AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

مقارنة بين طريقة بيز القياسي وطريقة بيز الهرمي لتقدير دالّة المعولية لتوزيع لوماكس المعكوس مع وجود بيانّات مراقبة من النوع الثاني

Comparison between the standard Bayesian method and the hierarchical Bayesian method for estimating the reliability function of the inverse Lomax distribution with type II observational data

https://doi.org/10.29124/kjeas.1650.16

آلاء جاسم الركابي(1)

ا.م. د وفاء جعفر حسين الوندي(2)

المستخلص :-

في هذا البحث يَتَمّ تقدير معلمتي الشكْلّ والقياس (دون فرض أي من المعلمتين) و دالّة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس بوجود بيانات مراقبة من النوع الثاني باستعمال طرائق بيزية مختلفة والتي تضمَّنتْ طريقة بيز القياسية وطريقة بيز الهرمي تحت دالّة خسارة متّماثلة، وهي دالّة الخسارة التربيعية ولأجل المقارنة بين الطريقتين تَمّ استعمال محاكاة مونت كارلو إذْ تَمّ استعمال حجوم عينات مختلفة وثلاث نماذج لقيم افتراضية لمعلمات التوزيع (λ,Θ) وتَمّ استعمال المقياس الإحصائي متوسّط مربّعات الخطأ التكاملي (IMSE) وبيّنَتْ تجارب المحاكاة افضلية طريقة بيز الهرمي لامتلاكها أقل متوسّط مربّعات الخطأ التكاملي (IMSE) .

الكَلّمات المفتاحية : (دالّة خسارة تربيعية ، بيز الهرمي ، بيز القياسي ، توزيع لوماكس المعكوس)

Abstract :-

In this paper, the shape and size parameters (without imposing either parameter) and the survival function of the inverse Lomax distribution in the presence of observational data of the second type are estimated using different Bayesian methods, which included the standard Bayesian method and the hierarchical Bayesian method under a symmetric loss function, which is the quadratic loss function, and in order to compare The two methods used Monte Carlo simulation, where different sample sizes and three models of default values for distribution parameters (Θ,λ) , were used and the statistical measure, mean

integral square error (IMSE), was used. Simulation experiments showed the superiority of the hierarchical Bayesian method because it has the least mean square integral error (IMSE) .

Keywords: (quadratic loss function, hierarchical Bayesian, standard Bayesian, inverse Lomax distribution)

1- المقدمة

أنّ من أهمّ اركانّ عمليه الاستدلال الإحصائي هي: عملية التقدير، واختبار الفرضيات، وعلى أساس النتائج المستخرجة من العينة المسحوبة من مجتَمّع الدراسة تتَمّ عملية التقدير إذْ يَتَمّ تقدير المعلمات والاستنتاجات جميعها حول معلمات المجتَمّع قيد الدراسة وهنالك العديد من طرائق التقدير منها ما يعتَمّد على معلومات سابقة حول معلمات المجتَمّع المراد تقديرها، وهي ما يعبر عنها بالطرائق البيزية إذْ تفترض هذه الطرائق أنّ معلمات المجتَمّع عبارة عن متغيّرات عشوائية لها دوال اولية تتوزع بموجبها ، ولقد تَمّ تطوير هذه الطرائق البيزية تسمى طرائق التوقع البيزي وطرائق بيز الهرمي إذْ هنالك كثير من البحثين الذين طوروا طريقة بيز الاعتيادية الى طرائق بيزية متطورة ففي عام 2000 استخدم الباحث(Surendran.C)[13] اسلوب بيز الهرمي لحل مشكُلّة عدم توفر البيانات، وفي العام نفسه استعمل الباحثين [4] (Galatsan ,N ,P et.il) اسلوب بيز الهرمي لمعالجة مشكُلّة استعادة البيانات (Restoration) في حالة كون دالّة الامتداد النقطي غير معلومة ، وفي العام (2003) استعمل الباحثون [14] (Tournere et.il) اسلوب بيز الهرمي تجزئة الاشارات(Signal Segmentation) عندما تكون الاشارات متداخلة مع ضوضاء متُعدّدة. المصادر (Multiplicative noise). و في عام (2008) قام الباحث [6] (M .Han) لتقدير معدّل الفشل لتوزيع الأسي باستعمال طريقة التوقع البيزي وطريقة بيز الهرمي ، وفي عام (2013)م قامت الباحثة (الوندي) [1] بتقدير معدّل الفشل لتوزيع الأسي باستعمال طريقة الامكانّ الأعظم وطريقة بيز وطريقة التوقع البيزي وطريقة بيز الهرمي بالاعتَمّاد على دالّة خسارة التربيعية (Squared error loss function) .أنّصبّ اهتَمّام الباحثة في هذا البحث على تطوير طريقة بيز أي طريقة بيز الهرمي لتقدير معولية توزيع لوماكس المعكوس وذلك لأهمية هذا التوزيع في تحليل الكثير من أوقات البقاء والمعولية لكثير من الأجهزة .

2- هدف البحث

يهدف البحث إلى للحصول على أفضل تقدير لدالّة المعولية لمعالم توزيع لوماكس المعكوس (Inverse Lomax Distribution)بوجود بيانّات مراقبة من النوع الثاني، ويَتَمّ ذلك بالمقارنة بين طريقة بيز القياسية(Standard Bayes method) وطريقة بيز الهرمي (Hierarchical Bayesian method) بوجود دالّة خسارة الخطأ التربيعية (squared Error Loss function)، بالاعتَمّاد على أسلوب التكامل التقريبي للباحث (Lindley)

3- مشكُلّة البحث

وجود معلمات فوقية زائدية $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ في المقدّر، ولها مستويات عدة يكون لها تأثير كبير على كفاءة المقدّر

4- توزيع لوماكس المعكوس [9][12][15] Inverse Lomax distribution

يعدّ توزيع لوماكس المعكوس حالة خاصّة من توزيع بيتا من النوع الثاني، و بديل جيد للتوزيعات المشهورة كاما (gamma)، ويبل (weibull) ومعكوس ويبل (inverse weibull) وهو أحد نماذج اوقات الحياة البارزة في التطبيقات الإحصائية ويَتّمّ استعماله في مجالات مختلفة مثل اختبار الحياة والاقتصاد والنمذجة العشوائية

إنّ الدالّة الاحتَمّالية لتوزيع لوماكس المعكوس (Inverse Lomax distribution)

$$f(t) = \frac{\theta\lambda}{t^2}\left(1+\frac{\lambda}{t}\right)^{-(1+\theta)} \qquad 0 < \lambda, \theta < \infty \qquad \dots\dots\dots (1)$$

اما دالّة المعولية فتكون كالآتي

$$R(t) = 1 - \left(1+\frac{\lambda}{t}\right)^{-\theta} \qquad \dots\dots\dots (2)$$

5 - مقدّر بيز القياسي في ظلّ دالّة خسارة تربيعية : [2][8][10]

