دراسة خواص وتقارب نموذج مارتنكل

حسن حسين ابراهيم
كلية علوم الحاسبات والرياضيات ، جامعة تكريت
(تاريخ الاستلام: / /٢٠٠٧ ، تاريخ القبول: / /٢٠٠٧)

الملخص

في هذا العمل نقوم بدراسة خواص و تقارب نموذج مارتنكل وعلاقته مع مارتنكل جزئي وكذلك مارتنكل خاص واعطاء بعض الامثلة والنظريات المتعلقة بهما .

المقدمة

المارتنكل (Martingales): هو نموذج رياضي لرهان عادل. سمي بهذا الاسم نسبة إلى العالم لاكراند مارتنكل (Lagrande Martingale) لإستراتيجية الرهانات للاحتمالات المتساوية التي فيها يتضاعف الرهان بعد كل خسارة.(إذا تضاعف الرهان بعد كل خسارة ،الفوز الأول سيسترجع كل الخسائر السابقة ،مع ترك ربح طفيف مادام أحدهم سيربح الرهان عاجلاً أم أجلاً ،هذا النظام يضمن الربح (الفائدة)).

لنأخذ على سبيل المثال : لعبة العملة المعدنية الثلاثية : نحن سنأخذ عملة معدنية عادلة يكون فيها احتمال ظهور الصورة P(H)=1/2 مساوي إلى احتمال ظهور الكتابة P(T)=1/2 ، وعملة معدنية غير متوازنة التي يكون فيها احتمال ظهور الصورة P(H)=2/3 واحتمال ظهور الكتابة P(T)=1/3، وعملة معدنية غير متوازنة أخرى التي يكون فيها احتمال ظهور الصورة P(H)=1/3 واحتمال ظهور الكتابة P(T)=2/3 . نرمي العملة المعدنية العادلة أولا إذا ظهرت الكتابة نرمي العملة المعدنية مع احتمال ظهور الكتابة P(T)=2/3.أما إذا ظهرت الصورة نرمي العملة المعدنية الأخرى مع احتمال ظهور الصورة P(H)=2/3 .

راهنا على النتيجة النهائية – صورة أو كتابة– في الاحتمال المتساوية. في هذه الحالة من المهم معرفة بالضبط متى راهنا . إذا راهنا قبل أن تكون العملة المعدنية الأولى مرمية ، نحن سيكون لدينا فرصة فوز متناصفة ،ونحن سنكسب دولار ،إذا حزرنا بشكل صحيح ، ونفقده إذا نحن خاطئون . هكذا الرهان عادل لكن إذا راهنا بعد أن نرى نتيجة الرمية الأولى عندنا فرصة أفضل بكثير من فوز رهاننا لكنه لصالحنا ،بالحقيقة التوقع الشرطي (الذي يأخذ كل معرفتنا في وقت الرهان) يجب أن يكون صفر.

نفرض X_0 يكون ثروتنا الأولية ، X_1 ثروتنا بعد الرهان الأول،X_2 ثروتنا بعد الرهان الثاني وهكذا في الوقت الذي نضع كل رهان نحن سنعرف أشياء أكيدة تتضمن ثروتنا في ذلك الوقت و لكننا سوف لن نعرف نتيجة الرهان و الأرباح في رهان n من المرات X_n-X_{n-1} و التوقع الشرطي لـ X_n-X_{n-1} هو صفر.

وبهذا يكون لدينا العلاقة التالية:

$$E\{X_n\text{-}X_{n-1} \mid F_{n-1}\} = 0 \quad \text{أو} \quad E\{X_n \mid F_{n-1}\} = X_n$$

وهذا يقودنا إلى التعاريف التالية التي سيتم استخدامها لاحقا .

تعريف١: المرشح (filtration)على فضاء الاحتمال(Ω,F,P) هو متتابعة $\{F_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ من الحقل الجزئي سكما (sub σ-field) F بحيث لكل n فان $F_n \subset F_{n+1}$.

تعريف٢: العملية التصادفية (Stochastic process) هي عوائل من المتغيرات العشوائية على نفس فضاء الاحتمالي (probability space).

