Journal of Administration and Economics Vol. (special issue) 2023 ISSN P.2221-5794 ISSN E.2790-2910

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة كربلاء - كلية الادارة والاقتصاد
المؤتمر العلمي السادس عشر 2023

تقدير المعالم المجهولة في المعادلات التفاضلية (النظم الديناميكية) باستعمال التقدير المتعدد الموضعي باستعمال المحاكاة دراسة مقارنة

Estimation the Unknown Parameters in Differential Equation

(Dynamical Systems) By Local Polynomial Estimation : A Comparison Study Using Simulation

أ.م.د وفاء جعفر حسين
Dr. Wafaa Jaafar Hussain
wjaffer@uowasit.edu.iq
جامعة واسط/الإدارة والاقتصاد/الإحصاء

أ.م.د علي حميد يسف
Dr. Ali Hamid Yasef
ahameed@uowasit.edu.iq
جامعة واسط/الإدارة

م .د رحاب كاظم حمزة
Dr. Rehab Kazem Hamza
Rehabhamza86@mtu.edu.iq
الجامعة التقنية الوسطى /معهد إدارة

المستخلص

إن التقدير المتعدد الموضعي هو أحد الأساليب اللامعلمية المهمة لتقدير متغير الحالة (State Variables) في المعادلات التفاضلية أو ما يسمى بالنظم الديناميكية حيث تلعب كل من عرض الحزمة (Bandwidth) ونوع دالة الوزن دورا في تحديد كمية التمهيد في متغير الحالة المقدر .

في هذا البحث سيتم تسليط الضوء على اختيار عرض الحزمة الأفضل عند تقدير متغير الحالة في المعادلات التفاضلية حيث تم اختيار سبعة أنواع من عرض الحزمة والمقارنة بينها ولقد تم استعمال دالة وزن من نوع (Epanechnikov) ولقد تمت المقارنة باستعمال معيار الخطأ ARE بالاعتماد على بيانات تجريبية باستعمال أسلوب المحاكاة وتم التوصل إلى أن استعمال عرض الحزمة الأمثل يعطي أفضل المقدرات للمعالم المجهولة في نماذج المعادلات التفاضلية .

Abstract

Local polynomial estimation is most important non-parametric methods for estimating state variables in differential equations or so-called dynamic systems. Bandwidth and weight function play a role in determining the amount of boot in the estimated state variable. In this research, the choice of the best beam width is highlighted when estimating the state variable in differential equations. Seven types of beam width were selected and compared, and a weight function of Epaneknikov was used. The comparison was done using the error criterion ARE

using experimental data using Simulation Method It has been concluded that the use of optimal beam width gives the best approximations of unknown parameters in differential equations models.

1. المقدمة

تستعمل المعادلات التفاضلية أو ما يسمى بالأنظمة الديناميكية في الهندسة والفيزياء والعلوم الحيوية والعديد من المجالات الأخرى وعادة ما تحتوي هذه الأنظمة على معلمات مجهولة ولقد جرت العادة أن تقدر هذه المعلمات من البيانات المشاهدة والتي غالبا ما تقاس مع الخطأ العشوائي وكما هو معروف أن معظم هذه النماذج لا يوجد لها حل مغلق أو تحليلي لذلك يتعذر استعمال طريقة المربعات الصغرى اللاخطية المعتادة لتقدير المعلمات المجهولة مما يقودنا لاستعمال طريقة المرحلتين لحل هذه المشكلة حيث يتم بالمرحلة الأولى تمهيد البيانات لا معلميا وفي المرحلة الثانية يتم تقدير المعلمات المجهولة من البيانات الممهد [9] أن الطريقة الأكثر عمومية لحل هذه المشكلة هي أن توضع القيم الأولية للمعلمات مع الشروط الأولية ومن ثم تقاس انحرافات المربعات الصغرى للحل في نقاط البيانات ويتم التعامل معها كدالة للمعلمات حيث لا يمكن الاعتماد على هذه الطريقة للأسباب الآتية :

أولا : حل المعادلات التفاضلية عدديا ربما يكون حساسا جدا للشروط الأولية وبالتالي يصعب دمج المعادلات وسوف تتضاعف هذه المشكلة عندما تكون الشروط الأولية غير معروفة بدقة .

ثانيا : تتطلب هذه الطريقة التخمين بقيم المعلمة إذا لم تكن معروفة جيدا وبشكل معقول مرة ثانية يكون من الصعب دمج المعادلات وسلوك الحل قد يكون مختلف تماما عن سلوك الحل الذي تم الحصول عليه باستعمال قيم معلمات جيدة.