Standard Bayesian Estimator under squared Error Loss function

إنّ دالّة التوزيع اللاحقة كما في المعادلة الآتية:

$$h(\underline{\alpha}\,|t_1, t_2, \dots, t_r) = \frac{\prod(\underline{\alpha})\prod_{i=1}^{r} f(t_1, t_2, \dots, t_r|\underline{\alpha})}{\int_{\forall\underline{\alpha}}\prod(\underline{\alpha})\prod_{i=1}^{r} f(t_1, t_2, \dots, t_r|\underline{\alpha})\,d\underline{\alpha}} \qquad \dots\dots\dots (3)$$

والتي تحتوي مشاهدات العينة من $(t_1, t_2, \dots, t_r)$ وعلى المعلومات السابقة لمتجه المعلمات $(\underline{\alpha})$، وحسب نظرية بيز يمكن الحصول على التوزيع اللاحق لمتّجه المعلمات $(\underline{\alpha})$ باستعمال صيغة بيز العكسية (Bayesian Inverse formula). ولكي يَتّمّ الحصول على مقدّر بيز القياسي لابد من استعمال أحد دوال الخسارة(Loss Function) وفي بحثنا هذا سيَتّمّ استعمال دالّة خسارة الخطأ التربيعية (squared Error Loss function) إذْ تُعدّ هذه الدالّة من الدوال المتَمّاثلة، وهذا يعني أنّ كمية الخسارة للخطأ السالب تساوي كمّية الخسارة للخطأ الموجب إذْ أنّ مقدّر بيز في هذه الدالّة يجعلها أقل ما يمكن ويكون وحيدا سوف نرمز لمقدّر بيز القياسي $\underline{\hat{\alpha}}_B$ للمعلمات($\underline{\alpha}$) والذي يكون متوسّط التوزيع اللاحق لموجه المعلمات العشوائية $(\underline{\alpha})$ عند اذا يمكن التعبير عن مقدّر بيز القياسي لدالّة المعولية بأنّه التوقع الشرطي اللاحق لدالّة المعولية

$$\hat{S}_{SEL}(t_1, t_2, \dots, t_r) = E(S|t_1, t_2, \dots, t_r)$$

أنّ المعلمات المراد تقديرها (θ, λ)، ماهي الا مقدّرات عشوائية تفترض توزيعها كالآتي :-

$$\lambda \sim \text{Gamma}\ (\alpha_1, \beta_1)$$

$$\Theta \sim \text{Gamma}\ (\alpha_2, \beta_2)$$

عند اذ فأنّ دالّة الكثافة الاحتمالية الأولية (Prior p d f) لكُلّ معلمة تكون كما يأتي:

$$\pi_1(\lambda) \propto \frac{{\beta_1}^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \lambda^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1\lambda} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

$$\pi_2(\theta) \propto \frac{{\beta_2}^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \theta^{\alpha_2-1} e^{-\beta_2\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

ويمكن التعبير عن التوزيع الأولي المشترك (Joint Prior Distribution) للمعلمتين (Θ،λ) كما يلي :

$$\pi_1(\lambda)\ \pi_2(\theta) \propto \frac{{\beta_1}^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \lambda^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1\lambda}\ \frac{{\beta_2}^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \theta^{\alpha_2-1} e^{-\beta_2\theta}$$

$$\prod(\Theta, \lambda) \propto \frac{{\beta_1}^{\alpha_1}{\beta_2}^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\ \lambda^{\alpha_1-1}\ \theta^{\alpha_2-1}\ e^{-\beta_2\theta} e^{-\beta_1\lambda} \qquad \ldots\ldots\ldots(6)$$

وحسب رأي الباحث (Han)[5] فأن المعاملات $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ يمكن اختيارها بحيث تضمن الدوال الأولية$\pi_2(\theta)$, $\pi_2(\lambda)$ متناقصة بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها وكما يأتي :

$$\frac{d\pi_1(\lambda)}{d\lambda} = \frac{{\beta_1}^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \lambda^{\alpha_1-2} e^{-\beta_1\lambda} \left(-\beta_1\lambda + (\alpha_1 - 1)\right)$$

$$\frac{d\pi_2(\theta)}{d\theta} = \frac{{\beta_2}^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \theta^{\alpha_2-2} e^{-\beta_2\theta} \left(-\beta_2\theta + (\alpha_2 - 1)\right)$$

فأنّ المعادلات (4)،(5) تكون متناقصة في حالة تحقق الشرط الآتي :

$$\left[\frac{d\pi_1(\lambda)}{d\lambda}, \frac{d\pi_2(\theta)}{d\theta} < 0\right]$$

$0 < \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 < 1$ وعندما $[\lambda, \Theta > 0]$

وإذْ أنّ دالّة الأمكانّ للمشاهدات $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$يمكن التعبير عنها بالشكُلّ الآتي :

$$L(\Theta, \lambda) = \prod_{i=1}^{r} f(t, \Theta, \lambda)$$

$$L(\Theta,\lambda) = \frac{n!}{(n-r)!}(\theta\lambda)^r \prod_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{t_i^2}\left(1+\frac{\lambda}{t_i}\right)^{-(1+\theta)}\right]\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^{(n-r)} \quad \dots\dots\dots(7)$$

و التوزيع المشترك يكون كما يأتي :

$$= K.\lambda^{\alpha_1-1+r}\,\theta^{\alpha_2-1+r}\,e^{-\beta_2\theta}e^{-\beta_1\lambda}\,\frac{n!}{(n-r)!}(\theta\lambda)^r \prod_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{t_i^2}\left(1+\frac{\lambda}{t_i}\right)^{-(1+\theta)}\right]\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^{n-r} \quad \dots\dots\dots(8)$$

إذْ أنّ:-

$$K = \frac{{\beta_1}^{\alpha_1}{\beta_2}^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$$

سوف تكون دالّة الكثافة الحدية لمشاهدات العينة كما يأتي :-

$$f(t_1,t_2,\dots,t_n) = K\int_\lambda\int_\Theta \lambda^{\alpha_1-1+r}\,\theta^{\alpha_2-1+r}\,e^{-\beta_2\theta}e^{-\beta_1\lambda}\,\frac{n!}{(n-r)!}(\theta\lambda)^r \prod_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{t_i^2}\left(1+\frac{\lambda}{t_i}\right)^{-(1+\theta)}\right]\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^{n-r} d\theta\, d\lambda \quad \dots\dots\dots(9)$$

ويمكن الحصول على التوزيع اللاحق (Posterior Distribution) وحسب نظرية بيز للمعلمتين (θ,λ) وباستعمال صيغة بيز العكسية بقسمة دالّة التوزيع المشتركة على دالّة الكثافة الحدّية وكما يأتي :

$$h\left(\lambda,\Theta\middle|(t_1,t_2,\dots,t_r)\right) = \frac{f\left(\lambda,\Theta\middle|(t_1,t_2,\dots,t_r)\right)}{\int_\lambda\int_\Theta f\left(\lambda,\Theta\middle|(t_1,t_2,\dots,t_r)\right)d\theta\, d\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1-1+r}\,\theta^{\alpha_2-1+r}\,e^{-\beta_2\theta}e^{-\beta_1\lambda}\prod_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{t_i^2}\left(1+\frac{\lambda}{t_i}\right)^{-(1+\theta)}\right]\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^{n-r}}{\int_\lambda\int_\Theta \lambda^{\alpha_1-1+r}\,\theta^{\alpha_2-1+r}\,e^{-\beta_2\theta}e^{-\beta_1\lambda}\prod_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{t_i^2}\left(1+\frac{\lambda}{t_i}\right)^{-(1+\theta)}\right]\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^{n-r}d\theta\, d\lambda} \quad \dots\dots\dots(10)$$