تعريف٣: عملية المصادفة $X=\{X_n : n=0,1,2,\ldots\}$ **ملائمة** للمرشح (F_n) أذا كان X_n قابلة للقياس لكل n.

تعريف٤: العملية $X=\{X_n ,F_n , n= 0,1,2,\ldots\}$ تسمى **مارتنكل** (martingale) إذا حققت الشروط الآتية لكل n= 0,1,2,... :

١. $\{F_n , n= 0,1,2,...\}$ تكون مرشح وX_n ملائمة لـ (F_n).

٢. لكل n فإن ، X_n هي قابلة للتكامل .

٣.لكل n فإن ، $E\{X_{n+1} \mid F_n\} = X_n$.

تعريف٥: العملية $X = \{X_n ,F_n ,n=0,1,2,...\}$ تسمى **مارتنكل جزئية** (sub martingale) إذا حققت نفس شروط المارتنكل مع استبدال الشرط الأخير و لكل n فإن : $E\{X_{n+1}|F_n\} \le X_n$

وتسمى X **مارتنكل خاص** (super martingale) إذا تم استبدل الشرط الأخير

من شروط المارتنكل بهذا الشرط :

$$E\{X_{n+1}|F_n\} \ge X_n$$

تعريف٦: حقل السكما (σ-field) نفرض أن F عائلة من المجموعات الجزئية من Ω . فإن F تدعى بحقل سكما إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية :

١. $\Omega \in F$.

٢. إذا كان $A \in F$ فإن $A^c \in F$.

٣. إذا كان $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots \in F$ فإن $\bigcup_i Ai \in F$.

تعريف٧: قابل للقياس (measurable) نفرض X مجموعة مع حقل السكما A. فإن الدالة $f : X \to R$ تكون قابلة للقياس إذا كان :

$\{x: f(x) > a\} \in A$ لكل $a \in R$.

تعريف٨: إذا كان $\int |f| \, dm < \infty$ فان الدالة f **قابل للتكامل** (Integrable)

تعريف ٩: المجموعة المحدبة (convex set) نفرض إن A مجموعة جزئية من فضاء المتجهات X تسمى A بالمجموعة المحدبة إذا حققت الشرط الأتي :

لكل $x,y\in A$ فان $\lambda x+(1-\lambda)y\in A$ حيث ان $\lambda\in[0,1]$

تعريف ١٠ : لتكن $g:I\to R$ دالة و I هي فترة مفتوحة من الأعداد الحقيقية المقيدة أو غير المقيدة . فان الدالة g **محدبة** (convex function) اذا تحقق الشرط الاتي: $g(ax+(1-a)y)\le ag(x)+(1-a)g(y)$ لكل $x,y\in I$ ولكل $a\in[0,1]$.

تعريف ١١ : إن فضاء القياس الثلاثي **(Ω,F,μ)** ،حيث Ω هي مجموعة ،F هو حقل سكما جزئي من Ω،μ هو القياس على F يسمى **فضاء القياسي** (measure space)إذا كان قياس μ يساوي قياس الاحتمالية p فان **(Ω,F,p)** يسمى بفضاء الاحتمالي.

ملاحظة ١ : نحن نستطيع أن نعرف فكرة علاقة المارتنكل على أي مجموعة جزئية من خط الأعداد الحقيقية. إذا كان $I\subseteq R$ أي مجموعة، وان $\{F_t:t\in I\}$ هو مرشح ($s,t\in I$ and $s\le t\Rightarrow F_s\subseteq F_t$)فإن العملية التصادفية

$\{X_t, t\in I\}$ مارتنكل جزئية اي ان $s\le t\Rightarrow X_s\le E\{X_t|F_s\}$ a.e.)()

قضية ١:

١. العملية التصادفية$\{X_n,F_n,n=0,1,2,...\}$ $X\equiv$ هي مارتنكل جزئية إذا وفقط إذا X– مارتنكل خاص.

٢. X مارتنكل إذا وفقط إذا تحقق كلاهما مارتنكل جزئي وخاص .

٣. نفرض X_n هو مارتنكل جزئي نسبة إلى المرشح (F_n) فإن $X_m\le E\{X_n|F_m\}$ لكل $m\le n$.

٤.إذا كان X مارتنكل فان $E\{X_n\}=E\{X_0\}$ لكل n .

