	13.9390	0.2615	3.2050	0.0001	1.2000	0.0000
2	0.6	14.1593	0.0379	3.4978	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	13.9548	0.0815	3.5026	0.0001	1.2000	0.0000
	0.8	13.9518	0.1214	3.4975	0.0001	1.2000	0.0000
	0.9	13.8904	0.2685	3.4988	0.0001	1.2000	0.0000
3	0.6	14.4842	0.0359	3.1999	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	14.3623	0.0761	3.1996	0.0000	1.2000	0.0000
	0.8	14.3703	0.1164	3.2028	0.0001	1.2000	0.0000
	0.9	14.3421	0.2802	3.1985	0.0001	1.2000	0.0000
4	0.6	14.2935	0.0794	3.5048	0.0001	1.2000	0.0000
	0.7	14.4533	0.0545	3.5024	0.0000	1.2000	0.0000
	0.8	14.2722	0.1642	3.5049	0.0001	1.2000	0.0000
	0.9	14.1969	0.3252	3.5024	0.0001	1.2000	0.0000
5	0.6	13.6422	0.7933	3.2124	0.0006	1.1999	0.0000
	0.7	13.8063	0.9222	3.2088	0.0007	1.1999	0.0000
	0.8	12.7739	3.6032	3.2247	0.0017	1.1998	0.0000
	0.9	13.7149	2.1850	3.2146	0.0013	1.1999	0.0000
6	0.6	13.4552	1.0216	3.5121	0.0007	1.1999	0.0000
	0.7	12.7613	2.8347	3.5295	0.0016	1.1997	0.0000
	0.8	14.4052	1.8776	3.4974	0.0011	1.2000	0.0000
	0.9	13.7111	2.1218	3.5196	0.0014	1.1998	0.0000
7	0.6	13.6943	1.2062	3.2104	0.0006	1.1999	0.0000
	0.7	13.9519	1.2579	3.2210	0.0011	1.1998	0.0000
	0.8	12.9901	4.0287	3.2250	0.0017	1.1998	0.0000
	0.9	13.5645	3.0406	3.1855	0.0014	1.2002	0.0000
8	0.6	14.4859	0.5991	3.5007	0.0005	1.2000	0.0000
	0.7	14.0828	1.0339	3.5084	0.0007	1.1999	0.0000
	0.8	14.0529	1.6443	3.5071	0.0009	1.1999	0.0000
	0.9	13.2165	3.7158	3.5286	0.0020	1.1998	0.0000

المصدر: من إعداد الباحث.

نلاحظ من الجدول (5) ما يأتي:

(1) إن قيمة MSE بشكلٍ عام ولكافة النماذج قد تأثرت بقيم معاملات الارتباط التي استخدمت لتوليد تلك النماذج، حيث زادت قيمة MSE مع ازدياد قيمة معامل الارتباط.

(2) زيادة قيمة MSE بزيادة قيمة (σ) المستخدمة لتوليد النماذج، ويتضح ذلك جلياً في النماذج الخامس والسادس والسابع والثامن مقارنةً بباقي النماذج الأخرى.

- <u>المعلومات السابقة على شكل تجارب سابقة</u>

تولد عشر عينات تُعد كعينات سابقة أثناء تنفيذ تجربة المحاكاة الخاصة بتوليد عينة التجربة الأصلية، وتُستخدم العينات العشر المولدة لتقدير معلمات نموذج النمو الأسي المعدل باستخدام طريقة بيز بالاعتماد على دالة سابقة معتمدة على التجارب السابقة الموضحة في الصيغة (21)،علماً أن توليد تلك العينات السابقة يتم بالاعتماد على القيم الافتراضية وذلك للنماذج الافتراضية وحجمي العينتين المفترضتين في البحث.