سوف يكون مقدّر المعولية بطريقة بيز القياسي كالاتي :-

$$\hat{R}(t)_B = E(R|(t_1,t_2,\dots,t_r)$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty R(t)\, h(\theta,\lambda|t_1,\dots,t_r)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[(1 - (1 + \frac{\lambda}{t})^{-\theta} \left(\frac{\lambda^{\alpha_1-1+r}\, \theta^{\alpha_2-1+r}\, e^{-\beta_2\theta} e^{-\beta_1\lambda} \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{1}{t_i^2}\, (1+\frac{\lambda}{t_i})^{-(1+\theta)}\right] \left[1-(1+\frac{\lambda}{t_r})^{-\theta}\right]^{n-r}}{\int_\lambda \int_\theta \lambda^{\alpha_1-1+r}\, \theta^{\alpha_2-1+r}\, e^{-\beta_2\theta} e^{-\beta_1\lambda} \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{1}{t_i^2}\, (1+\frac{\lambda}{t_i})^{-(1+\theta)}\right] \left[1-(1+\frac{\lambda}{t_r})^{-\theta}\right]^{n-r} d\theta\, d\lambda} \right) \right] d$$

ونلاحظ بأنّ المعادلة المذكورة انفاً معادلات غير خطية (Non-linear) لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية او الاعتيادية المتعارفة ولذلك لابد من استعمال اسلوب تقريبي لحل التكاملات المعقدة في المعادلة المذكورة انفاً وفقاً لذلك يَتَمّ استعمال تقريب ليندلي (Lindley Approximation) وقد قدمت هذه الطريقة من قبل الباحث (D.V Lindley) عام 1980 والتي تنصّ على إيجاد حل تقريبي للتكاملات المعقدة الناتجة من استعمال طريقة مقدّر بيز وفي ما يأتي الطريقة بالتفصيل :

$$E[u(\underline{\delta})] = \frac{\int u(\underline{\delta}) e^{L(\delta)+v(\underline{\delta})} d\underline{\delta}}{\int e^{L(\underline{\delta})+v(\underline{\delta})} d\underline{\delta}} \qquad (12)$$

اذ أنّ :

$L(\underline{\delta})$: لوغاريَتَمّ دالّة الإمكانّ الاعظم.

$v(\underline{\delta})$: لوغاريَتَمّ دالّة التوزيع السابق للمعلمة $(\underline{\delta})$.

$u(\underline{\delta})$: أيْ دالّة للمعلمة $(\underline{\delta})$.

ولحلّ التكاملات الناتجة من صيغة بيز اقترح الباحث ليندلي الصيغة الآتية :

$$E[u(\underline{\delta})] = \left[u(\underline{\hat{\delta}}) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j (u_{ij} + 2u_{ij}v_{ij}) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l L_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{kl}u_l\right] \qquad (13)$$

إذ أنّ :

$u(\underline{\delta})$: مقدّر الإمكانّ الاعظم لدالّة البقاء

u_{ij}: المشتقة الثانية لدالّة البقاء

u_l: المشتقة الأولى لدالّة البقاء

L_{ijk}: : المشتّقة الثالثة للوغاريَتَمّ دالّة الامكانّ الأعظم

v_{ii} : مشتقة دالّة لوغارتيم للتوزيع الأولي للمعلمات (θ,λ)

$$\sigma_{ii} = -\left(\frac{\partial^2 logL}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\right)^{-1} \qquad \mathrm{i,j} = 1,2 \qquad \alpha = \lambda,\Theta$$

وللحصول على تقدير دالّة البقاء $\hat{S}$ للمعالم (θ,λ) لتوزيع لوماكس المعكوس وبتطبيق الصيغة (13) نحصل على الآتي:

$$\hat{S}_{sbsel} = \widehat{S}_{mle} + \frac{1}{2}\,[(\hat{u}_{11} + 2\,\hat{u}_1 v_1)\,\sigma_{11} + (\,\hat{u}_{12} + 2\,\hat{u}_1 v_2)\sigma_{12} + (\,\hat{u}_{21} + 2\,\hat{u}_2 v_1)\sigma_{21} + (\,\hat{u}_{22} + 2\,\hat{u}_2 v_2)\sigma_{22}] \quad + \frac{1}{2}\,\{(L_{111}\sigma_{11}\,\sigma_{11}\,\hat{u}_1 + L_{111}\sigma_{11}\,\sigma_{12}\,\hat{u}_2 + L_{112}\sigma_{12}\,\sigma_{21}\,\hat{u}_1 + L_{112}\sigma_{12}\,\sigma_{22}\,\hat{u}_2) + L_{121}\sigma_{21}\,\sigma_{11}\,\hat{u}_1 + L_{121}\sigma_{12}\,\sigma_{12}\,\hat{u}_2 + L_{122}\sigma_{12}\,\sigma_{21}\,\hat{u}_1 + L_{122}\sigma_{12}\,\sigma_{22}\,\hat{u}_2) + L_{211}\sigma_{21}\,\sigma_{11}\,\hat{u}_1 + L_{211}\sigma_{21}\,\sigma_{12}\,\hat{u}_2 + L_{212}\sigma_{21}\,\sigma_{21}\,\hat{u}_1 + L_{212}\sigma_{21}\,\sigma_{22}\,\hat{u}_2) + (L_{221}\sigma_{22}\,\sigma_{11}\,\hat{u}_1 + L_{221}\sigma_{22}\,\sigma_{12}\,\hat{u}_2 + L_{222}\sigma_{22}\,\sigma_{21}\,\hat{u}_1 + L_{222}\sigma_{22}\,\sigma_{22}\,\hat{u}_2)] \qquad \dots\dots\dots(14)$$

أذ أنّ:

$$U_i = \frac{\partial u}{\partial\alpha_i} \qquad U_{ii} = \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_i^2}$$

$\alpha = \lambda,\Theta$

عندما (U) تساوي:

$$\mathrm{U} = R \quad ,R = 1 - \left(1 + \frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\Theta} \qquad \dots\dots\dots(15)$$

$$\mathrm{U}_1 = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial\Theta} \quad , \quad \mathrm{U}_1 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mathrm{t_r}}\right)^{-\Theta} \ln\left(1 + \frac{\lambda}{\mathrm{t_r}}\right) \qquad \dots\dots\dots(16)$$

$$\mathrm{U}_2 = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial\lambda} \quad , \quad \mathrm{U}_2 = -\Theta\left(1 + \frac{\lambda}{\mathrm{t_r}}\right)^{-(\Theta+1)} \frac{1}{\mathrm{t_r}} \qquad \dots\dots\dots(17)$$