٥. إذا كان $m<n$ وان X مارتنكل جزئي فإن: $E\{X_m\}\le E\{X_n\}$

٦. إذا X مارتنكل خاص فإن:$E\{X_m\}\ge E\{X_n\}$.

٧.إذا X_n مارتنكل جزئي نسبة إلى المرشح F_n . فإنه أيضاً مارتنكل جزئي بالنسبة مرشح الطبيعي (natural filtration) $\Im\equiv\sigma(X_1,...,X_N)$.

البرهان: ١. نفرض أن X هي مارتنكل جزئية . ونريد أن نبرهن أن X– هي مارتنكل خاصة .

من تعريف المارتنكل الجزئي لـ X : $E\{X_{n+1}|F_n\}\le X_n$

ولكن عند ضرب المتراجحة بـ (-1) نحصل على :

$-E\{X_{n+1}|F_n\}\ge -X_n$

وهكذا نستطيع برهان الاتجاه الثاني بنفس الطريقة .

٢.إذا كانت X مارتنكل خاص وجزئي في نفس الوقت .نريد أن نبرهن X مارتنكل .

من تعريفي المارتنكل الجزئي $E\{X_{n+1}|F_n\}\le X_n$ والخاص $E\{X_{n+1}|F_n\}\ge X_n$.

$E\{X_{n+1}|F_n\}\le X_n\wedge E\{X_{n+1}|F_n\}\ge X_n$ وهذا يؤدي الى

$E\{X_{n+1}|F_n\}\le X_n\le E\{X_{n+1}|F_n\}$ اذن $X_n=E\{X_{n+1}|F_n\}$

اي أن X تكون مارتنكل إذا كان كلاهما متحقق المارتنكل الجزئي والخاص.

وبنفس الطريقة نستطيع نبرهن الطرف الأخر .

إذا كانت X مارتنكل $X_n=E\{X_{n+1}|F_n\}$ ومن خاصية المساواة هذا يعني أن

$E\{X_{n+1}|F_n\}\le X_n\le E\{X_{n+1}|F_n\}$

وباستخدام أدوات الربط :

$E\{X_{n+1}|F_n\}\le X_n\wedge E\{X_{n+1}|F_n\}\ge X_n$

وبهذا يكون لدينا مارتنكل جزئي و مارتنكل خاص .

٣. باستخدام الاستقراء الرياضي نقوم ببرهان هذه الفقرة .

نفرض إن n=m+1 فسوف نحصل على:$E\{X_{m+1}|F_m\}\le X_m$

وهي صحيحة من تعريف المارتنكل الجزئية .

نفرض إنها تكون صحيحة عندما n=m+k فسنحصل على :

$E\{X_{m+k}|F_m\}\le X_m$ الان نريد أن نبرهن أنها صحيحة عندما n=m+k+1 ولكن من المارتنكل الجزئية فان المتباينة :

$E\{X_{m+k+1}|F_{m+k}\}\ge X_{m+k}$ صحيحة لذلك فان

$E\{E\{X_{m+k+1}|F_{m+k}\}|F_m\}\ge X_m$ لان $F_m\subset F_{m+k}$

اذن صحيحة أيضاً لـ n=m+k+1.

٤.نفرض أن X مارتنكل لكي نبرهن أن $E\{X_n\}=E\{X_0\}$

بما أن $X_0=E\{X_1|F_0\}$ وبأخذ التوقع الشرطي للطرفين :

$E\{X_0\}=E\{E\{X_1|F_0\}\}$

$E\{X_0\}=E\{E\{X_1|F_1\}\}$

لأن $F_0\subset F_1$ وبهذا سنحصل على $E\{X_0\}=E\{X_1\}$

وبالتالي سيكون لدينا : $E\{X_0\}=E\{X_1|F_n\}$ لان $F_0\subseteq F_n$

وبالتالي نحصل على $E\{X_0\}=E\{X_n\}$ لكل n .

٥.إذا كان X مارتنكل جزئي و $m<n$ فإن $E\{X_m\}\le E\{X_n\}$

من تعريف المارتنكل الجزئي $E\{X_n|F_m\}\le X_m$

وبأخذ التوقع لكلا الطرفين نحصل على :$E\{E\{X_n|F_m\}\}\le E\{X_m\}$

$E\{X_n\}\le E\{X_m\}$

٦.برهانها نفس برهان (٥) بالضبط مع عكس العلامة من اصغر إلى اكبر .