جدول (6) الأوساط الحسابية لتقديرات المعلمات (α و λ و θ) ومتوسطات مربعات الخطأ لتلك التقديرات عند حجم عينة مولدة (20) مشاهدة باستخدام دالة سابقة معتمدة على التجارب السابقة

Model	ρ	$\hat{\alpha}$	MSE	$\hat{\lambda}$	MSE	$\hat{\theta}$	MSE
1	0.6	14.2005	0.042	3.1658	0.0053	1.2006	0.0000
	0.7	14.1796	0.046	3.1737	0.0056	1.2004	0.0000
	0.8	14.2117	0.063	3.1747	0.0061	1.2004	0.0000
	0.9	14.2305	0.100	3.1648	0.0087	1.2006	0.0000
2	0.6	14.2582	0.092	3.1572	0.0071	1.2058	0.0000
	0.7	14.1984	0.042	3.4661	0.0054	1.2006	0.0000
	0.8	14.1632	0.046	3.4877	0.0053	1.2002	0.0000
	0.9	14.2382	0.076	3.4303	0.0112	1.2012	0.0000
3	0.6	14.5945	0.039	3.1677	0.0051	1.2006	0.0000
	0.7	14.5682	0.042	3.1798	0.0050	1.2004	0.0000
	0.8	14.6445	0.073	3.1496	0.0081	1.2009	0.0000
	0.9	14.5886	0.092	3.1696	0.0089	1.2005	0.0000
4	0.6	14.2582	0.092	3.1572	0.0071	1.2058	0.0000
	0.7	14.5989	0.040	3.4726	0.0047	1.2005	0.0000
	0.8	14.6058	0.049	3.4619	0.0061	1.2006	0.0000
	0.9	14.6756	0.087	3.4503	0.0086	1.2008	0.0000
5	0.6	14.6055	0.088	3.4626	0.0083	1.2006	0.0000
	0.7	14.2582	0.092	3.1572	0.0071	1.2058	0.0000
	0.8	14.5067	1.580	3.0877	0.1982	1.2018	0.0001
	0.9	14.5431	5.628	3.0771	0.6744	1.2018	0.0002
6	0.6	14.6375	8.088	3.0282	0.7856	1.2025	0.0002
	0.7	14.4384	1.742	3.3684	0.2328	1.2022	0.0001
	0.8	14.5694	2.798	3.3251	0.3658	1.2027	0.0001
	0.9	14.6647	4.222	3.2986	0.5010	1.2033	0.0001

7	0.6	14.6824	9.631	3.3257	0.9858	1.2025	0.0002
	0.7	14.2582	0.092	3.1572	0.0071	1.2058	0.0000
	0.8	14.8364	1.414	3.0792	0.1891	1.2020	0.0001
	0.9	14.8625	3.451	3.0762	0.4307	1.2019	0.0001
8	0.6	14.8719	1.474	3.3668	0.1969	1.2023	0.0001
	0.7	14.9082	2.172	3.3647	0.2784	1.2021	0.0001
	0.8	14.9132	3.271	3.4317	0.3689	1.2010	0.0001
	0.9	14.8850	9.887	3.3086	0.9972	1.2028	0.0002

المصدر: من إعداد الباحث.

لاحظ من الجدول (6) ما يأتي:

(1) أن قيمة MSE في النموذج الأول والثالث والخامس والثامن قد تأثرت بقيم معاملات الارتباط التي استخدمت لتوليد تلك النماذج، حيث زادت قيمة MSE بشكل عام مع ازدياد قيمة معامل الارتباط، بينما كانت النتائج غير منضبطة في النماذج الأخرى.

(2) زيادة قيمة MSE بزيادة قيمة (σ) المستخدمة لتوليد النماذج، ويتضح ذلك جلياً في النماذج الخامس والسادس والسابع والثامن مقارنةً بباقي النماذج الأخرى.

جدول (7) الأوساط الحسابية لتقديرات المعلمات (α و λ و θ) ومتوسطات مربعات الخطأ لتلك التقديرات عند حجم عينة مولدة (40) مشاهدة باستخدام دالة سابقة معتمدة على التجارب السابقة