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial\alpha_i^2} \qquad \mathrm{i,j} = 1,2 \qquad \alpha = \lambda,\Theta$$

$$U_{11}=\frac{\partial^2 R}{\partial \Theta^2} \qquad , \qquad U_{11} = -\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\Theta}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2 \qquad \dots\dots\dots(18)$$

$$U_{22}=\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda^2} \qquad , \qquad U_{22} = \Theta(\Theta+1)\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(\Theta+2)}\frac{1}{{t_r}^2} \qquad \dots\dots\dots(19)$$

$$U_{12}, U_{21}=\frac{\partial^2 R}{\partial \Theta\,\partial \lambda} \qquad , \qquad U_{12}, U_{21} = \left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\Theta}\frac{1}{t_r+\lambda} - \left(\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right)\left(\Theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(\Theta+1)}\frac{1}{t_r}\right) \qquad \dots\dots\dots(20)$$

$$\sigma_{ii} = -\left(\frac{\partial^2 logL}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\right)^{-1} \qquad i,j=1,2 \qquad \alpha=\lambda,\Theta$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \Theta^2} = \frac{-r}{\theta^2} + (n-r)\frac{1}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\Theta}\right]}\left[-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\Theta}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2\right] + \frac{(n-r)\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2\Theta}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\Theta}\right]^2} = -\left[\frac{-r}{\theta^2} + (n-r)\frac{1}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\Theta}\right]}\left[-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\Theta}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2\right] + \frac{(n-r)\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2\Theta}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\Theta}\right]^2}\right]^{-1} = \sigma_{11} \qquad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda^2} = -\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda^2}\right]^{-1}$$

$$=$$

$$-\left[\frac{-r}{\lambda^2} + (1+\theta)\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(t_i+\lambda)^2} + (n-r)\frac{-\theta^2-\theta\left[\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(\theta-2)}\frac{1}{{t_r}^2}\right]}{1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}} + \right.$$

$$\left.(n-r)\frac{\left[-\theta^2\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2(\theta-1)}\frac{1}{t_r}\right]}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right]^{-1} = \sigma_{22} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 logL}{\partial\lambda\partial\theta} = -\left[\frac{\partial^2 logL}{\partial\lambda\partial\theta}\right]^{-1}$$

$$= -\left[-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{t_i+\lambda} + (n-r)\frac{1}{1-(1+\frac{\lambda}{t_r})^{-\theta}}\left[\left(-\left((1+\frac{\lambda}{t_r})^{-\theta}\right)\left(\frac{1}{t_r+\lambda}\right)\right) + \left(\ln\left(1+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\frac{\lambda}{t_r}\right)\right)\left(\frac{\theta}{t_r}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta-1}\right)\right] - \left[\left((1+\frac{\lambda}{t_r})^{-\theta}\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right)\left(\frac{\left[-\theta^2\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2(\theta-1)}\frac{1}{t_r}\right]}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right)\right]\right]^{-1} =$$

$$\sigma_{12}, \sigma_{21} \qquad \dots\dots\dots \quad (23)$$

ولإيجاد لوغاريَتَمّ دالّة الإمكانّ الاعظم يكون ذلك بتطبيق الصيغة

$$L_{ijk} = \frac{\partial^3 logL}{\partial\alpha} \qquad\qquad \alpha = \theta, \lambda$$

نحصل على:-

$$\frac{\partial^3 \log L}{\partial\theta^3} =$$

$$\frac{2r}{\theta^3} + (n-r)\left[\frac{1}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]}\left(\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^3\right) - \left(\frac{\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2\theta}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^3}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right)\right] -$$

$$(n-r)\left[\left(\frac{2\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2\theta}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^3}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right) - \left(\frac{2\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-3\theta}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^3}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^3}\right)\right] \qquad \rightarrow$$

$$L_{111} \qquad\qquad (24)$$

$$\frac{\partial^3 logL}{\partial\lambda^3} = \frac{2r}{\lambda^3} - (1+\Theta)\sum_{i=1}^{r}\frac{2}{(t_i+\lambda)^3} + (n-r)\left[\left(\frac{(\theta^2+3\theta^2+2\theta)\left(\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(\theta+3)}\frac{1}{t_r{}^3}\right)}{1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}}\right)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{-(\theta^3+\theta^2)\left[\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(2\theta+2)}\frac{1}{t_r{}^3}\right]}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right)\right] + (n-r)\left[\left(\frac{-(2\theta^3+2\theta^2)\left[\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(2\theta-3)}\frac{1}{t_r{}^3}\right]}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{-2\theta^3\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-3(\theta-1)}\frac{1}{t_r{}^3}}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^3}\right)\right] \quad \rightarrow L_{222} \qquad \dots\dots\dots (25)$$

إذْ أنّ المشتقات الجزئية لدالّة الإمكانّ الأعظم هي:-

$$\frac{\partial^3 logL}{\partial\theta^2\partial\lambda} = (n-r)\left[\frac{1}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]}\left(-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta} 2\left[\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]\left(\frac{1}{t_r+\lambda}\right) + \left[\mathrm{Ln}\left(1+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2\left(-\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(\theta+1)}\frac{1}{t_r}\right)\right) - \left(\frac{\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(2\theta+1)}\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^2\frac{1}{t_r{}^2}}{\left[\left(1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right)\right]^2}\right)\right] + (n-r)\left[\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2\theta}\left[\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2\left(\frac{-2\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(\theta+1)}\left(\frac{1}{t_r}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^3}\right)+$$

$$\left(\frac{1}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right)\left[\left(\left(1+\left(\frac{\lambda}{t_r}\right)\right)^{-2\theta} 2\left[\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]\left(\frac{1}{t_r+\lambda}\right) + \left[\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2\left(-2\theta\left(1+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\frac{\lambda}{t_r}\right)^{(-2\theta-1)}\frac{1}{t_r}\right)\right)\right]\right] \quad \rightarrow \quad L_{112} \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\frac{\partial^3 logL}{\partial\lambda^2\theta} = \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(t_i+\lambda)^2} + (n-r)\left[\frac{\left((-\theta^2-\theta)\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta+2}\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\left(\frac{1}{t_r{}^2}\right)+\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(\theta+2)}(-2\theta-1)\right)}{1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}} + \left(\frac{(\theta^2+\theta)\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{(-2\theta+2)}\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right)\right] +$$

$$(n-r)\left[\left(\frac{\left(-2\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\frac{1}{t_r{}^2}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2} + \frac{2\theta^2\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2\theta}\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\left(\frac{1}{t_r}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^3}\right)\right] \quad \rightarrow L_{221} \qquad \ldots\ldots\ldots(27)$$

$$\frac{\partial^3 \mathrm{logL}}{\partial\lambda\,\partial\theta\,\partial\lambda} = \sum_{i=1}^{r}\frac{2}{(t_i+\lambda)^2} + (n-r)\left[\left[\left(\frac{\left(\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{(-\theta+1)}\left(\frac{1}{t_r}\right)\left(\frac{1}{t_r+\lambda}\right)-\left[\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\left(\frac{1}{(t_r+\lambda)^2}\right)\right]\right)}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]}\right) + \left(\frac{\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2(\theta+1)}\frac{1}{t_r}\left(\frac{1}{t_r+\lambda}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right)\right] + \left[\frac{\left(\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)(-\theta^2-\theta)\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(\theta+2)}\frac{1}{t_r{}^2}+\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(\theta+1)}\left[\frac{1}{(t_r+\lambda)}\right]\right)}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]} + \left(\frac{\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\theta^2\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2(\theta+1)}\frac{1}{t_r{}^2}}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right)\right]\right] +$$