ثالثا: تحتاج هذه الطريقة الى عمليات حسابية مكثفة جدا حيث إن كل مجموعة جديدة من المعلمات تتطلب حلا كاملا للمعادلات. [4]

لهذا يتم اللجوء الى الطريقة المباشرة البسيطة التي تتغلب على كل تلك العيوب بتقدير متغيرات الحالة بالطرق الممهدة اللامعلمية وبعد أن تمهد البيانات أو متغيرات الحالة نقوم بإيجاد المعلمات لتقليل انحرافات المربعات في نموذج المعادلات التفاضلية والتي تكون مقاسة عند نقاط العينة وبهذا لا تكون هناك حاجة الى القيمة الأولية والشروط الأولية وبالتالي فأن الطريقة تكون أقل كلفة حسابية من طريقة القيمة الأولية .

في هذا البحث سيتم تمهيد البيانات في المرحلة الأولى بطريقة المتعدد الموضعي للتقدير (Local polynomial estimation) باستعمال دالة الوزن (Epanchinkov) مع عرض الحزمة الذي سيختار بعدة طرق ومن ثم المقارنة بين هذه الطرق لإيجاد أفضلها باستعمال المحاكاة .

2. المعادلات التفاضلية (النماذج الديناميكية)

لنفرض أن لدينا نموذج الانحدار الآتي :

$$Y = f_\theta(t) + \epsilon(t) \dots (1)$$

الدالة $f_\theta(t)$ أحيانا تكون غير معلومة لكنها يفترض أن تحقق نموذج المعادلات التفاضلية اللاخطية الذي يعطى كالآتي :

$$\frac{df_\theta(t)}{dt} = F(t, f_\theta(t), \theta) \ \ t\epsilon[t_0, T] \dots (2)$$

حيث إن $F(t, f_\theta(t), \theta)$ موجه الدوال بالبعد r في هذا البحث يفترض أن تكون هذه الدوال معلومة θ هو موجه المعلمات الذي يتحكم بدالة الانحدار .

توجد المعادلات من هذا النوع والتي تمثل نماذج ديناميكية في مختلف فروع العلوم مثل علم الوراثة وديناميات الأمراض الفيروسية المعدية كذلك هناك العديد من التطبيقات في مجال الديناميكية الدوائية وتجدر الإشارة هنا أن هنالك العديد من الحالات التي لا توجد لهذه النماذج حلول تحليلية مغلقة وكمثال على ذلك أنظمة رد الفعل ((Feedback System والتي تتنمذج على هيأة معادلات تفاضلية عادية لا خطية.[1]

$$\frac{dR(t)}{dt} = k_{in} - k_{out}R(t)(1 + M(t) \dots (3)$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = k_{to1}(R(t) - M(t)) \dots (4)$$

حيث إن $M(t), R(t)$ فقدان الاستجابة والتغير خلال الزمن t اما $k_{in}, k_{out}k_{to1}$

وهي المعلمات المجهولة في النموذج والتي تقدر من البيانات المشوشة (Nosy Data) أن المتغيرين $M(t), R(t)$ لا يمكن قياسهما مباشرة وإنما تقاس مع الأخطاء العشوائية وكالآتي:

$$Y_\theta(t) = R(t) + \varepsilon_R(t) \dots (5)$$

$$Y_\theta(t) = M(t) + \varepsilon_M(t) \dots (6)$$

حيث إن $\varepsilon_R(t), \varepsilon_M(t)$ الأخطاء العشوائية لكل نقطة من نقاط الزمن t للمتغيرين R(t) , M(t) على التوالي .

إذا وجد لنموذج المعادلات التفاضلية حلا تحليلا عندئذ تستخدم طريقة المربعات الصغرى اللاخطية لتقدير المعلمات المجهولة لكن في معظم الحالات العملية أن الحلول التحليلية غير متوفرة كما هو واضح في المثاليين أعلاه حيث تستخدم الطرق العددية لحل هذه النماذج مثل طريقة رونج كوتا أو طريقة أويلر ومن ثم استعمال طريقة المربعات الصغرى اللاخطية كخطوة ثانية لتقدير المعلمات المجهولة في النموذج .