Model	ρ	$\hat{\alpha}$	MSE	$\hat{\lambda}$	MSE	$\hat{\theta}$	MSE
1	0.6	14.1439	0.0074	3.1995	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	14.1478	0.0109	3.1995	0.0000	1.2000	0.0000
	0.8	14.1756	0.0196	3.1987	0.0000	1.2000	0.0000
	0.9	14.2452	0.0525	3.1980	0.0000	1.2000	0.0000
2	0.6	14.1403	0.0072	3.4991	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	14.1650	0.0130	3.4994	0.0000	1.2000	0.0000
	0.8	14.1906	0.0217	3.4992	0.0000	1.2000	0.0000
	0.9	14.1986	0.0390	3.4983	0.0000	1.2000	0.0000
3	0.6	14.5347	0.0068	3.1992	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	14.5459	0.0113	3.1997	0.0000	1.2000	0.0000
	0.8	14.5717	0.0200	3.1989	0.0000	1.2000	0.0000
	0.9	14.5894	0.0365	3.1988	0.0000	1.2000	0.0000
4	0.6	14.5311	0.0067	3.4991	0.0000	1.2000	0.0000
	0.7	14.5641	0.0128	3.4987	0.0000	1.2000	0.0000
	0.8	14.5679	0.0188	3.4987	0.0000	1.2000	0.0000
	0.9	14.6007	0.0391	3.4990	0.0000	1.2000	0.0000
5	0.6	14.2191	0.1060	3.1985	0.0001	1.2000	0.0000
	0.7	14.3250	0.1824	3.1981	0.0001	1.2000	0.0000
	0.8	14.3719	0.3151	3.1944	0.0002	1.2001	0.0000
	0.9	14.5042	0.4811	3.1903	0.0003	1.2001	0.0000

6	0.6	14.2574	0.1142	3.4972	0.0001	1.2000	0.0000
	0.7	14.2959	0.1847	3.4979	0.0001	1.2000	0.0000
	0.8	14.3845	0.3060	3.4977	0.0001	1.2000	0.0000
	0.9	14.3377	0.3304	3.4954	0.0002	1.2000	0.0000
7	0.6	14.6244	0.1118	3.1989	0.0001	1.2000	0.0000
	0.7	14.7132	0.1866	3.1981	0.0001	1.2000	0.0000
	0.8	14.7681	0.3183	3.1955	0.0002	1.2000	0.0000
	0.9	14.8429	0.4653	3.1945	0.0002	1.2001	0.0000
8	0.6	14.6755	0.1191	3.4981	0.0001	1.2000	0.0000
	0.7	14.6782	0.1584	3.4979	0.0001	1.2000	0.0000
	0.8	14.8065	0.3293	3.4967	0.0002	1.2000	0.0000
	0.9	14.9031	0.4490	3.4950	0.0002	1.2000	0.0000

المصدر: من إعداد الباحث.

نلاحظ من الجدول (7) ما يأتي:

(1) أن قيمة MSE لكافة النماذج قد تأثرت بقيم معاملات الارتباط التي استخدمت لتوليد تلك النماذج، حيث زادت قيمة MSE مع ازدياد قيمة معامل الارتباط.

(2) زيادة قيمة MSE بزيادة قيمة (σ) المستخدمة لتوليد النماذج، ويتضح ذلك جلياً في النماذج الخامس والسادس والسابع والثامن مقارنةً بباقي النماذج الأخرى.

الاستنتاجات Conclusions

توصلت هذه الدراسة إلى الاستنتاجات الآتية:

(1) إن أسلوب بيز في تقدير معلمات نموذج النمو الأسي المعدل وباعتماد الدوال السابقة المستخدمة في هذا البحث يتأثر سلباً بوجود مشكلة الارتباط الذاتي، حيث أن قيمة متوسط مربعات الخطأ MSE بشكلٍ عام ولكافة النماذج قد تأثرت بقيم معاملات الارتباط المستخدمة لتوليد النماذج الافتراضية، فزادت قيمة MSE مع ازدياد قيمة معامل الارتباط.

(2) هناك ثبوت واضح وانتظام بمدى تأثر تقديرات بيز بالارتباط الذاتي بزيادة حجم العينة، حيث باستخدام حجم عينة (40) نلاحظ ازدياد قيمة MSE كلما زادت قيمة معامل الارتباط، أما في حالة حجم عينة (20) نلاحظ عدم انتظام الزيادة في قيمة MSE بزيادة قيمة معامل الارتباط.

(3) إن تأثر متوسط مربعات الخطأ MSE بمشكلة وجود الارتباط الذاتي يتناسب تناسباً عكسياً مع حجم العينة، حيث تزداد قيمة MSE بنقصان حجم العينة، وتنقص بزيادتها.

(4) أن قيمة متوسط مربعات الخطأ MSE تتأثر بزيادة أو نقصان قيمة (σ) المستخدمة لتوليد النماذج الافتراضية، حيث تزداد قيمة MSE مع زيادة (σ)، وتنقص بنقصانها.