$$(n-r)\left[\left(\frac{\left(-(2\theta^2+\theta)\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(2\theta+2)}\frac{1}{t_r{}^2}\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right)+\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(2\theta+1)}\frac{1}{t_r}\left(\frac{1}{t_r+\lambda}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right) + \left(\frac{2\theta^2\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(3\theta+2)}\frac{1}{t_r{}^2}\mathrm{Ln}\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^3}\right)\right] \quad \rightarrow L_{122}L_{212} \qquad \ldots\ldots\ldots(28)$$

$$\frac{\partial^3 logL}{\partial\theta\partial\lambda\partial\theta} = (n-r)\left[\left(\frac{\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\mathbf{Ln}\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)\frac{1}{(t_r+\lambda)}}{\mathbf{1}-\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}}\right) + \left(\frac{\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-2\theta}\mathbf{Ln}\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)\frac{1}{(t_r+\lambda)}}{\left[\mathbf{1}-\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^{\mathbf{2}}}\right)\right] +$$

$$\left[\left(\frac{-\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta+1}\left[\mathbf{Ln}\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2\frac{1}{t_r}}{\mathbf{1}-\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}}\right) - \left(\frac{\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(2\theta+1)}\left[\mathbf{Ln}\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2\frac{1}{t_r}}{\left[\mathbf{1}-\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^{\mathbf{2}}}\right)\right] +$$

$$(n-r)\left[\left(\frac{\left(-2\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(2\theta+1)}\frac{1}{t_r}\right)\left[\mathbf{Ln}\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2}{\left[\mathbf{1}-\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^2}\right)-\left(\frac{2\theta\left(1+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-(3\theta+1)}\left[\mathbf{Ln}\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)\right]^2\frac{1}{t_r}}{\left[\mathbf{1}-\left(\mathbf{1}+\frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right]^3}\right)\right] \rightarrow$$

$$L_{121}L_{211} \quad \dots\dots\dots(29)$$

وللحصول على (V_{1B}, V_{2B}) يكون ذلك بأخذ لوغارتيم الطبيعي وأيجاد المشتقة الأولى للتوزيع الأولي المشترك

$$V = \log \prod(\theta,\lambda) = \log\left[\frac{\beta_1{}^{\alpha_1}\beta_2{}^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\ \lambda^{\alpha_1-1}\ \theta^{\alpha_2-1}\ e^{-\beta_2\theta}e^{-\beta_1\lambda}\right]$$

$$= \alpha_1\log\beta_1 + \alpha_2\log\beta_2 - \log(\Gamma\alpha_1) + \log(\Gamma\alpha_2) + (\alpha_1-1)\log\lambda + (\alpha_2 - 1)\log\theta - \beta_1\lambda - \beta_2\theta \quad (30)$$

$$V_{1B} = \frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{\alpha_2-1}{\theta} - \beta_2 \qquad (31)$$

$$V_{2B} = \frac{\partial V}{\partial\lambda} = \frac{\alpha_1-1}{\lambda} - \beta_1 \qquad (32)$$

عند اذ يَتَمّ الحصول على مقدّر بيز لدالّة المعولية لتوزيع لوماكس المعكوس بتطبيق الصيغة (14)

6- مقدّر بيز الهرمي في ظل دالّة خسارة تربيعية [2][3][4][7][11]

Hierarchical Bayesian Estimator under squared Error Loss function

أنّ اول من استخدم هذه الطريقة الباحثان (Lindley & Smith) في عام (1972) إذْ تستند هذه الطريقة على أنّ هناك مستويات عدّة للمعلمات الزائدية (Hyper Parameter) وتستعمل هذه المستويات لإيجاد المعلومات الأولية بالنسبة للمعلمات التي يراد تقديرها ودالّة الاحتَمّالية المشتركة $\prod(\theta, \lambda)$ يكون اعتَمّادها على المعلمات الزائدية $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ ويمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة كما يأتي :-

الخطوة الاولى :يَتَمّ التخلص من تأثير المعلمات الزائدية ثُمّ إيجاد التوزيع الأولي للمعلمات المراد تقديرها كالاتي:

$$\prod(\theta,\lambda) = \int_{\forall(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)} \prod(\underline{\alpha} \backslash \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\prod(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\, d\alpha_1, d\alpha_2, d\beta_1, d\beta_2 \quad \dots(33)$$

$\prod(\theta,\lambda)$: التوزيع الأولي للمعلمات المراد تقديرها بعد التخلّص من تأثير المعلمات الزائدية

$\prod(\underline{\alpha}\backslash\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$: التوزيع الأولي للمعلمات الزائدية

$\prod(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$: التوزيع الأولي للمعلمات الزائدية كما يأتي:

$$\pi(\alpha_1) \propto \frac{1}{\beta_2} \qquad 0 < \alpha_1 < 1 \qquad (34)$$

$$\pi(\alpha_2) \propto \frac{1}{\beta_3} \qquad 0 < \alpha_2 < 1 \qquad (35)$$

$$\pi(\beta_1) \propto \frac{1}{\beta_4} \qquad 0 < \beta_1 < c \qquad (36)$$

$$\pi(\beta_2) \propto \frac{1}{\beta_5} \qquad 0 < \beta_2 < c \qquad (37)$$

ثانّيا: للحصول على التوزيع اللاحق الهرمي نعوض التوزيع الأولي في صيغة بيز في المعادلة (3) وكالآتي:

$$h^*(\theta, \lambda | t_1, \ldots, t_n) = \frac{\prod(\theta, \lambda) \prod_{i=1}^{n} f(t_1, \ldots, t_n)}{\int_{\forall \underline{\theta}} \prod(\theta, \lambda) \prod_{i=1}^{n} f(t_1, \ldots, t_n)\, d\underline{\theta}} \qquad (38)$$

عند أذن يمكن إيجاد مقدّر بيز الهرمي لدالّة البقاء في ظل دالّة خسارة تربيعية لتوزيع لوماكس المعكوس وكالآتي :

$$\hat{S}_{HB} = \int_{\forall \underline{\theta}} S(T) h^*(\theta, \lambda | t_1, \ldots, t_n)\, d\theta\, d\lambda \qquad (39)$$

$$\hat{S}_{HBEL} = \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\left(1 - \left(1 + \frac{\lambda}{t_r}\right)^{-\theta}\right) \frac{\frac{1}{\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5} \int_0^1 \int_0^c \int_0^1 \int_0^c \theta^{\alpha_1 - 1 + r} \lambda^{\alpha_2 - 1 + r} e^{-\beta_1 \lambda} e^{-\beta_2 \theta}\, d\beta_2\, d\beta_3\, d\beta_4\, d\beta_5 \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{t_i^{-2}}{1 + \frac{\lambda}{t_i}}\right] \exp[-\theta A_r]}{\frac{1}{\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\int_0^{\beta_2} \int_0^{\beta_3} \int_0^{\beta_4} \int_0^{\beta_5} \theta^{\alpha_1 - 1 + r} \lambda^{\alpha_2 - 1 + r} e^{-\beta_1 \lambda} e^{-\beta_2 \theta}\, d\beta_2\, d\beta_3\, d\beta_4\, d\beta_5 \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{t_i^{-2}}{1 + \frac{\lambda}{t_i}}\right] \exp[-\theta A_r]\right] d\theta\, d\lambda} \right] d\theta\, d\lambda \qquad (40)$$

