

تقدير دالة البقاء باستعمال طريقتي الإمكان الأعظم وكرايمر فون ميسز للتوزيع المختلط ويبل-

ايلاموجيا مع تطبيق عملي

estimating the survival function Maximum Likelihood and Cramér-Von Mises Method
use of amixture distribution weibull and ailamujia with apractical application

<https://doi.org/10.29124/kjeas.1650.21>

أ.م. د. وفاء جعفر حسين⁽²⁾

عذراء جعفر خلف⁽¹⁾

جامعة واسط /كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

المستخلص

تَمَّ خلط توزيعين من توزيعات الفشل وهما: توزيع ويبل – وتوزيع ايلاموجيا، والذي أطلق عليه توزيع ويبل –ايلاموجيا المكوّن من أربعة معالم إذ تَمَّ خلط التوزيعين بإضافة معلمة الخلط λ التي تَمَّ اقتراحها إذ أنّ هذا الخليط للتوزيعين يكون أكثر كفاءه ومرونة وتمثيل للبيانات من التوزيعات المفردة إذ تَمَّت دراسة مجموعة من الخصائص الإحصائية للتوزيع الخليط كالدالة الاحتمالية ودالة البقاء ودالة معدل الفشل ولتقدير معالم التوزيع الخليط تم استخدام طرق التقدير الكلاسيكية، وهي طريقة الإمكان الأعظم (MLE)، وطريقة كرايمر فون ميسز (CVM). ولقد تَمَّت المقارنة بين الطرائق باستعمال محاكاة مونت كارلو كما تَمَّ أخذ بيانات حقيقية تخصّ مرض السل (TB) المقاومة للعقاقير الطبية (MDR)(Multi Drug Resistance) وتَمَّت مقارنة الطرق باستخدام المعيار الاحصائي MSE، وظهرت النتائج افضلية طريقة كرايمر فون ميسز لامتلاكها اقل MSE .

الكلمات المفتاحية: توزيع ويبل-توزيع ايلاموجيا-التوزيع المختلط، طريقة الإمكان الأعظم MLE، طريقة كرايمر فان ميسز CVM.

Abstract

Tow failure distributions were mixed ,weibull distribution and ailamujia distribution it's called weibull –ailamujia distribution which consists of four features, the two distributions were mixed by adding a mixing parameter ,the mixture of two distributions would be more

efficient ,and representative of the data than the single distributions. A group of statistical properties of the mixture distribution were studied , such as the probability function ,the survival function and the failure rate function .classical estimation method were used to estimate the parameters of the mixture distribution, which are maximum likelihood of method ,the cramer –von mises method ,The method were compared using monte carlo simulations real data were taken regarding drug –resistant tuberculosis (TB) Multi Drug Resistance(MDR) methods were compared using the MSE statistical criterion ,and the result should a preference for the method cramer-von mises for having the lowest MSE

Keywords: Weibull Distribution, Ailamujia Distribution, Mixture Distribution

Maximum Likelihood of Method ,the Cramer –Von Mises Method.

Introduction

1- المقدمة

إنّ من أهمّ مراحل التحليل الإحصائي هو ايجاد الانموذج المناسب لبيانات الظاهرة قيد الدراسة إذ إنّ هذه المرحلة تعدّ المرحلة المهمة والأساس التي تستند عليها بقية مراحل التحليل، ويتمّ فيها استعمال توزيعات احتمالية معروفة تمثّل البيانات لغرض دراسة الظواهر والتنبؤ بها. وفي الآونة الاخيرة تمّ العمل من قبل الباحثين على تطوير التوزيعات الاحتمالية (Probability distribution) إلى توزيعات احتمالية مختلطة (Mixture Probability distribution) او المدمجة وذلك لإيجاد الأنموذج المناسب لتمثيل البيانات وزيادة الدقة في التحليل بأقلّ الأخطاء وإيجاد الدوال المتعلقة بهذه التوزيعات: (دالة الكثافة التجميعية، للفشل، ودالة البقاء، ودالة معدّل الفشل).

ويأتي السبب الرئيس لمزج التوزيعات الاحتمالية، وذلك لأنّ تمثيل البيانات حول بعض الظواهر يأخذ منحنيات وأشكال مختلفة في المدّة المدروسة نفسها، وبهذا يكون مجتمع الدراسة حول ظاهرة ما عبارة عن مزيج من المجتمعات الجزئية، لذلك تأتي أهمية هذه التوزيعات الجديدة من حيث الأفضلية عند إجراء حسن المطابقة لتمثيل البيانات والظاهرة قيد الدراسة.

Weibull Distribution

2- توزيع ويبيل

المستعملة البارزة وتم تسميته نسبة إلى اسم العالم السويدي (waloddi weibull) في عام (1939) [8].

ومن مميّزات هذا التوزيع :

- عندما تكون $\beta=1$ يتخصص توزيع ويبيل ذي معلمتين بالتوزيع الأسّي.
- عندما تكون $\beta=2$ يتخصص توزيع ويبيل ذي معلمتين بالتوزيع رالي.
- عندما تكون $\beta>1$ فإنّ دالة معدّل الفشل تتزايد.
- عندما تكون $\beta<1$ فإنّ دالة معدل الفشل تتناقص.

• عندما تكون $\beta=1$ فإن دالة معدل الفشل ثابتة

ان دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لهذا التوزيع كما يأتي:

$$f(t; \alpha, \beta) = \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} \quad t > 0 \quad \alpha, \beta > 0 \quad \dots (1)$$

بحيث إن:

α : تمثل معلمة القياس.