المصادر

[1] عماد عدنان العتر، استخدام المحاكاة في دراسة طرق توفيق منحنيات النمو لبيانات مكررة مع تطبيق عملي، رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد،، 1988، ص 15.

[2] Box, G. E. P. and Tiao, G. C. , Bayesian Inference in Statistical Analysis, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., 1973, p.54.

[3] Chalton, D. O. and Troskie, C. G., Multiple Regression with Autocorrelated Errors: Bayesian Analysis with Different Priors, South African Statistical Journal, Sunnyside, Pretoria, 1993, Vol.27, No.1, pp.51–62.

[4] Croxton, F. E. and Cowden, D. J., Applied General Statistical, Third Edition, Englewood Cliffs; New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1967, p. 298.

[5] Everitt, B. and Hothorn, T., A Handbook of Statistical Analyses Using R, CRC Press, 2006, p. 1.

[6] Fomby, T. B. and Gurlkey, D. K., On Choosing the Optimal Level if Significance for the Durbin–Watson Test and the Bayesian Alternative, Journal of Econometrics, 1978, Vol.8, No.2, pp.203–213.

[7] Grewal, P. S., Methods of Statistical Analysis, Second Edition Revised and Enlarged, New York: Sterling Publishers, 1990, pp. 602-603.

[8] Judje, G. G., Griffiths, W. E., Hill, R. C. and Lee, T. C., Theory and Practice of Econometrics, New York: John Wiley & Sons, 1980, p.181-186.

[9] Karris, S. T., Numerical Analysis: Using MATLAB and Excel, Third Edition, printed in the United States of America, Orchard publications, 2007, pp. 10.6-10.9

[10] Kendall, M. G. and Buckland, M. R., A dictionary of Statistical terms, Third Edition Revised and Enlarged, New York: Published for the International Statistical Institute, Hafner Pub. Co., 1971, p.64.

[11] Kutner, M. N., Nachtsheim, C. J. and Neter, J., Applied Linear Regression Models, Fourth Edition, New York: McGraw-Hill Companies, 2004, pp. 513-514.

[12] Lindsey, J. K., Applying Generalized Linear Models, New York: Springer, Inc., 1997, p.69.

[13] Ritz, C. and Streibig, J. C., Nonlinear Regression With R, Springer, 2008, pp.112-113.

[14] Tiao, G. C. and Zellner, A., Bayese's Theorem and the use of prior Knowledge in Regression Analysis, Biometrika, Oxford University, printed in Great Britain, 1964, Vol.5, No.1 & 2, pp.219–230.

[15] Venables, W. N., Smith, D. M. and R. development Core Team, An Introduction to R. Note on R: A program Environment for Date analysis and Graphics, R. development Core Team, 1999-2006, p. 1, available at: http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf. (Last access Mar 15,2013)

[16] Zellner, A., An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, John Wiley and Sons, Inc., 1971, p.44.

استعمال أسلوب بيز لتقدير معلمات نموذج النمو الأسي المعدل الذي

يعاني من مشكلة وجود الارتباط الذاتي وباعتماد قيم مختلفة

لمعلمة الارتباط- باستعمال المحاكاة

Using Bayesian method to estimate the parameters of Exponential Growth Model with Autocorrelation problem and different values of parameter of correlation-using simulation

Abstract

We have studied Bayesian method in this paper by using the modified exponential growth model, where this model is more using to represent the growth phenomena. We focus on three of prior functions (Informative, Natural Conjugate, and the function that depends on previous experiments) to use it in the Bayesian method. Where almost of observations for the growth phenomena are depended on one another, which in turn leads to a correlation between those observations, which calls to treat such this problem, called Autocorrelation, and to verified this has been used Bayesian method.

The goal of this study is to knowledge the effect of Autocorrelation on the estimation by using Bayesian method. For verifying the goal has been used the simulation technique where has been generated random samples with known parameters and different values of correlation. It has been shown from the computational results that all result has been affected by the values of correlation coefficients used to generate the data, and there is a clear proof and regularity of the sensitivity for Bayesian estimators by Autocorrelation with increase the size of sample.

Keywords: **Bayesian method, Estimate, Exponential Growth Model, Autocorrelation.**