ونلاحظ بأنّ المعادلة المذكورة آنفاً معادلات غير خطية (Non-linear) لا يمكن حلّها بالطرائق التحليلية أو الاعتيادية المتعارفة ولذلك لابد من استعمال اسلوب تقريبي لحل التكاملات المعقدة في المعادلة المذكورة انفاً وفقاً لذلك يَتَمّ استعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation)

7- الجانب التجريبي:

تَمّ استعمال المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبيا، إذْ يَتَميّز هذا الأسلوب بالمرونة يوفر الكثير من الوقت والجهد والمال وفيه يَتَمّ توليد البيانات نظريا من دون الحصول عليها عمليا وأيضا دون الإخلال بدقة النتائج المطلوبة وتتلخّص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

اولا : تحديد القيم الافتراضية إذْ تَمّ اختيار ثلاثة حجوم للعينات هي (50,100,150) =n ، وثلاثة نماذج واستعملت قيم افتراضية لمعلمات التوزيع (λ,Θ)وهي كما يأتي:

Experiment	Θ	λ
1	0.2	0.9
2	0.9	0.2
3	0.5	0.5

ويَتّمَ اختيار قيمة (r) المقابلة لكُلّ حجم من حجوم العينات وحسب الجدول الآتي:

n	R		
50	25	37	45
100	50	75	90
150	75	112	135

ثانّيا : توليد البيانات

1- تَمّ توليد البيانات بالاعتَمّاد على دالّة (cdf) العكسية (دالّة التحويل المعكوس)

$$t_i = \frac{\lambda}{u^{\frac{-1}{\theta}}-1} \qquad \dots\dots\dots (41)$$

2 - تطبيق المعادلات التي تَمّ التوصل إليها لمقدّر دالّة المعولية في الجانب النظري .

3- تَمّ الاعتَمّاد على التوزيع المشترك الأولي ودالّة الامكانّ الأعظم ودالّة المعولية واستعمال دالّة الخسارة التربيعية في كُلّا الطريقتين البيزية.

4- تَمّ استعمال اسلوب تقريبي لحلّ المعادلات وهو تقريب ليندلي (Lindley Approximation) في كُلّا الطريقتين البيزية.

5- وللمقارنة بين طرائق التقدير تَمّ الاعتَمّاد على مقياس متوسّط مربّعات الخطأ التكاملي (IMSE) وفق الصيغة الآتية:

$$IMSE(\hat{s}(t_i)) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left[\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}\left(\hat{S}_j(t_i) - S_j(t_i)\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} MSE(\hat{S}_j(t_i)) \qquad \dots\dots\dots (42)$$

أذ أنّ :

L: عدد مرات تكرار التجربة وهو (1000) مرة .

n_t: هي حدود المتغيّر (t_i) من الحدّ الأدنى الى الحد الأعلى .

$\hat{S}(t_i)$: القيمة المقدّرة لدالّة البقاء وفق طرائق التقدير المستعملة .

8- الجداول :-

الجداول رقم (1) تبيّن نتائج التقدير لحجوم العينات (50,100,150) وكما يأتي :

$\widehat{R(t\imath)}_B$: دالّة البقاء المقدّرة بطريقة بيز القياسي .

$\widehat{R(t\imath)}_H$: دالّة البقاء المقدّرة بطريقة بيز الهرمية.

Model 1 θ=0.2 , λ=0.9

n	Real(S(t))	Bayesian estimation			Hierarchical Bayesian estimation		
		$\widehat{S(t\imath)}_{BE}$ r=25	$\widehat{S(t\imath)}_{BE}$ r=37	$\widehat{S(t\imath)}_{BE}$ r=45	$\widehat{S(t\imath)}_{HBE}$ r=25	$\widehat{S(t\imath)}_{HBE}$ r=37	$\widehat{S(t\imath)}_{HBE}$ r=45
50	0.98053963	0.98847905	0.98187858	0.98299251	0.98376984	0.98179004	0.98126686
	0.97767301	0.98391039	0.97664485	0.97534515	0.97867622	0.97608079	0.97523^{8}4361
	0.96493158	0.9677218	0.9636409	0.96465168	0.96473726	0.96134397	0.96034043
	0.92762339	0.95208474	0.94264781	0.94076103	0.94129779	0.93697124	0.93587833
	0.92745662	0.94058003	0.93008683	0.9294823	0.92745025	0.92291257	0.92183194
	0.86525841	0.92329373	0.91189936	0.91185049	0.90890644	0.90438222	0.90333057
	0.80151469	0.88550125	0.88686913	0.88455962	0.87860434	0.87434211	0.8733985
	0.79454348	0.8796755	0.87415767	0.87005896	0.86356217	0.85959227	0.85874287
	0.74823111	0.86911854	0.8584183	0.85264317	0.84616346	0.84248343	0.84173568
	0.73559158	0.84512776	0.84221248	0.83229267	0.82064103	0.8173802	0.81689855

Imse		0.000804894	0.00067155	0.000609714	0.000516148	0.00046856	0.000439196

الجدول رقم (1) القيم الحقيقية والتقديرية لدالّة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيم متوسّط مربّعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكُلّ طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنّموذج الأول

Model 1 θ=0.2 , λ=0.9							
n		Bayesian estimation			Hierarchical Bayesian estimation		
	Real(S(t))	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$
		r=50	r=75	r=90	r=50	r=75	r=90
100	0.99111979	0.9949527	0.9932092	0.99208896	0.99298246	0.99113863	0.99128286
	0.9885471	0.986188	0.982065	0.98087694	0.98249693	0.97958185	0.97991602
	0.96796145	0.9704765	0.9658583	0.96612716	0.96901583	0.96553332	0.96591736
	0.96375931	0.9668997	0.9618953	0.96216527	0.96526077	0.96164451	0.96203818
	0.95598923	0.9622567	0.9537622	0.95424745	0.95712809	0.95302778	0.95347021
	0.95333281	0.9589157	0.9499655	0.9505719	0.95114351	0.94677998	0.94725297
	0.92920411	0.9499279	0.9413329	0.94252991	0.94340329	0.93900562	0.93947884
	0.9253377	0.9429423	0.934037	0.93532268	0.9358331	0.93132731	0.93181179
	0.92479038	0.9267659	0.9224242	0.9229778	0.92363391	0.91903652	0.91952244
	0.92350999	0.9138829	0.9130032	0.91189928	0.91226525	0.9076591	0.90814914
Imse		0.0005712	0.00038295	0.0003727	0.00039007	0.00034479	0.00034389

Model 1 θ=0.2 , λ=0.9							
n		Bayesian estimation			Hierarchical Bayesian estimation		
	Real(S(t))	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$
		r=75	r=112	r=135	r=75	r=112	r=135
150	0.99820497	0.99448291	0.9938186	0.99422578	0.99419343	0.993775	0.99365477