٧. بما أن $\Im$ هي أصغر مجموعات السكما فإن $\Im_n$ تكون مجموعة جزئية من حقل السكما $\Im_n\subset F_n$

وبما أن X مارتنكل جزئي إلى المرشح F_n فهذا يعني :$E\{X_n|F_m\}\le X_m$

وبالتالي :

$E\{X_m|\Im_n\}=E\{E\{X_n|F_m\}|\Im_n\}=Xm\ge E\{X_m|\Im_n\}=X_m$

مبرهنة (متباينة جينسن) (Jensen's Inequality):

لتكن g دالة محدبة من I إلى R ،حيث I هي فترة مفتوحة من الأعداد الحقيقية،المقيدة أو غير المقيدة. ولتكن X هي متغير عشوائي على (Ω,F,P)

$X(\omega)\in I$ لكل ω . نفرض $E(X)$ تكون منتهية . إذا μ هي مجموعة جزئية من حقل السكما F .فإن $g[E(X|\mu)]\ge E[g(X)|\mu]$ ،وبصورة خاصة :

$g[E(X)]\ge E[g(X)]$

قضية ٢ :

١. نفرض $\{X_n, F_n, n=0,1,2,...\}$ هي مارتنكل و Φ هي دالة محدبة على R فإنه إذا كانت $\Phi\{X_n\}$ قابلة للتكامل لكل n ، $\{\Phi(X_n), F_n, n=0,1,2,...\}$ هي مارتنكل جزئية .

٢.نفرض أن $\{X_n, F_n, n=0,1,2,...\}$ هو مارتنكل جزئي و Φ هي دالة متزايدة محدبة على R فإنه إذا كانت $\Phi(X_n)$ قابلة للتكامل لكل n ، $\{\Phi(X_n), F_n, n=0,1,2,...\}$ هي مارتنكل جزئية .

البرهان:

١.من تعريف المارتنكل فإن:

$$X_m = E\{X_n|F_m\}$$

وبما أن Φ هي دالة محدبة على R

$$\Phi(X_m) = \Phi(E\{X_n|F_m\})$$

ومن متباينة جينسن للتوقعات الشرطية نحصل على :

$$\Phi(X_m) = \Phi(E\{X_n|F_m\}) \leq E\{\Phi(X_n)|F_m\}$$

وهي مارتنكل جزئية .

٢.من تعريف المارتنكل الجزئية :

$$X_m \leq E\{X_n|F_m\}$$

وبما أن Φ هي دالة محدبة متزايدة وباستخدام متباينة جينسن سوف نحصل على :

$$\Phi(X_m) \leq \Phi(E\{X_n|F_m\}) \leq E\{(\Phi(X_n)|F_m\}$$ وهي مارتنكل جزئية .

أمثلة:

١. نفرض $x_0, x_1, x_2, ...$ هي أعداد حقيقية . إذا كانت المتتابعة متزايدة هي مارتنكل جزئية .وإذا كانت ثوابت هي مارتنكل . أما إذا كانت غير متزايدة فهي مارتنكل ممتازة . بالحقيقة نحن نستطيع أن نعرف ثوابت لمتغيرات عشوائية $X_n \equiv x_n$ على أي فضاء احتمالي.ونأخذ F_n ليكون مرشح تافه $F_n=\{\Phi,\Omega\}$ لكل n لنضع هذه العملية التصادفية تساوي صفر.

٢. نفرض $Y_1, Y_2, \ldots$ هي متتابعة لمتغيرات عشوائية مستقلة مع $E\{Y_n\} \geq 0$ لكل n . نثبت $X_0 = 0$,

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \text{لكل } n>1 .$$

نفرض $F_n=\sigma\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ هي حقل سكما مولدة بواسطة الحد n. فإنه $\{X_n, n \geq 0\}$هي مارتنكل جزئية بالنسبة للمرشح (F_n) إذا كان Y_n لها توقع صفر لكل n ، فهي مارتنكل.