β : تمثل معلمة الشكل.

وإن دالة الكثافة التجميعية للتوزيع ويبل كما يأتي:

$$F(t; \alpha, \beta) = 1 - e^{-\alpha t^\beta} \quad \dots (2)$$

أما دالة معدل الفشل للتوزيع ويبل

$$\begin{aligned} h(t; \alpha, \beta) &= \frac{f(t)}{s(t)} \\ &= \alpha \beta t^{\beta-1} \end{aligned} \quad \dots (3)$$

ودالة البقاء للتوزيع ويبل

$$\begin{aligned} S(t; \alpha, \beta) &= 1 - F(t) \\ &= e^{-\alpha t^\beta} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

Ailamujia Distribution

3- توزيع الايلاموجيا

وهو أحد التوزيعات الاحتمالية المستمرة تم تقديمه من قبل (LV et al (2002). ويستعمل لتحليل البيانات الطبية والهندسية [7]

إن توزيع ايلاموجيا يتميز بخصائص عدّه وهي:

1. يكون ضمن الفترة أكبر من الصفر.
2. يتم التحكم في شكل التوزيع بواسطة معلمة θ .

إذ إن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع هي :

$$f(t, \theta) = 4 \theta^2 t e^{-2\theta t} \quad \theta > 0 \quad \dots(5)$$

θ : تمثل معلمة القياس

وإن دالة الكثافة التجميعية للتوزيع الايلاموجيا :

$$F(t, \theta) = 1 - e^{-2\theta t} (2\theta t + 1) \quad \dots (6)$$

وأما دالة معدل الفشل لتوزيع ايلاموجيا تكتب وفق الصيغة الآتية:

$$h(t, \theta) = \frac{f(t)}{s(t)} \\ = \frac{4\theta^2 t e^{-2\theta t}}{e^{-2\theta t}(2\theta t + 1)} \quad \dots (7)$$

أما دالة البقاء لتوزيع ايلاموجيا تكتب وفق الصيغة الآتية

$$S(t, \theta) = 1 - F(t) \\ = e^{-2\theta t}(2\theta t + 1) \quad \dots (8)$$

4-التوزيع المختلط Mixture distribution التوزيع المختلط هو خلط

المجتمعات الجزئية وكل مجتمع حسب نسبته من المجتمع الأصلي ويتنم ذلك من خلال إضافة توزيعين أو أكثر حسب طبيعة الدراسة، والنموذج المختلط الذي تناوله البحث هما: متغيران عشوائيان حدهما توزيع ويبل (Weibull Distribution) معلمة القياس α ومعلمة الشكل β ،والآخر توزيع (ailamujia distribution) بمعلمة القياس θ إذ كانت أغلب الدراسات على التوزيعات المفردة سواء أكانت مستمرة أم متقطعة، وإن هذه التوزيعات لا تحقق المرونة الكافية، لذلك لجأ الباحثون إلى التوزيعات المختلطة. وتأتي أهمية هذه التوزيعات الجديدة من حيث الأفضلية عند إجراء حسن المتطابقة لتمثيل البيانات والظاهرة قيد الدراسة [11]:في عام (2007) قام الباحثون (Carl Lee وآخرون)[1]بتقديم بحثا تناول توزيع بيتا ويبل (beta-Weibull) رباعي المعلمات إذ يحتوي التوزيع على دوال معدل الفشل متناقصة(decreasing)ومتزايدة(increasing).في عام (2011)قدّم الباحثون (Serge B. Provost وآخرون) [2]دراسة تضمنت توزيع كما ويبل(gamma-weibull)وقام الباحثون بدراسة الخصائص الاحصائية كالدالة المؤدة للعزم (Moment Generating Function)،العزوم (Moments). في عام (2016) اقترح (Ahmed Z. Afify وآخرون) [3] دراسة توزيع تعميم جديد(new generalization distribution) لتوزيع (WeibuII-Pareto) المحول، وهو ما يسمى بتوزيع (ويبل -باريتو) المحول، كما تم اشتقاق المميزات الرياضية المختلفة بما فيها العزوم (Moment)،والدالة المؤدة والكمية(Quantile and Generating Functions)،والعزوم غير مركبة(Incomplete Moments). في عام (2021) قام الباحثون (Hassan M.Aljohani وآخرون)[9] بدراسة توزيع المختلط (Poisson-Ailamujia) باستعمال طريقة التحويل ذات الحدين (binomial transformation method) وسميت هذا التوزيع (Unform Poisson-Ailamujia)(UPA)،وقاموا باستخلاص الخصائص الأساس

للتوزيع. في عام (2023) اقترحت (IDZHAR A.LAkTBUL) [10] تقديم توزيع (Ailamujia Inverted WeibuII) يسمى توزيع (AiIamujia Transmuted Ailamujia Inverted WeibuII)، اشتقاق بعض خصائص التوزيع كالعزوم (moments)، ودالة المولدة للعزوم (moment generating function)، والوسط الحسابي (mean).