	0.98700076	0.98843488	0.9851993	0.98591158	0.9856632	0.9848135	0.98458369
	0.98685208	0.98010662	0.9775011	0.97792624	0.97700915	0.9759406	0.97561955
	0.98352393	0.97200682	0.9696242	0.96903415	0.96805296	0.9668792	0.96641726
	0.98266587	0.96644934	0.9623197	0.96184623	0.96033008	0.9590366	0.95852652
	0.97389994	0.9569627	0.9529597	0.95255016	0.95067239	0.9492577	0.94871338
	0.95474317	0.95035396	0.9455804	0.94500055	0.94279911	0.9413297	0.94072987
	0.90276664	0.936544	0.9318532	0.93101991	0.92849548	0.9270103	0.92635277
	0.88911401	0.93129027	0.9267177	0.92396365	0.92092435	0.919424	0.91875157
	0.85887518	0.92051148	0.9167281	0.9136875	0.91000828	0.9085136	0.90783977
Imse		0.00034126	0.000297	0.00027733	0.00025542	0.0002522	0.00025185

الجدول رقم (2) القيم الحقيقية والتقديرية لدالّة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيم متوسّط مربّعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكُلّ طريقة عند أحجام العيّنات المفترضة للأنّموذج الثاني

Model 2 θ=0.9 , λ=0.2							
n		Bayesian estimation			Hierarchical Bayesian estimation		
		$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$
	Real(S(t))	r=25	r=37	r=45	r=25	r=37	r=45
50	0.98895789	0.99653808	0.99595993	0.99590129	0.99329109	0.9931968	0.99315899
	0.9774206	0.99095561	0.99006131	0.99016733	0.98644769	0.98633494	0.98630077
	0.96831146	0.98340908	0.98267264	0.9827836	0.97647063	0.97611159	0.97608073
	0.963908	0.97846836	0.97710218	0.97736689	0.97018356	0.9697798	0.96973863
	0.93617603	0.97137768	0.97053419	0.97036015	0.9618119	0.96134459	0.96128674
	0.92648197	0.96545124	0.96385259	0.96369302	0.95464309	0.95412686	0.95405366
	0.91612532	0.95980101	0.95825043	0.95828873	0.94871224	0.94820295	0.94813208
	0.91522727	0.95504308	0.9528783	0.95290557	0.94281368	0.94232209	0.9422409

	0.90693293	0.94824211	0.94708922	0.94686095	0.93577553	0.9352139	0.93511105
	0.90035547	0.94039173	0.93917344	0.93911788	0.92711231	0.92647061	0.92638117
Imse		0.003662672	0.00359897	0.003597904	0.003201436	0.00318109	0.003177292

Model 2 θ=0.9 , λ=0.2							
n		Bayesian estimation			Hierarchical Bayesian estimation		
		$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$
	Real(S(t))	r=50	r=75	r=90	r=50	r=75	r=90
100	0.95643714	0.98911495	0.98904872	0.99273078	0.9875571	0.98747346	0.97490882
	0.89681429	0.97058888	0.97135243	0.97752195	0.966958	0.96775305	0.94447211
	0.84992773	0.95512471	0.95455333	0.96205131	0.9502398	0.94958246	0.92730462
	0.82864615	0.93610785	0.9335809	0.93588671	0.9297738	0.92700217	0.9082611
	0.82721114	0.92495223	0.9236677	0.92564524	0.9178628	0.91642305	0.89736878
	0.81944221	0.90411169	0.90160181	0.90014303	0.8958206	0.89307781	0.87504772
	0.80332482	0.88931598	0.88545353	0.88048734	0.8803201	0.87615566	0.85665686
	0.79638095	0.86490714	0.866555	0.86537031	0.8547364	0.85634453	0.83445643
	0.75266676	0.84572445	0.84603699	0.84616059	0.8348369	0.83504697	0.81941414
	0.74827198	0.8225174	0.82955867	0.82775594	0.810866	0.8179917	0.79896406
Imse		0.00117685	0.00115582	0.00112884	0.0008868	0.00085779	0.00070013

Model 2 θ=0.9 , λ=0.2							
N		Bayesian estimation			Hierarchical Bayesian estimation		
		$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$
		r=75	r=112	r=135	r=75	r=112	r=135

	Real(S(t))						
150	0.98315818	0.99667789	0.9968022	0.99588697	0.99599005	0.9957938	0.99422379
	0.97494944	0.9895716	0.98975236	0.98988291	0.98639639	0.98650752	0.98453684
	0.96952473	0.98381428	0.98400182	0.98410884	0.97198427	0.9810449	0.98004211
	0.96922854	0.97910678	0.97933031	0.97941455	0.97728935	0.97671612	0.97636459
	0.96900022	0.97660164	0.97683674	0.97696194	0.9759799	0.97472958	0.97441813
	0.96061001	0.96768201	0.96795333	0.968077	0.96705314	0.96628678	0.96738644
	0.94767351	0.96754228	0.958185	0.9583605	0.95776713	0.95791439	0.95976706
	0.94505093	0.96294996	0.9532853	0.95343893	0.95368713	0.95291794	0.94492441
	0.93178044	0.95734952	0.94771474	0.94803992	0.94801918	0.94715809	0.94741348
	0.9212189	0.94280443	0.94317782	0.94352982	0.942783	0.94225168	0.94082273
Imse		0.00016851	0.00015984	0.00014219	0.00011881	0.00010709	0.00009382

الجدول رقم (3) القيم الحقيقية والتقديرية لدالّة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيم متوسّط مربّعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكُلّ طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنّموذج الثالث

Model 3 θ=0.5 , λ=0.5							
n		Bayesian estimation			Hierarchical Bayesian estimation		
		$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$
	Real(S(t))	r=25	r=37	r=45	r=25	r=37	r=45
50	0.98982834	0.99321129	0.99201991	0.99065952	0.9886133	0.98761767	0.98752882
	0.95429575	0.9773384	0.97732467	0.97526582	0.9698573	0.96856505	0.96847908
	0.93986424	0.95886	0.96024737	0.9567223	0.9504622	0.94879066	0.94873265
	0.91861699	0.94603267	0.94196804	0.94337971	0.9362009	0.93431395	0.93425981
	0.90864449	0.92989297	0.92484964	0.92517736	0.9211063	0.91908317	0.91911959

	0.90006725	0.90666123	0.89853384	0.89996845	0.899899	0.89720329	0.89758746
	0.88341794	0.89612678	0.89229329	0.89173257	0.8901449	0.8871546	0.88763897
	0.85236669	0.88668837	0.88309592	0.88082753	0.8796548	0.87651409	0.87711264
	0.83164087	0.87245496	0.86549268	0.86288588	0.849874	0.84662962	0.84769164
	0.79588258	0.8602347	0.85039476	0.85181462	0.834438	0.83100963	0.83226384
Imse		0.000287842	0.00023945	0.000243324	0.00020054	0.000184994	0.0001809