في هذا البحث سيتم تقدير المعادلة $f_\theta(t)$ ومشتقتها $\frac{df_\theta(t)}{dt}$ بطريقة التقدير المتعدد الموضعي Local Polynomial Estimation باستعمال دالة الوزن Epanchinkov وسبعة أنواع من عرض الحزمة ليتم المقارنة بينها [1]

3. تقدير الدالة $f_\theta(t)$ ومشتقتها بطريقة التقدير الموضعي المتعدد[17] [8]سوف يتم تقدير الدالة أو متغير الحالة $f_\theta(t)$ ومشتقاتها بطريقة التقدير الموضعي المتعدد لنفرض أن المشتقة من الدرجة $(v+1)$ للدالة $f_\theta(t)$ موجودة . لكل نقطة t_0 نقرب الدالة $f_\theta(t)$ موضعيا بمتعدده الحدود للرتبة p

$$\mathrm{f}_\theta(\mathrm{t_i}) \approx \mathrm{f}_\theta(\mathrm{t_0}) + (\mathrm{t_i}-\mathrm{t_0})\mathrm{f}_\theta{}^{(1)}(\mathrm{t_0}) + \cdots + \frac{(\mathrm{t_i}-\mathrm{t_0})^{\mathrm{v}}\mathrm{f}_\theta{}^{(v)}(\mathrm{t_0})}{\mathrm{v}!} \;\ldots(7)$$

$$=\sum_{j=0}^{v} \delta_j(t_0)(t-t_0)^j$$

حيث إن : $\delta_j(t_0) = \frac{\mathrm{f}_\theta{}^{(j)}(\mathrm{t_0})}{j!}$ $j = 1,2,\ldots,v$

$\mathrm{f}_\theta{}^{(v)}(t)$ حيث إن v=0,1,2 يمكن تقديرها بتصغير المقدار الآتي :

$$\sum_{i=1}^{n} \{Y(t_i) - \sum_{j=0}^{v} \delta_j(t_0)(t-t_0)^j\}^2 K_b(t_i - t) \;\ldots.(8)$$

حيث إن $K_b(t) = K\left(\frac{t}{b}\right)/b$ و K(.) هي دالة النواة المتماثلة أما b فهو عرض الحزمة المقترح الذي سيتم أخذه بعده طرق كما في الأجزاء القادمة من البحث ومن ثم إيجاد الطريقة الأفضل .

يمكن التعبير عن المعادلة (8) بطريقة المصفوفات وكما يأتي حيث إن

$$Y = (Y(t_1), Y(t_2), \ldots, Y(t_n))^T$$

و $T_{P,t}$ هي مصفوفة التصميم بالبعد $n \times (p+1)$ صفوفها كالآتي

$$(1, (t_i - t), \ldots., (t_i - t\,)^v)^T \quad v = 1,2$$

و W_t هي مصفوفة قطرية بالبعد (n×n) *وهي تمثل* دالة الوزن أو دالة النواة $diag\{K_b(t_1-1), K_b(t_2-1), \ldots, K_b(t_n-1)\}$ وان المصفوفة

$T_{p,t}^T W_t T_{p,t}$ هي مصفوفة ليست أحادية وباستعمال نظرية المربعات الصغرى الموزونة weighted least square theory يتم الحصول على :

$$\hat{\delta} = (T_{p,t}^T W_t T_{1+q,t})^{-1} T_{p,t}^T W_t Y \;\ldots\ldots(9)$$

حيث يستعمل الانحدار الخطي الموضعي لتقدير $f_\theta(t)$ والانحدار التربيعي الموضعي لتقدير $\acute{f}_\theta(t)$ وان $\delta^{(q)}(t)$ يمكن تقديرها كالآتي:

$$\hat{\delta}^{(q)}(t) = e_{q+1}^T (T_{1+q,t}^T W_t T_{1+q,t})^{-1} T_{1+q,t}^T W_t Y \quad q = 0,1 \ldots (10)$$

حيث إن : e_{q+1}^T موجه بالبعد $1\times$(q+2) عناصره بقيمة 1 عند (q+1) والباقي أصفار .

3-1 اختيار عرض الحزمة bandwidth selection [6]

في هذا الجزء يتم تلخيص آليات اختيار عرض الحزمة بطرق التقاطع الشرعي Cross–Validation لتقدير الدالة $f_\theta(t)$ ومشتقتها بطريقة الانحدار المتعدد الموضعي .