إذ إن صيغة التوزيع المختلط:

$$f(t) = \lambda f_{1(t)} + (1-\lambda)f_{2(t)} \quad \dots(9)$$

λ : تمثل معلمة نسبة الخلط، والتي تكون قيمتها $(0 < \lambda < 1)$

$$f_{1(t)} = \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta}$$

يمثل توزيع ويبيل

$$f_{2(t)} = 4\theta^2 t e^{-2\theta t}$$

يمثل توزيع ايلاموجيا

وعليه ان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المختلط:

$$f(t; \alpha, \beta, \theta) = \int_0^\infty \lambda \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} dt + \int_0^\infty (1-\lambda) 4\theta^2 t e^{-2\theta t} dt \quad t \geq 0 \quad \alpha, \beta, \theta > 0 \quad \dots (10)$$

وبذلك يمكن إثبات دالة الكثافة الاحتمالية بأنها تحقق الشرطين الآتيين

1. $f(t) \geq 0$
2. $\int_0^\infty f(t) dt = 1$

$$f(t) = \int_0^\infty \lambda \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} dt + \int_0^\infty (1-\lambda) 4\theta^2 t e^{-2\theta t} dt$$

نفرض A_1 الحد الأول

$$A_1 = \lambda \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} dt$$

وبإجراء التكامل للحد الأول

$$\int_0^\infty A_1 dt$$

$$\int_0^{\infty} \lambda \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}} dt$$

لتكن

$$y = \alpha t^{\beta} \rightarrow t^{\beta} = \frac{y}{\alpha} \rightarrow t = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \rightarrow dt = \frac{1}{\beta} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)-1} \frac{1}{\alpha} dy \rightarrow \frac{1}{\alpha \beta} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)-1} dy$$

$$\lambda \int_0^{\infty} \alpha \beta \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\beta-1}} e^{-y} \frac{1}{\alpha \beta} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)-1} dy$$

$$\lambda \int_0^{\infty} \alpha \beta \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{1-\left(\frac{1}{\beta}\right)} e^{-y} \frac{1}{\alpha \beta} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)-1} dy$$

$$\lambda \int_0^{\infty} e^{-y} dy$$

$$\lambda [-e^{-y}]_0^{\infty}$$

$$\lambda [-e^{-\infty} + e^{-0}]$$

$$\lambda$$

...(11)

نفرض A_2 الحد الثاني

$$A_2 = 4\theta^2 t e^{-2\theta t} dt$$

وبإجراء التكامل للحد الثاني

$$\int_0^{\infty} A_2 dt$$

$$\int_0^{\infty} 4\theta^2 t e^{-2\theta t} dt$$

$$\text{Let } y = 2\theta t \rightarrow t = \frac{y}{2\theta} \rightarrow dt = \frac{1}{2\theta} dy$$

$$(1-\lambda) \int_0^{\infty} 4\theta^2 \frac{y}{2\theta} e^{-y} \frac{1}{2\theta} dy$$

$$(1-\lambda) \int_0^{\infty} y e^{-y} dy$$

$$(1-\lambda) [ye^{-y}]_0^{\infty}$$

$$(1-\lambda)[(\infty)e^{-\infty} - (0)e^{-0}]$$

$$(1-\lambda) \dots (12)$$

وبجمع معادلتين (11)(12) نحصل

$$\lambda + (1 - \lambda) = 1$$

دالة الكثافة التجميعية للتوزيع المختلط:

$$\begin{aligned} F(t; \alpha, \beta, \theta) &= \int_0^\infty \lambda F_1(t) + \int_0^\infty (1 - \lambda) F_2(t) \\ &= \lambda \int_0^\infty 1 - e^{-\alpha t} dt + (1-\lambda) \int_0^\infty 1 - e^{-2\theta t} (2\theta t + 1) dt \end{aligned} \dots (13)$$

أما دالة البقاء لتوزيع المختلط:

$$\begin{aligned} S(t; \alpha, \beta, \theta) &= 1 - F(t) \\ &= \lambda e^{-\alpha t^\beta} \\ &= \\ (1 - \lambda) e^{-2\theta t} (2\theta t + 1) + \end{aligned} \dots (14)$$

ودالة معدل الفشل للتوزيع المختلط :

$$\begin{aligned} h(t; \alpha, \beta, \theta) &= \frac{f(t)}{s(t)} \\ &= \frac{\lambda \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} + (1-\lambda) 4\theta^2 t e^{-2\theta t}}{(1-\lambda) e^{-2\theta t} (2\theta t + 1) + \lambda e^{-\alpha t^\beta}} \end{aligned} \dots (15)$$

ومن خصائص التوزيع المختلط (ويبل-ايلاموجيا)

• الدالة المولدة للعزوم

$$E(e^{xt}) = \int_0^\infty e^{xt} \lambda \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta} dt + \int_0^\infty e^{xt} (1 - \lambda) 4\theta^2 t e^{-2\theta t} dt \dots (16)$$

• العزم الرائي غير المركزي

$$E(t)^r = \int_0^\infty t^r f(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} t^r \lambda \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}} dt + \int_0^{\infty} t^r (1 - \lambda) 4\theta^2 t e^{-2\theta t} dt \quad \dots (17)$$

• العزم المركزي الرائي حول الوسط الحسابي

$$E(t - M)^r = \int_0^{\infty} E(t - M)^r f(t) dt = \int_0^{\infty} E(t - M_1)^r \lambda \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}} dt + \int_0^{\infty} (t - M_2)^r (1 - \lambda) 4\theta^2 t e^{-2\theta t} dt \quad \dots (18)$$