Model 3 θ=0.5 , λ=0.5							
n		Bayesian estimation			Hierarchical Bayesian estimation		
	Real(S(t))	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{BE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$	$\widehat{S(t\iota)}_{HBE}$
		r=50	r=75	r=90	r=50	r=75	r=90
100	0.99879942	0.99448162	0.9936427	0.99339329	0.99436997	0.99394626	0.9927772
	0.98521173	0.98466291	0.9843303	0.98263171	0.98354467	0.9827582	0.98261602
	0.96765767	0.97254509	0.973199	0.97380579	0.97195404	0.97066588	0.9705737
	0.96363433	0.96875448	0.9688559	0.9681469	0.96660919	0.96516574	0.96501664
	0.94997104	0.96316596	0.962489	0.96074029	0.95755783	0.95597183	0.95572089
	0.94657675	0.95331221	0.9510522	0.94980953	0.94738046	0.94567283	0.94536912
	0.93292488	0.94428781	0.942322	0.94338649	0.93810223	0.93627769	0.93595396
	0.92888997	0.93650388	0.9340771	0.93407583	0.92997953	0.92809229	0.92773468
	0.92089719	0.92258986	0.9209174	0.92097611	0.91660582	0.91455062	0.91415841
	0.91820611	0.918348	0.9160641	0.91433235	0.91073058	0.9086564	0.90824597
Imse		0.00026375	0.0002344	0.00021662	0.00015808	0.00013533	0.00012723

Model 3 θ=0.5 , λ=0.5							
n		Bayesian estimation			Hierarchical Bayesian estimation		
	Real(S(t))	$\widehat{S(ti)}_{BE}$ r=75	$\widehat{S(ti)}_{BE}$ r=112	$\widehat{S(ti)}_{BE}$ r=135	$\widehat{S(ti)}_{HBE}$ r=75	$\widehat{S(ti)}_{HBE}$ r=112	$\widehat{S(ti)}_{HBE}$ r=135
150	0.99946802	0.99627278	0.99562706	0.99594823	0.9961417	0.99493985	0.99589195
	0.99587718	0.98950493	0.99964559	0.99974374	0.9701518	0.99029623	0.99044216
	0.96012882	0.98263872	0.98373965	0.9840055	0.9816813	0.98274821	0.98308092
	0.95515716	0.97773506	0.97824734	0.97847919	0.9760419	0.97750549	0.97782736
	0.94889843	0.9699688	0.96760966	0.96996821	0.9685731	0.96521234	0.96968439
	0.94734803	0.96371755	0.96990799	0.96224357	0.9625546	0.9637253	0.96119228
	0.94399114	0.95878464	0.95724459	0.95765726	0.9577846	0.95621883	0.95677293
	0.94231405	0.94796777	0.94955899	0.95210877	0.9402137	0.94878139	0.95048893
	0.93997452	0.94298848	0.94502593	0.94963574	0.9353873	0.94438928	0.94816714
	0.93703067	0.93907325	0.93944324	0.94011032	0.9215917	0.93898327	0.92283234
Imse		0.00014061	0.00012407	0.00012156	0.0001231	0.00011107	0.00010948

9- الاستنتاجات:-

أ- بيّنَتْ النتائج بأنّ طريقة بيز الهرمي هي أفضل من طريقة بيز القياسية القيم الافتراضية لجميعها ولحجوم العينات جميعها .

ب- بيّنَتْ النتائج أنّ (IMSE) لدالّة المعولية لطريقة بيز الهرمي هو أقل من IMSE لدالّة المعولية لطريقة بيز القياسية القيم الافتراضية جميعها.

ج- اظهرت النتائج أنّ قيمة(IMSE) أقل في كُلّا الطريقتين كُلما زاد حجم العينة.

10- التوصيات :

أ- يوصي الباحث استعمال طريقة بيز الهرمي لتقدير دالّة البقاء لتوزيعات المختلطة.

ب- يوصي الباحث باجراء بحوث للمقارنة بين طريقة بيز القياسية وطريقة بيز الهرمية باستعمال دوال خسارة اخرى متَمّاثلة وغير متَمّاثلة.

ج- استعمال تقريب ليندلي في الطرائق البيزية في تقدير المعلمات ودالّة البقاء لإعطائه نتائج دقيقة.
د- دراسة توزيعات مختلطة أخرى لتقدير المعلمات ودالّة البقاء .

11-المصادر:

1- وفاء جعفر الوندي (2013)م "اسلوب التوقع البيزي لتقدير معدّل الفشل بوجود بيأنّات مراقبة من النوع الاول مع تطبيق عملي" رسالة ماجستير كُلّية الأدارة والاقتصاد جامعة بغداد

2- Amin, A. A. (2020). Bayesian analysis of double seasonal autoregressive models. Sankhya B, 82(2), 328-352

3- .Davy, M., Doncarli, C., & Tourneret, J. Y. (2002). Classification of chirp signals using hierarchical Bayesian learning and MCMC methods. IEEE transactions on Signal Processing, 50(2), 377-388.

4- Galatsan,N,P& Mesarovic , Molina, Katsaggelos ,K(2000)." Hierarchical Bayesian Image Restoration From artially Known Blurs", IEEE Transaction Image Processing, Vol

5- Han, M., (2006). "E-Bayesian Method to Estimate Failure Rate ,The Sixth International Symposium" on Operations Research, Its Applications (ISORA'06) Xinjiang, China

6-Han, M., (2008). "Expected Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate" Journal of Chen university .pp. 339-407.

7-Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate. Applied Mathematical Modelling, 33(4), 1915-1922 .

8- Ibrahim, M., Mohammed, W., & Yousof, H. M. (2020). Bayesian and Classical Estimation for the One Parameter Double Lindley Model. Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 409-420.

Jamilu Yunusa (2020) "The Zubair-Inverse Lomax Distribution with Applications"
9 -Falgore

Asian Journal of Probability and Statistics Department of Statistics, Ahmadu Bello University, Zaria-Nigeria.

10- Kim, C., & Han, K. (2015). Bayesian estimation of generalized exponential distribution under progressive first failure censored sample, Applie Mathematical Sciences, 9(41), 2037-2047.

11- Kinyanjui, J., & Korir, B. (2020). Bayesian Estimation of Parameters of Weibull Distribution Using Linex Error Loss Function. International Journal of Statistics and Probability, 9(2), 1-38.

12- Obubu Maxwell , Angela Unna Chukwu, Oluwafemi Samuel Oyamakinand Mundher A. Khaleel "The Marshall-olkin Inverse Lomax Distribution (MO- with Application on Cancer Stem Cell"Department of Statistics, Nnamdi (2019)ILD) Azikiwe University, Awka, Nigeria. Department of Statistics, University of Ibadan, Ibadan, Nigeria. Department of Computer Science and Mathematics, Tikrit University, Iraq.

13- Surendran.C., (2000). "Hierarchical Bayes Approach To Adapting Delta-And Delta-Delta Cepstra", Multimedia Communications Research Labs Lucent Technologies Murray HILL NJ07674 .

14 - Tourneret. Y. &Suparman.s., & Doisy.M. (2003)." Hierarchical Bayesian Segmentation Of Signals Corrupted By Multiplicative Noise", Enseeiht/Irit,2 rue Charles Camichel BP 7122,31071

15 - Uzma Jan and S.P. Ahmad (2017) "Bayesian Analysis of Inverse Lomax Distribution Using Approximation Techniques" Department of Statistics, University of Kashmir, Srinagar, India