3-1-1 عرض الحزمة الأمثل Optimal bandwith [6]

لنأخذ المقدار AMISE لـ r من مشتقات الدالة $f_\theta(t)$

$$AMISE(h,r) = \frac{R(K^r)}{nh^{2r+1}} + \frac{1}{4} h^4 m_2^2(k) R\left(f^{(r+2)}\right) \ldots\ldots (11)$$

يكون الحصول على عرض الحزمة الأمثل بتصغير المعادلة (13) فينتج

$$h^* = [\frac{(2r+1)R(K^r)}{m_2^2(k)R(f^{(r+2)})}]^{\frac{1}{2r+5}} n^{-\frac{-1}{2r+5}} \ldots\ldots (12)$$

3-1-2 التقاطع الشرعي بـ الإمكان الأعظم Maximum Likelhood cross validation

اقترحت هذه الطريقة من قبل Habbema , hermans and Van den Broek(1974) و Duin(1976) اقترحو اختيار h التي تعظم الدالة $\prod_{i=1}^{n} \hat{f}_\theta(t_i)$ كذلك أن الحد الأعظم توجد له قيمة افتراضية عند h=0 لذلك يتم استعمال مبدا التقاطع الشرعي Cross–Validation من خلال استبدال الدالة $\hat{f}_\theta(t)$ بالدالة $\hat{f}_{\theta,i}(t)$ وذلك بترك مشاهدة Leave – one –out حيث إن :

$$\hat{f}_{\theta,i}(t_i) = \frac{1}{(n-1)h} \sum_{i\neq j} K(\frac{X_j - X_i}{h}) \ldots\ldots\ldots (13)$$

حيث تكون h جيدة كلما اقتربت من الحد الأعلى المحدد

$$h_{mlcv=argmax_{h>0} MLCV(h)} \ldots\ldots (14)$$

حيث إن

$$MLCV(h) = (n^{-1}\sum_{i=1}^{n} log[\sum\nolimits_{i\neq j} K(\frac{X_j - X_i}{h})] - log[(n-1)h]) \ldots..(15)$$

3-1-3 التقاطع الشرعي غير المتحيز Unbiased cross validation

اقترح كل من Rudemo(1982) و Bowman(1984) التقاطع الشرعي غير المتحيز Unbiased cross validation (UCV) حيث يتم الحصول على :

$$h_{ucv} = argmin_{h>0} UCV(h,r) \ldots\ldots (16)$$

وذلك بتصغير المقدار الآتي

$$UCV(h,r) = \frac{R(K^{(r)})}{nh^{2r+1}} + \frac{(-1)^r}{n(n-1)h^{2r+1}}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}(K^{(r)} * K^{(r)} - 2K^{(2r)})(\frac{t_j - t_i}{h}) \ldots (17)$$

4-1-3 التقاطع الشرعي المتحيز Biased cross validation

تم اقتراح عرض الحزمة بطريقة التقاطع الشرعي المتحيز من قبل Scottو George في العام 1987 حيث من المعادلة 13 يتم تقدير $R(f^{(r+2)})$ بواسطة :

$$\hat{R}\left(f^{(r+2)}\right) = R\left(\hat{f}_h^{(r+2)}\right) - \frac{R\left(K^{(r+2)}\right)}{nh^{2r+5}} \ldots\ldots..(18)$$

هنالك نوعان من التقاطع الشرعي المتحيز بالاعتماد على تقدير $R\left(f^{(r+2)}\right)$ وبالاعتماد على الباحثين Scottو George فأن :

$$\hat{R}\left(f^{(r+2)}\right) = \frac{(-1)^{(r+2)}}{n(n-1)h^{2r+1}}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}(K^{(r+2)}K^{(r+2)})(\frac{t_j - t_i}{h}) \ldots (19)$$

أو أخذ طريقة *jones and Kappenman*

$$\hat{R}\left(f^{(r+2)}\right) = \frac{(-1)^{(r+2)}}{n(n-1)h^{2r+1}}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}(K^{(2r+4)}(\frac{t_j - t_i}{h}) \ldots (20)$$

ويعطى التقاطع الشرعي المتحيز لـ (19) و (20) على التوالي بتصغير الصيغتين وكالآتي :

$$BCV_1(h,r)=\frac{R\left(K^{(r)}\right)}{nh^{2r+1}}+\frac{m_2^2(K)}{4}\frac{(-1)^{(r+2)}}{n(n-1)h^{2r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}(K^{(r+2)}K^{(r+2)})(\frac{t_j-t_i}{h}) \dots (21)$$

$$BCV_2(h,r)=\frac{R\left(K^{(r)}\right)}{nh^{2r+1}}+\frac{m_2^2(K)}{4}\frac{(-1)^{(r+2)}}{n(n-1)h^{2r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}(K^{(2r+4)}(\frac{t_j-t_i}{h}) \dots (22)$$