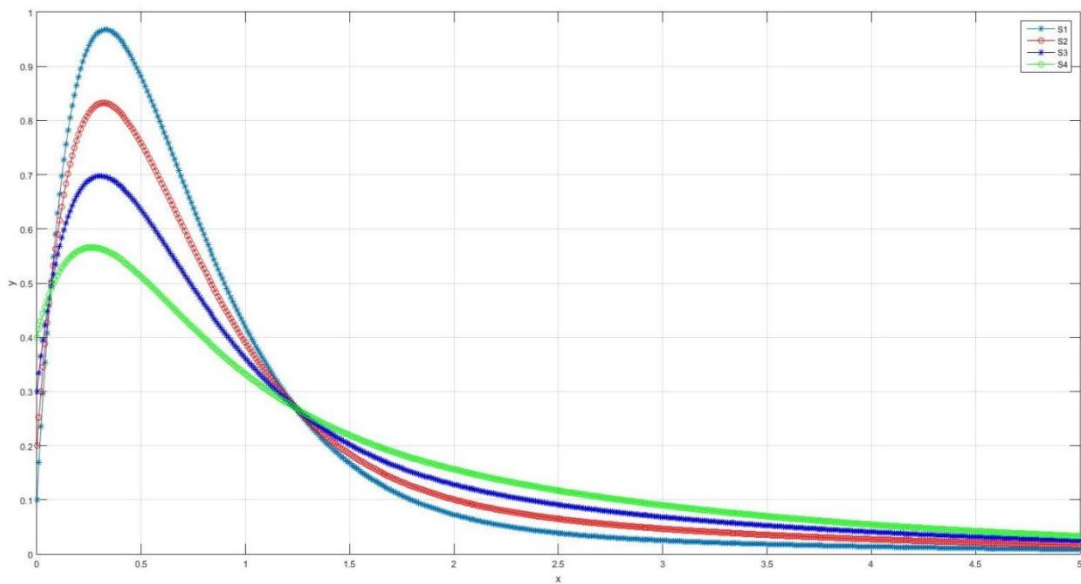
• التباين للتوزيع المختلط

$$\sigma^2 = \lambda \sum_{j=0}^2 \binom{j}{2} (-M)^{j-2} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{j}{\beta}} + (1 - \lambda) \sum_{j=0}^2 \binom{j}{2} \left(\frac{1}{2\theta}\right)^j (j + 2) \quad \dots (19)$$

• الانحراف المعياري للتوزيع المختلط

$$\sigma = \sqrt{\lambda \sum_{j=0}^2 \binom{j}{2} (-M)^{j-2} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{j}{\beta}} + (1 - \lambda) \sum_{j=0}^2 \binom{j}{2} \left(\frac{1}{2\theta}\right)^j (j + 2)} \quad \dots (20)$$

الشكل رقم (1) دالة التوزيع الخليط ويبل -إيلاموجيا



من الشكل رقم (1) يمكن ملاحظة تأثير معلمة نسبة الخلط λ على شكل التوزيع إذ يزداد الالتواء بالتوزيع بانخفاض قيمة معلمة الخلط .

Estimation of Methods

5-طرائق التقدير

في هذا البحث تمّ استعراض بعض طرائق التقدير لتقدير معلمات التوزيع الاحتمالي المختلط (وييل-ايلاموجيا) من خلال التوصل إلى أفضل المقدرات لمعلمات التوزيع، وهذه الطرائق هي: طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood (of Method) (MLE)، وطريقة كرايمر فون مايسز (CVM) (Cramér-Von Mises Method) وكما يأتي:

Maximum Likelihood of Method(MLE)

أولاً: طريقة الإمكان الأعظم

تعدّ من الطرائق المهمة والمستعملة، وهي إحدى الطرق التقليدية التي اقترحها فيشر (1920) إذ تمتلك بعض الخصائص ومنها: الثبات invariant، والاتساق consistency، وعدم التحيز unbiased والغرض من هذه الطريقة تقدير المعلمات التي تجعل لوغاريتم الإمكان في نهايتها العظمى [4].

نفرض أنّ مشاهدات عيّنة عشوائية بحجم $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ من التوزيع المختلط فإنّ دالة الإمكان الأعظم ستكون :

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n, \alpha, \beta, \theta, \lambda) = f(t_1, \alpha, \beta, \theta, \lambda) \cdot f(t_2, \alpha, \beta, \theta, \lambda) \dots f(t_n, \alpha, \beta, \theta, \lambda)$$

نعوض دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المختلط.

$$f(t, \alpha, \beta, \theta, \lambda) = \lambda \alpha \beta t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^\beta} + (1 - \lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i} \quad \dots (21)$$

وبتعظيم دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المختلط

$$Lf(t, \alpha, \beta, \theta, \lambda) = (\lambda \alpha \beta)^n \prod_{i=1}^n [t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^\beta} + (1 - \lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i}]$$

أخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على:

$$\begin{aligned} \ln L &= n \ln \lambda + n \ln \alpha + n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln [t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^\beta} \\ &\quad + (1 - \lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i}] \quad \dots (22) \end{aligned}$$

إيجاد المشتقة الجزئية بالنسبة (α, β, θ) ومساواتها للصفر نحصل على:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^\beta} + (1 - \lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i}} * t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^\beta} t_i^\beta = 0$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^\beta} t_i^\beta}{t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^\beta} + (1 - \lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i}}} \quad \dots (23)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta} + \frac{1}{t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^{\beta}} + (1-\lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i}} * t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^{\beta}} (-\alpha t_i^{\beta}) \ln(t_i) = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^{\beta}} (-\alpha t_i^{\beta}) \ln(t_i)}{t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^{\beta}} + (1-\lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i}}} \quad \dots (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^{\beta}} + (1-\lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i}} * (1-\lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i} (-2t_i) \\ &\quad + e^{-2\theta t_i} t_i (1-\lambda) = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(1-\lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i} (-2t_i) + e^{-2\theta t_i} t_i (1-\lambda)}{t_i^{\beta-1} e^{-\alpha t_i^{\beta}} + (1-\lambda) 4\theta^2 t_i e^{-2\theta t_i}} \quad \dots (25) \end{aligned}$$

المعادلات (23)، (24)، (25) مجموعة هذه المعادلات غير خطية تُحلّ عددياً بطريقة نيوتن رافسون للحصول على طريقة الإمكان الأعظم.