لان ،$E\{X_{n+1}|F_n\}=E\{X_n+Y_{n+1}|F_n\}$. وبما أن X_n قابلة للقياس بالنسبة لـ F_n . كذلك $X_n+E\{y_{n+1}|F_n\}$. ولكن Y_{n+1} مستقلة مع $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ وكذلك F_n وبالتالي :

$$X_n + E\{Y_{n+1}\} \geq X_n$$

وهذا يعني أن X هي مارتنكل جزئية .

٣. نفرض $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة في L^{∞} نفرض ان $\sum_{k=0}^{\infty} Y_k$ مقاربة في L^{∞} راهن بدولار واحد لكل وقت و Y_j هو الربح أو الخسارة ل j من المرات ،نحن نرى أن اللعبة عادلة إذا $E\{Y_i\}=0$ لكل j .ونفضله إذا كان $E\{Y_i\} \geq 0$ لكل j . وهو غير عادل إذا كان $E\{Y_i\} \leq 0$.

النموذج العصري أتاح للمقامر تغيير الرهان. نفرض في الوقت n رهان المقامر يقرر المال المراهن عليه ل k_n دولار يجب أن يكون صحيح .(وهو يجب أن يكون عشوائي) المقامر يبدل الرهان طبقاً للحالة (هذه الإستراتيجية في نظام البلاك جاك) أو على طفرة عشوائية. في وقت الرهان ،المقامر لا يعرف النتيجة Y_n لـ n من مرات الرهان.ولكن يعرف كل النتائج السابقة $Y_1, ..., Y_{n-1}$. كذلك k يجب أن يكون قابل للقياس فيما يتعلق ب F_{n-1} . تدعى العملية الجديدة`X .وبالتالي ثروة المقامر بعد n من مرات المراهنة

$$X`_n = X`_{n-1} + k_n Y_n$$

حيث k_n هي F_{n-1} قابلة للقياس للمتغيرات العشوائية الموجبة.فإن :

$$E\{X`_n|F_{n-1}\} = X`_{n-1} + k_n E\{Y_n|F_{n-1}\}$$
$$= X`_{n-1} \quad K_n E\{X_n\}$$

لأن k_n،$X`_{n-1}$ كلاهما يكون $F_{n-1}$ لها قابل للقياس . لأن $k_n$ هو مثبت و`X سوف يكون مارتنكل (مارتنكل جزئي، مارتنكل خاص) إذا كانت عملية الرهان الثابتة X هي مارتنكل (المارتنكل الجزئية ،المارتنكل الخاصة).

هذا يقودنا لعدم استطاعتنا لتغيير الطبيعة الأساسية للعبة بتغيير حجم الرهانات .

هنا المثال مهم .نفرض F_n هو مرشح ونفرض X أي متغير عشوائي قابل للتكامل .نعرف $X_n \equiv E\{X|F_n\}$ فإن $\{X_n, n=0,1,2,...\}$علاقة المارتنكل بالمرشح(F_n).بالحقيقة:

$$E\{X_{n+1}|F_n\} = E\{E\{X|F_{n+1}\}|F_n\} \equiv E\{X|F_n\} = X_n$$

تعريف: نعرف المسافة بين مجموعتين جزئيتين A و B في L^{∞} كالأتي

$$D(A,B) = \sup_{X \in A} \inf_{Y \in B} \|X - Y\|_{\infty} \vee \sup_{Y \in B} \inf_{X \in A} \|Y - X\|_{\infty}$$

قضية ٣: نفرض ان $X, Y \in L^{\infty}$ و حقل σ جزئي ℓ من F فان $D(E[X \setminus \ell], E[Y \setminus \ell]) \leq \|X - Y\|_{\infty}$.