4−1−3 التقاطع الشرعي الكامل Complete Cross Validation

اقترح كل من Jones 1991 و Kappenman ما يسمى بالتقاطع الشرعي الكامل لدالة النواة (CCV) Complete Cross Validation ويمكن أن تستعمل هذه الطريقة لتقدير مشتقة الدالة أيضا حيث يمكن الحصول على عرض الحزمة H بتقليل المقدار الآتي :

$$CCV(h,r)=R(\hat{f}_h^{(r)})-\bar{\theta}_r(h)+\frac{1}{2}m_2(K)h^2\bar{\theta}_{r+1}(h)+\frac{1}{24}\left(6m_2^2(K)-\delta(K)\right)h^4\bar{\theta}_{r+2}(h) \dots\dots (23)$$

حيث إن :

$$R\left(\hat{f}_h^{(r)}\right)=\frac{R\left(K^{(r)}\right)}{nh^{2r+1}}+\frac{(-1)^{(r)}}{n(n-1)h^{2r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}(K^{(r)}K^{(r)})(\frac{t_j-t_i}{h}) \dots (24)$$

$$\bar{\theta}_r(h)=\frac{(-1)^{(r)}}{n(n-1)h^{2r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}(K^{(2r)}(\frac{t_j-t_i}{h}) \dots (25)$$

$$\delta(K)=\int_R x^4K(x)dx$$

5−1−3 التقاطع الشرعي المعدل Cross Validation Modified

لقد اقترح هذا الأسلوب من قبل *Stute 1992* ولقد سمي هذا الأسلوب لاختيار عرض الحزمة بالتقاطع الشرعي المعدل (CVM) Cross Validation Modified لمقدر دالة النواة كذلك يمكن تقدير مشتقة الدالة حيث يمكن الحصول على عرض الحزمة h من تقليل المعيار الآتي :

$$MCV(h,r)=\frac{R\left(K^{(r)}\right)}{nh^{2r+1}}+\frac{(-1)^{(r)}}{n(n-1)h^{2r+1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}(f^{(r)}(\frac{t_j-t_i}{h}) \dots (26)$$

حيث إن

$$f^{(r)}(c) = (K^{(r)} * K^{(r)} - K^{(2r)} - \frac{m_2(K)}{2} K^{(2r+1)})(c) \ldots\ldots (27)$$

3-1-5 التقاطع الشرعي المقلص Trimmed Cross Validation

اقترح كل من *Feluch 1992* و *Koronacki* التقاطع الشرعي المقلص Modified Trimmed Validation (TCV) حيث يمكن الحصول على عرض الحزمة h بتصغير المقدار الآتي :

$$TCV(h,r) = \frac{R\left(K^{(r)}\right)}{nh^{2r+1}} + \frac{(-1)^{(r)}}{n(n-1)h^{2r+1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} (f^{(r)}(\frac{t_j - t_i}{h}) \ldots (28)$$

حيث إن

$$f^{(r)}(c) = [K^{(r)} * K^{(r)} - K^{(2r)} 1\left(|c| > \frac{c_n}{h^{2r+1}}\right)](c) \ldots\ldots (29)$$

$1(.)$ مؤشر الدالة وان c_n متسلسلة من الأعداد الثابتة الموجبة حيث إن $lim_{n\to\infty} c_{n/h^{2r+1}}$ تقترب من الصفر هنا سوف تكون $c_n = 1/n$.

3-2 طريقة المربعات الصغرى لتقدير المعالم المجهولة *[4]*

بعد أن يتم تقدير المعادلات ومشتقاتها بالطريقة اللامعلمية سوف نقوم بتقدير المعلمات الثابتة معتمدين على المقدرات التي حصلنا عليها في المرحلة الأولى باستعمال طريقة المربعات الصغرى. بصورة عامة من الأنموذج (5) , (6)سوف نحصل على أنموذج الانحدار الآتي :

$$\hat{f}^{(1)}{}_{\theta}(t_i) = F\{\mathrm{t}, f_{\theta}(\mathrm{t_i}), \beta\} + \varepsilon^*(\mathrm{t_i}) \quad , \mathrm{i} = 1,2, \ldots, \mathrm{n} \quad \ldots (30)$$

إذ أن $\varepsilon^*(\mathrm{t_i})$ يعبر عن موجة خطأ الاستبدال أي أن :

$\varepsilon^*(\mathrm{t_i}) = \hat{f}^{(1)}{}_{\theta}(t) - f_{\theta}{}^{(1)}(\mathrm{t_i})$ سوف يصبح الأنموذج أنموذج انحدار قياسي ومن الممكن إيجاد مقدرات المعلمات الثابتة سوف نستخدم المربعات الصغرى الزائفة (Pesdo–least squares estimation) لتقدير موجه المعالم θ

6- المحاكاة

ولتطبيق الطرائق التي تم سردها في الجانب النظري من هذا البحث لابد من وضع بعض الافتراضات المهمة للحصول على تحليل أكثر شموليه من خلال استعمال احجام عينات مختلفة واختيار قيم مختلفة لتباين الأخطاء وحيث إن هـ من الصعوبة تطبيق هذه الافتراضات والحصول على احجام العينات في الواقع العملي يتم استعمال الأسلوب التجريبي من خلال تطبيق المحاكاة (Simulation).