ثانياً: طريقة كرايمر- فون مايسز

Cramér-Von Mises Method (CVM)

تعتمد هذه الطريقة على تقدير الحد الأدنى من المسافة، وأول من اقترحها (MacDonald) [5][6]

$$\tau = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F(t_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \quad \dots (26)$$

$$\tau = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[\lambda (1 - e^{-\alpha t_i^{\beta}}) + (1-\lambda) 1 - e^{-2\theta t_i} (2\theta t_i + 1) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2$$

وباشتقاق لمعلمة α ومساواتها للصفر

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{i=1}^n \left[\lambda (1 - e^{-\alpha t_i^{\beta}}) + (1-\lambda) 1 - e^{-2\theta t_i} (2\theta t_i + 1) - \frac{2i-1}{2n} \right] * -\lambda t_i^{\beta} e^{-\alpha t_i^{\beta}} \\ &= 0 \quad \dots (27) \end{aligned}$$

وباشتقاق لمعلمة β ومساواتها للصفر

$$\frac{\partial \tau}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\lambda \left(1 - e^{-\alpha t_i^\beta} \right) + (1 - \lambda) 1 - e^{-2\theta t_i} (2\theta t_i + 1) - \frac{2i - 1}{2n} \right] * \lambda \alpha e^{-\alpha t_i^\beta} t_i^\beta \ln(t)$$

$$= 0 \quad \dots (28)$$

وباشتقاق لمعلمة θ ومساواتها للصفر

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\lambda \left(1 - e^{-\alpha t_i^\beta} \right) + (1 - \lambda) 1 - e^{-2\theta t_i} (2\theta t_i + 1) - \frac{2i - 1}{2n} \right] * 1$$

$$- e^{-2\theta t_i} (2\theta t_i + 1) - \lambda + \lambda e^{-2\theta t_i} (2\theta t_i + 1)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n \left[\lambda \left(1 - e^{-\alpha t_i^\beta} \right) + (1 - \lambda) 1 - e^{-2\theta t_i} (2\theta t_i + 1) - \frac{2i - 1}{2n} \right] * 0 - e^{-2\theta t_i} (2t)$$

$$+ (2\theta t_i + 1) e^{-2\theta t_i} (-2t_i) - 0 + \lambda e^{-2\theta t_i} (2t) + (2\theta t_i + 1) \lambda e^{-2\theta t_i} (-2t)$$

$$= 0 \quad \dots (29)$$

المعادلات (27)، (28)، (29) مجموعة هذه المعادلات غير خطية تحل عدديا بطريقة نيوتن رافسون للحصول على طريقة كريمر فان مايسز

اسلوب المقارنة

أما بالنسبة إلى قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE) وتم حسابها بالاعتماد على القيمة الحقيقية للدالة المعولية مع القيمة التقديرية، واختيار الطريقة الأفضل باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (AMSE)، والذي كلما تقل قيمته يكون المقدّر أفضل كما يمكن كتابته صيغته كالاتي:

$$MSE(S(t)) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (S(t_i) - \hat{S}(t_i))^2 \quad (31)$$

إذ إن:

L: تمثل عدد مرات تكرار التجربة وهو (1000) مرة.

$\hat{S}(t_i)$: القيمة المقدرة لدالة البقاء وفق طرائق التقدير المستعملة.

t_i : تمثل أوقات البقاء لحين الفشل.

$S(t)$: دالة البقاء الحقيقية.

(Simulation)

6-المحاكاة :

أولاً: الجانب التجريبي

لتوليد البيانات العشوائية التي تتبع التوزيع الخليط (ويل-ايلاوجيا) إذ تُنَمَّ بطريقة التحويل العكسي المقرب (Inverse transformation approximation) إذ تستعمل هذه الطريقة لتوليد البيانات للتوزيعات التي تكون لها دالة c.d.f معقدة، لذلك سَيُتَمَّ إعطاء توزيع $F(x_i)$ التقريبي من خلال جدول البحث عن مجموعة من الفترات $(F(x_i), x_i)$ إذ

$$x_i < x_i + 1$$

ويتم توليد كالاتي

1. توليد أرقام عشوائية u_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0,1)

$$u_i \sim u(0,1) \quad i = 0,1,2, \dots, n$$

2. تحديد البيانات المولدة ($i=0,1,2,\dots,n$) في النقطة السابقة، والتي يكون توزيعها المنتظم المستمرّ الفئة التي تنتمي إليها :

$$\in [F(x_i), F(x_i + 1)]$$

3. عندئذ ستكون البيانات العشوائية التي تتبع التوزيع الخليط (ويل-ايلاوجيا) كالاتي:

$$x = \frac{[F(x_i + 1) - u]x_i + [u - F(x_i)]x_i + 1}{F(x_i + 1) - F(x_i)} \quad \dots (30)$$

تَمَّ افتراض مجموعة قيم لمعاملات (α, β, θ) بحسب قيمة λ المقترحة، إذ تَمَّ اقتراح 4 قيم من قيم λ وهي كالتالي (0.2,0.4,0.6,0.8) وكذلك تم اقتراح قيم افتراضية للمعاملات إذ كانت النتائج كالاتي:

الجدول رقم (1) القيم الحقيقية و التقديرية لطريقة الإمكان الأعظم لمعلمة (α, β, θ) وقيمة

$$(\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$$

Lambda	Parameter	S	E	S	E	S	E	S	E	S	E
0.2	Alpha	0.2	1.41	0.4	1.83	0.5	1.88	0.6	1.92	0.8	1.92
	Beta	1	2.21	1.5	2.32	2	3.42	2.5	4.11	3	4.78
	Theta	1.5	2.13	1.75	2.88	2	3.21	2.25	3.87	3	4.81
0.4	Alpha	0.2	1.32	0.4	1.71	0.5	1.73	0.6	1.83	0.8	1.90
	Beta	1	2.11	1.5	2.22	2	3.41	2.5	4.00	3	4.67

	Theta	1.5	2.01	1.75	2.77	2	3.10	2.25	3.76	3	4.70
0.6	Alpha	0.2	1.25	0.4	1.65	0.5	1.64	0.6	1.76	0.8	1.90
	Beta	1	2.11	1.5	2.22	2	3.41	2.5	4.00	3	4.67
	Theta	1.5	2.01	1.75	2.77	2	3.10	2.25	3.76	3	4.64
0.8	Alpha	0.2	1.22	0.4	1.63	0.5	1.60	0.6	1.72	0.8	1.87
	Beta	1	2.07	1.5	2.20	2	3.37	2.5	3.97	3	4.62
	Theta	1.5	1.96	1.75	2.71	2	3.05	2.25	3.63	3	4.60

نستنتج من خلال الجدول رقم (1) ما يأتي:

عندما تكون قيمة $\lambda = 0.2$ نلاحظ أنَّ المَعْلَمَات الثلاثة أنَّ القيمة الحقيقية تبتعد عن القيمة التقديرية وبزيادة بالنسبة معلمة الخط، ونلاحظ اقتراب القيمة الحقيقية من المَعْلَمَات إلى القيمة التقديرية (نوعاً ما)، ويستمرّ الحال كما هو بالنسبة $\lambda = 0.6$

وعندما تكون $\lambda = 0.8$ نلاحظ ان القيمة الحقيقية تكون أقرب إلى المقدرة، ولكن ليس بالشكل المثالي.

الجدول رقم (2) القيم الحقيقية والتقديرية لطريقة كرايمر فون مايسز لمعلمة (α, β, θ) وقيمة

$(\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$

Lambda	Parameter	S	E	S	E	S	E	S	E	S	E
0.2	Alpha	0.2	0.51	0.4	0.66	0.5	0.71	0.6	0.82	0.8	0.97
	Beta	1	1.21	1.5	1.88	2	2.31	2.5	2.83	3	3.37
	Theta	1.5	1.86	1.75	2.18	2	2.37	2.25	2.62	3	3.61
0.4	Alpha	0.2	0.44	0.4	0.59	0.5	0.65	0.6	0.66	0.8	0.91
	Beta	1	1.19	1.5	1.82	2	2.27	2.5	2.73	3	3.27
	Theta	1.5	1.82	1.75	2.13	2	2.32	2.25	2.60	3	3.55

0.6	Alpha	0.2	0.36	0.4	0.50	0.5	0.58	0.6	0.62	0.8	0.84
	Beta	1	1.10	1.5	1.72	2	2.16	2.5	2.63	3	3.17
	Theta	1.5	1.62	1.75	2.00	2	2.17	2.25	2.42	3	3.32
0.8	Alpha	0.2	0.26	0.4	0.46	0.5	0.58	0.6	0.62	0.8	0.83
	Beta	1	1.09	1.5	1.62	2	2.05	2.5	2.54	3	3.11
	Theta	1.5	1.62	1.75	1.87	2	2.07	2.25	2.32	3	3.12

نلاحظ من خلال الجدول رقم (2)

عندما تكون قيمة $\lambda = 0.2$ نلاحظ أنَّ المعلمات الثلاثة أنَّ القيمة الحقيقية تبتعد عن القيمة التقديرية وبزيادة بالنسبة معلمة الخلط نلاحظ اقتراب القيمة الحقيقية من المعلمات إلى القيمة التقديرية (نوعاً ما) ويستمرّ الحال كما هو بالنسبة $\lambda = 0.6$ وعندما تكون $\lambda = 0.8$ نلاحظ أنَّ القيمة الحقيقية تكون أقرب إلى المقدرة، ولكن ليس بالشكل المثالي.

الجدول رقم (3) يمثل (MSE) لتقدير دالة البقاء عند أحجام العينات المختلفة باستعمال طريقة (CVM) عندما:

$$\lambda = 0.2, \alpha = 0.2, \beta = 1, \theta = 1.5$$

MSE Lambda 0.2

N	MLE	CVM
30	24.21	28.23
60	20.10	23.13
120	17.34	18.34
150	15.20	13.88

نلاحظ في الجدول (3) تفوق طريقة MLE عند أحجام العينات (30,60,120) على طريقة CVM في حين في حال حجم العينة (150) نلاحظ العكس

الجدول رقم (4) يمثل (MSE) لتقدير دالة البقاء عند أحجام العينات المختلفة باستعمال طريقة (CVM) عندما:

$$\lambda = 0.4, \alpha = 0.2, \beta = 1, \theta = 1.5$$

MSE Lambda 0.4

N	MLE	CVM
30	32.11	36.21
60	26.43	28.56
120	22.10	22.01
150	19.51	17.33

نلاحظ في الجدول (4) تفوق طريقة *MLE* عند أحجام العينات (30,60) على طريقة *CVM* في حين في حال أحجام العينات (120,150) نلاحظ العكس.