البرهان: نأخذ $U \in E[X \setminus \ell]$ و $V \in E[Y \setminus \ell]$ بواسطة [٥] نحصل على

$$\varepsilon(Y,\ell) \leq \|Y - U\|_{\ell} \leq \|X - U\|_{\ell} \vee \|X - Y\|_{\ell} = \varepsilon(X,\ell) \vee \|X - Y\|_{\ell}$$

و $\varepsilon(X,\ell) \leq \|X - V\|_{\ell} \leq \|Y - V\|_{\ell} \vee \|X - Y\|_{\ell} = \varepsilon(Y,\ell) \vee \|X - Y\|_{\ell}$

و هذا يؤدي الى $\varepsilon(X,\ell) = \varepsilon(Y,\ell)$ للمجموعة

$$M = \{\|X - Y\|_{\ell} < \varepsilon(X,\ell) \vee \varepsilon(Y,\ell)\}$$

وان $\varepsilon(X,\ell) = \|Y - U\|_{\ell} = \|X - U\|_{\ell} = \varepsilon(X,\ell)$ و

$$\varepsilon(Y,\ell) = \|X - V\|_{\ell} = \|Y - V\|_{\ell} = \varepsilon(Y,\ell)$$

و بما ان

$$U\, 1_M \in E[Y 1_M \setminus \ell] = 1_M E[Y \setminus \ell]$$ و

$$V\, 1_M \in E[X 1_M \setminus \ell] = 1_M E[X \setminus \ell]$$

وكذلك للمجموعة

$$N = \{\|X - Y\|_{\ell} \geq \varepsilon(X,\ell) \vee \varepsilon(Y,\ell)\}$$ فان

$$\|U - V\|_{\infty} \leq \|U - X\|_{\infty} \vee \|X - Y\|_{\infty} \vee \|Y - V\|_{\infty}$$
$$\leq \|X - Y\|_{\infty} \leq \varepsilon(X,\ell) \vee \|X - Y\|_{\infty} \vee \varepsilon(Y,\ell)$$

وهذا يؤدي الى

$$\|U 1_N - V 1_N\|_{\infty} \leq \|X 1_N - Y 1_N\|_{\infty} \leq \|X - Y\|_{\infty}$$

والتالي

$D(1_N E[X\backslash\ell], 1_N E[Y\backslash\ell]) \le \|X-Y\|_\infty$ و بما ان

$E[X\backslash\ell] = 1_M E[X\backslash\ell] + 1_N E[X\backslash\ell]$ و

$E[Y\backslash\ell] = 1_M E[Y\backslash\ell] + 1_N E[Y\backslash\ell]$

$D(E[X \setminus \ell], E[Y \setminus \ell]) \le \|X-Y\|_\infty$ اذن

قضية ٤: نفرض ان $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ مرشح و $X \in L^\infty$ و $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ مارتنكل مع $X_n \in E[X \setminus F_n]$ لكل n . وإذا كان $X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L^\infty(F_n)$ فان $\lim_{n\to\infty}\|X_n - X\| = 0$.

البرهان:بما ان $X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L^\infty(F_n)$ اذن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $Y \in L^\infty(F_n)$ لبعض N بحيث ان $\|X-Y\|_\infty < \varepsilon$ وبما ان $F_N \subseteq F_n$ لكل $n > N$ اذن $Y \in L^\infty(F_n)$ لكل $n \ge N$ ومن امبرهنة ٣ نحصل $D(E[X \setminus F_n], E[Y \setminus F_n]) < \varepsilon$ لكل $n \ge N$ وهذا يؤدي $\sup\{\|W-Y\|_\infty : W \in E[X \setminus F_n]\}$ وهذا يعني $\|X_n - X\|_\infty \le \|X_n - Y\|_\infty \vee \|Y-X\|_\infty < \varepsilon$ و $n \ge N$.

المصادر

[1]. Ash, R. B., "Real analysis ad probability.", Academic press Inc., New York,(1972).

[2]. Billingsley, P. "Probability and Measure.", John Wiley & Sone, Inc., New York – Toronto, (1972).

[3]. Dudley, R. M.," Probabilities and Metrics Convergence of Laws on metric spaces, with a view to statistical testing ", Lecture Notes Series, No. 45, Aarhus University , June (1976).

[4]. Kussmanl A.U."Stochastic integration and generalized matingales", Pitman Publishing Limited, London, (1977)

[5]. Wu, W. R. " martingale approximation for sums of stationary processes ", Ann. Probab. 32, (2001).

(Received / / 2007, Accepted / / 2008)

Abstract

In this work we study the properties and convergence Martingale model and its relationship with Submartingale and Supermartingale, and provide some examples and theorems on them.