ويمكن توضيح مراحل بناء تجربة المحاكاة Stages of Building Simulation Experiment بثلاثة مراحل مهمة وكالآتي :

سوف يتم في هذه:

أولا: اختيار نموذج المعادلات التفاضلية الخطي البسيط الآتي :

$$f^{(1)}{}_{\theta}(t_i) = -\theta_1 f_\theta(\mathrm{t_i}) + \theta_2 \ldots\ldots (33)$$

<u>المرحلة الأولى</u> : توليد الدالة $f_\theta(\mathrm{t_i})$

تحل المعادلات التفاضلية(33)عدديا بطريقة رونج –كوتا (stage Runge–Kutta−4) وبقيم معلمات أولية استنبطت من البحوث السابقة .

$$\theta_1 = 3, \theta_2 = 1/3$$

والشرط الابتدائي $f_\theta(0) = (-1)$

بعد حل نموذج المعادلات التفاضلية بالطريقة العددية سوف نحصل على متغير الحالة $f_\theta(\mathrm{t_i})$

<u>المرحلة الثانية</u> :توليد الأخطاء العشوائية

يتم في هذه المرحلة توليد الخطأ العشوائي $\varepsilon^*(\mathrm{t_i})$ الذي يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط صفر وتباين معين σ^2 أي : $\varepsilon^*(\mathrm{t_i}) \sim N(0, \sigma^2)$

وسوف يتم استعمال مستويين من التباين تضاف للدالة وهي مستوى التباين العالي والمتوسط والمنخفض والتي سيتم التطرق لها لاحقا.

<u>المرحلة الثالثة</u> : يتم حساب المتغير المعتمد $Y(t_i)$ من خلال دمج الدالة التي حصلنا عليها في المرحلة الأولى مع الخطأ العشوائي المولد طبيعيا لينتج:

$$Y(t_i) = f_\theta(\mathrm{t_i}) + \varepsilon^*(\mathrm{t_i}) \ \ldots\ldots (34)$$

المرحلة الرابعة : في هذه المرحلة سيتم تقدير المعاملات الثابتة للمعادلة (33)وفقا لمقدرات الدوال ومشتقاتها التي حصلنا عليها (بالطرائق اللامعلمية) باستعمال طريقة المربعات الصغرى الزائفة (PsLS) (Pseudo–Least Squares) كون أن البيانات هي بيانات ممهدة بالطرائق اللامعلمية.

المرحلة الخامسة

لقد تضمنت تجارب المحاكاة المراحل والخطوات الآتية لتقدير متغير الحالة في نموذج المعادلات التفاضلية ODE اللاخطية وتطبيق طرائق التقدير المستعملة في هذا البحث والتي يتم من خلالها تحقيق الهدف ولقد تم الاعتماد على برنامج (R–3.3.3–pit64) وحسب دوال البرنامج لكل عرض حزمة في المصدر [6].

حيث يتم اختيار القيم الافتراضية وهي من المراحل المهمة والتي تعتمد المراحل اللاحقة عليها من أجل تقدير المتغير المعتمد أي أن لكل تجربة من التجارب مستويين من التباين وهي $\sigma = 0.8$ و$\sigma = 0.2$ وستم اخذ حجوم عينات (n=50,n=100, n=200)

وبعدها تطبق طريقة المربعات الصغرى الواردة في الجانب النظري ولكافة حجوم العينات ومستويات التباين لتقدير المعاملات وكالآتي :

$\hat{\theta}_{op}$: المقدر باستعمال عرض الحزمة الأمثل

$\hat{\theta}_{hmlc}$: المقدر باستعمال عرض الحزمة بطريقة التقاطع الشرعي بالإمكان الأعظم

$\hat{\theta}_{ucv}$: المقدر باستعمال عرض الحزمة بطريقة التقاطع الشرعي غير المتحيز