الجدول رقم (5) يمثل (*MSE*) لتقدير دالة البقاء عند أحجام العينات المختلفة باستعمال طريقة (*CVM*) عندما:

$$\lambda = 0.6, \alpha = 0.2, \beta = 1, \theta = 1.5$$

MSE Lambda 0.6

N	MLE	CVM
30	37.67	40.11
60	30.31	28.56
120	25.11	24.69
150	22.80	19.25

نلاحظ في الجدول رقم (5) تفوق طريقة *MLE* عند حجم العينة (30) على طريقة *CVM* في حين في حال أحجام العينات (60,120,150) نلاحظ العكس.

الجدول رقم (6) يمثل (*MSE*) لتقدير دالة البقاء عند أحجام العينات المختلفة باستعمال طريقة (*CVM*) عندما:

$$\lambda = 0.8, \alpha = 0.2, \beta = 1, \theta = 1.5$$

MSE Lambda 0.6

n	MLE	CVM
30	41.11	44.56

60	33.21	32.22
120	27.91	25.55
150	23.74	21.09

نلاحظ في جدول رقم (6) تفوق طريقة *MLE* عند حجم العينة (30) على طريقة *CVM* في حين في حال حجوم العينات (60,120,150) نلاحظ العكس.

ثانياً: الجانب التطبيقي

يمثل بيانات عمر بكتريا السل (TB) المقاومة للعقاقير الطبية (MDR) (Multi Drug Resistance) إذ تم عزل 90 وحدة من بكتريا مختبريا في وسط يحتوي على بعض المضادات الحيوية إذ تم تسجيل وقت موت (التوقف عن الفاعلية) إذ كانت النتائج بالأيام .

الجدول رقم(7) يمثل عمر بقاء بكتريا السل المقاومة للعقاقير الطبية

2.2290	1.1622	4.5797	3.1067	4.4314	5.8530	6.4173	0.0759	6.4893
2.9133	2.4505	2.0838	3.9619	4.9106	8.6491	4.1818	0.0540	4.1361
2.1524	1.3112	5.4018	8.7943	1.6892	5.3510	1.7482	0.5308	3.0046
3.7749	1.5285	1.6541	1.7943	4.2638	5.5132	6.9448	7.4039	7.3897
0.9340	3.0844	5.2399	3.8173	4.1455	7.7803	6.4909	8.4509	5.0760
3.3998	1.6020	2.8258	0.1299	6.9027	6.0497	1.1656	7.2348	8.1690
0.5688	1.2630	2.5383	7.0598	8.6477	2.2417	6.3377	0.3532	7.9561
5.6221	0.4694	1.9961	7.1320	7.5752	5.1233	4.8693	3.8212	6.3692
0.0119	3.8687	2.0782	3.2599	8.7317	5.1839	7.0965	0.0154	4.5499
0.3371	6.9001	2.4427	3.8001	4.1450	5.2400	6.1112	8.0430	7.9421

الجدول رقم (8) مقارنة بين طريقة الإمكان الأعظم وكرايمر فون مايسز

Lambda	MLE	CVM
0.2	31.78	34.23
0.4	32.54	36.65
0.6	33.56	39.37
0.8	34.41	40.25

نلاحظ من خلال جدول رقم (8) أنَّ طريقة الإمكان الأعظم كانت أفضل ولجميع الحالات من طريقة كرايمر فون مايسز

Good Ness of Fit

اختبار حسن المتطابقة

1. Kolmogorov–Smirnov test (K–S)
2. Anderson–Darling test (A-D)

الجدول رقم (9) نتائج اختبار كولموكراف - سمير نوف واختبار دارلنك

	K-S	C.V	A-D	C.V
1	0.065	0.090	0.761	1.158

من ملاحظة الجدول رقم (9) أنَّ قيمة $K-S=0.065$ اختبار (Kolmogorov–Smirnov) هي أكبر من مستوى معنوية (0.05)، وعليه تُقبل فرضية العدم والتي تنصّ على أنَّ البيانات تتوزع توزيع المختلط ويبل ايلاموجيا بالمعطيات (α, β, θ) الواردة في التوزيع .

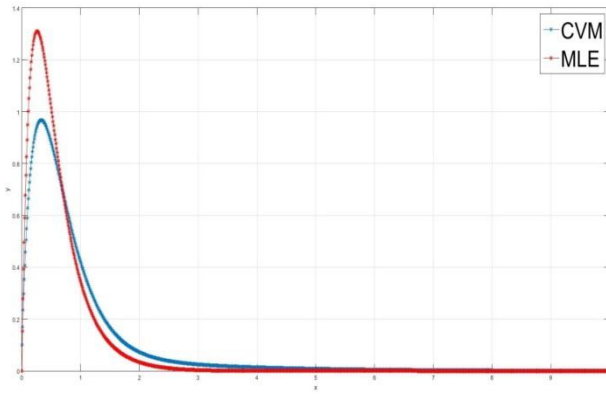
أما قيمة $A-D= 0.761$ اختبار (Anderson–Darling) فهي أكبر من مستوى معنوية (0.05) وعليه تُقبل فرضية العدم، والتي تنصّ على أنَّ البيانات تتوزع توزيع المختلط ويبل ايلاموجيا بالمعطيات (α, β, θ) الواردة في التوزيع.

Reliability

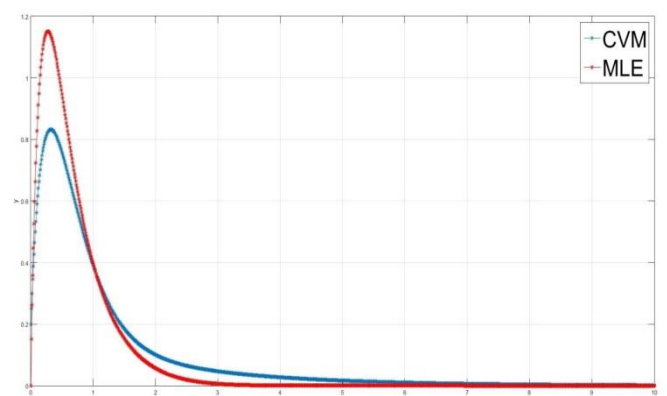
دالة المعولية

Lambda 0.2

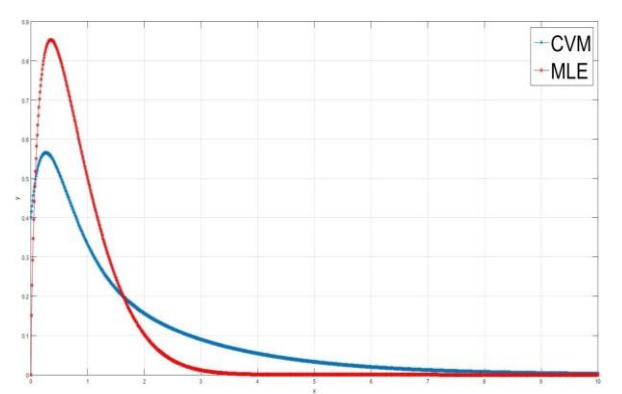
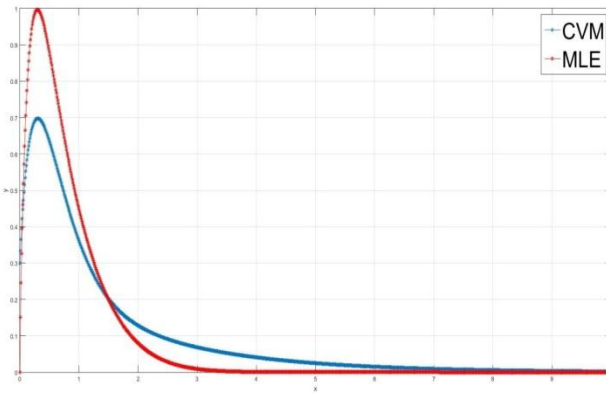
Lambda 0.4



Lambda 0.6



Lambda 0.8



الشكل رقم (2) تغيير الدالة المعولية لجميع معلمة نسبة الخط

الاستنتاجات

1. اثبتت أن البيانات الحقيقية تفوق طريقة الإمكان الأعظم
2. التوزيعات المركبة أفضل من التوزيعات المفردة في تمثيل هكذا بيانات، وأن استعمالها يعطي مرونة في عملية التقدير إذ أن بمعرفة سلوك الظاهرة يمكن التنبؤ بها بصورة أدق من استعمال التوزيعات المفردة

التوصيات

1. نوصي باعتماد التوزيع المركب عندما تكون $\lambda = 0.8$.
2. نوصي باعتماد طريقة التركيب بنسب لتوزيعات الأخرى.
3. نوصي باعتماد طريقة (كرايمر فون مايسز) بتوزيعات الحياة بشكل عام.

المصادر

1. Lee, C., Famoye, F., & Olumolade, O. (2007). Beta-Weibull distribution: some properties and applications to censored data. *Journal of modern applied statistical methods*, 6(1), 17
2. Provost, S. B., Saboor, A., & Ahmad, M. (2011). Pak. j. statist. 2011 vol. 27 (2), 111-131 the gamma-weibull distribution. *Pak. J. Statist*, 27(2), 111-131.

3. Afify, A. Z., Yousof, H. M., Butt, N. S., & Hamedani, G. G. (2016). The transmuted Weibull-Pareto distribution. *Pakistan Journal of Statistics*.
4. Aldrich, J. (1997). RA Fisher and the making of maximum likelihood 1912- 1922. *Statistical science*, 12(3), 162-176
5. Macdonald, P. D. M. (1971). Comments and queries comment on “an estimation procedure for mixtures of distributions” by choi and bulgren. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 33(2), 326-329
6. Ibrahim, M., EA, E. A., & Yousof, H. M. (2020). A new distribution for modeling lifetime data with different methods of estimation and censored regression modeling. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 8(2), 610-630
7. Jayakumar, B., & Elangovan, R. (2019). A new generalization of Ailamujia distribution with applications in bladder cancer data. *Int. J. Sci. Res. in Mathematical and Statistical Sciences Vol*, 6, 1
8. M. Pandey, S.K. Upadhyay, (1985), "Bayes Shrinkage Estimators of Weibull
9. Aljohani, H. M., Akdoğan, Y., Cordeiro, G. M., & Afify, A. Z. (2021). The uniform Poisson–Ailamujia distribution: Actuarial measures and applications in biological science. *Symmetry*, 13(7), 1258.
10. Lakibul, I. A. (2023). A Novel Extended Version of the Ailamujia Inverted Weibull Distribution. *Reliability: Theory & Applications*, 18(1 (72)), 206-213
11. Abed.M.Q and Alwan.E.B and Kneehr.A.L.(2018) Proposing A New Mixture Statistical Distribution Exponential- Kumaraswamy