$\hat{\theta}_{cv}$: المقدر باستعمال عرض الحزمة بطريقة التقاطع الشرعي المتحيز

$\hat{\theta}_{ccv}$: المقدر باستعمال عرض الحزمة بطريقة التقاطع الشرعي الكامل

$\hat{\theta}_{cvm}$: المقدر باستعمال عرض الحزمة بطريقة التقاطع الشرعي المعدل

$\hat{\theta}_{tcv}$: المقدر باستعمال عرض الحزمة بطريقة التقاطع الشرعي المقلص

المرحلة الخامسة ولتقييم أداء الطرائق وللمقارنة بينها تم استعمال معيار المقارنة متوسط خطا التقدير النسبي Average relative estimation error (ARE)للمعلمة وكالآتي :

$$ARE = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \frac{\left|\hat{\theta} - \theta_0\right|}{\theta_0} \times \%100 \ldots\ldots\ldots (30)$$

حيث θ_0 هي المعلمة الحقيقية و $\hat{\theta}$هي المقدرة اما M فتمثل عدد التكرارات

جدول رقم (1) معدل القيم التقديرية للمعلمات $\theta_1 = 3, \theta_2 = 1/3,$ وفق طريقة الانحدار الموضعي وحسب الطرق المبينة لعرض الحزمة لحجم عينة n=50 وتباين $\sigma_1 = 0.4$ و $\sigma_2 = 0.8$

method	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
OP	0.4	9.346	2.459	0.8	9.675	2.875
$hmlc$		9.987	2.345		9.120	2.555
ucv		9.456	2.567		9.753	2.831
cv		9.345	2.109		9.235	2.535
ccv		9.345	2.756		9.823	2.723
cvm		9.345	2.567		9.231	2.876
tcv		9.346	2.784		9.341	2.876

جدول رقم (2) معدل القيم التقديرية للمعلمات $\theta_1 = 3, \theta_2 = 1/3,$ وفق طريقة الانحدار الموضعي وحسب الطرق المبينة لعرض الحزمة لحجم عينة n=100 وتباين $\sigma_1 = 0.4$ و $\sigma_2 = 0.8$

method	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
OP	0.4	9.078	2.289	0.8	9.011	2.190
$hmlc$		9.077	2.267		9.021	2.192
ucv		9.077	2.270		9.012	2.192
cv		9.078	2.270		9.012	2.191
ccv		9.086	2.271		9.014	2.191
cvm		9.095	2.270		9.011	2.192
tcv		9.087	2.273		9.013	2.192

جدول رقم (3) معدل القيم التقديريه للمعلمات $\theta_1 = 3, \theta_2 = 1/3,$ وفق طريقة الانحدار الموضعي وحسب الطرق المبينة لعرض الحزمة لحجم عينة n=200 وتباين $\sigma_1 = 0.4$ و $\sigma_2 = 0.8$

method	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
OP	0.4	7.450	1.978	0.8	7.232	1.022
$hmlc$		7.447	1.977		7.230	1.020
ucv		7.445	1.977		7.235	1.023
cv		7.445	1.978		7.235	1.021
ccv		7.449	1.976		7.235	1.021
cvm		7.445	1.975		7.231	1.024

tcv		7.444	1.978		7.233	1.021

جدول (4) : معدل الخطأ النسبي (ARE) معدل القيم التقديريه للمعلمات $\theta_1 = 3, \theta_2 = 1/3,$ وفق طريقة الانحدار الموضعي وحسب الطرق المبينة لعرض الحزمة لحجم عينة n=50 وتباين $\sigma_1 = 0.4$ و $\sigma_2 = 0.8$

method	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
OP	0.4	0.8834	0.7846	0.8	0.8843	0.7868
$hmlc$		0.8835	0.7848		0.8846	0.7869
ucv		0.8835	0.7849		0.8845	0.7870
cv		0.8836	0.7849		0.8848	0.7870
ccv		0.8835	0.7848		0.8845	0.7869
cvm		0.8835	0.7848		0.8848	0.7871
tcv		0.8836	0.7847		0.8844	0.7869

جدول (5) : معدل الخطأ النسبي (ARE) معدل القيم التقديريه للمعلمات $\theta_1 = 3, \theta_2 = 1/3,$ وفق طريقة الانحدار الموضعي وحسب الطرق المبينة لعرض الحزمة لحجم عينة n=100 وتباين $\sigma_1 = 0.4$ و $\sigma_2 = 0.8$

method	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
OP	0.4	0.8689	0.7620	0.8	0.8719	0.7540
$hmlc$		0.8691	0.7623		0.8722	0.7538
ucv		0.8690	0.7623		0.8719	0.7538
cv		0.8692	0.7622		0.8720	0.7537
ccv		0.8690	0.7623		0.8721	0.7537
cvm		0.8691	0.7622		0.8721	0.7537
tcv		0.8691	0.7622		0.8720	0.7536

جدول (6) : معدل الخطأ النسبي (ARE) معدل القيم التقديريه للمعلمات $\theta_1 = 3, \theta_2 = 1/3,$ وفق طريقة الانحدار الموضعي وحسب الطرق المبينة لعرض الحزمة لحجم عينة n=200 وتباين $\sigma_1 = 0.4$ و $\sigma_2 = 0.8$

method	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	σ	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
OP	0.4	0.8237	0.7312	0.8	0.8270	0.7440
$hmlc$		0.8237	0.7313		0.8271	0.7438
ucv		0.8238	0.7313		0.8271	0.7438
cv		0.8237	0.7312		0.8272	0.7437
ccv		0.8237	0.7313		0.8272	0.7437

cvm		0.8238	0.7314		0.8272	0.7437
tcv		0.8238	0.7313		0.8271	0.7436

7. الاستنتاجات

من خلال نتائج تجارب المحاكاة تم التوصل إلى أهم الاستنتاجات الخاصة بكل طريقة لاختيار عرض الحزمة في طريقة الانحدار المتعدد الموضعي حيث يلاحظ من الجداول أعلاه الآتي:

1. نلاحظ أن هنالك تقارب في التقدير لجميع الطرق مع تفوق بسيط بالأفضلية عند استخدام عرض الحزمة الأمثل (طريقة OP)لامتلاكها أقل AREتقريبا في جميع التجارب.

2 . نلاحظ أن قيمة معيار ARE تقل كلما زاد حجم العينة ولجميع الطرق.

3. نلاحظ أن نتائج التقديرات ونتائج ARE تميل إلى الاستقرار في حجم العينة 200

كما يمكن ملاحظة أنه بزيادة التباين يؤدي ذلك إلى زيادة قيمة المعيار AREولجميع الطرق

8. التوصيات

بناء على ما تم التوصل له من استنتاجات يمكن إدراج أهم التوصيات:

1. إجراء دراسات مستقبلية لطرائق لا معلمية واختيار معلمة التمهيد من الطرق المذكورة في هذا البحث مثل طريقة الشرائح الجزائية أو أي طريقة لا معلميه تحتاج في تطبيقها الى عرض الحزمة أو معلمة التمهيد.
2. اعتماد عرض الحزمة الأمثل في التطبيق عند استعمال طريقة المتعدد الموضعي لتقدير المعاملات المجهولة في الأنظمة الديناميكية (المعادلات التفاضلية).
3. يمكن توسيع هذه الدراسة لتطبيق طرق حصينة بوجود بيانات ملوثة

9. المصادر

1. Bhaumik, P., & Ghosal, S. (2015). Bayesian two-step estimation in differential equation models.
2. Bowman, E. H. (1984). Content analysis of annual reports for corporate strategy and risk. *Interfaces*, *14*(1), 61-71.
3. Chen, J., & Wu, H. (2008). Efficient local estimation for time-varying coefficients in deterministic dynamic models with applications to HIV-1 dynamics. *Journal of the American Statistical Association*, *103*(481), 369-384.

4. Ding, A. A., & Wu, H. (2014). Estimation of ordinary differential equation parameters using constrained local polynomial regression. *Statistica Sinica*, *24*(4), 1613.
5. Feluch, W. and Koronacki, J. (1992). A note on modi_ed cross-validation in density estimation. Computational Statistics and Data Analysis, 13, 143{151.
6. Guidoum, A. C. (2015). Kernel estimator and bandwidth selection for density and its derivatives. *Department of Probabilities and Statistics, University of Science and Technology, Houari Boumediene, Algeria.*
7. Habbema, J. D. F., Hermans, J., and Van den Broek, K. (1974). A stepwise discrimination analysis program using density estimation. Compstat 1974: Proceedings in Computational Statistics. Physica Verlag, Vienna.
8. Hu, T., Qiu, Y. P., Cui, H. J., & Chen, L. H. (2015). Numerical discretization-based kernel type estimation methods for ordinary differential equation models. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, *31*(8), 1233-1254.
9. Jones, M. C., & Kappenman, R. F. (1992). On a class of kernel density estimate bandwidth selectors. *Scandinavian Journal of Statistics*, 337-349.
10. Rudemo, M. (1982). Empirical choice of histograms and kernel density estimators. *Scandinavian Journal of Statistics*, 65-78.
11. Scott, G. H., Williams, J. C., & Stephenson, E. H. (1987). Animal models in Q fever: pathological responses of inbred mice to phase I Coxiella burnetii. *Microbiology*, *133*(3), 691-700.
12. Stute, W. (1992). Modi_ed cross validation in density estimation. Journal of Statistical Planning and Inference, 30, 293{305.