# دالة الانتماء المثلثية غير المتماثلة للاعداد المضببة وتطبيقها في الانحدار

**هبة علي طه الصباغ**

*مركز الحاسبة الالكترونية ، جامعة الموصل ، الموصل ، العراق*

( تاريخ الاستلام: ٣٠ / ١١ / ٢٠٠٨ ، تاريخ القبول: ١٠ / ٣ / ٢٠٠٩ )

**الملخص**

تناولت الدراسة الحالية وصف اشكال العدد المضبب متمثلة بدالة الانتماء وبالتحديد دالة الانتماء المثلثية المتماثلة وغير المتماثلة وكيفية استخدام هذه الدالة في الانحدار وذلك بتطبيقها بمثال عددي واجراء المقارنة بين التماثل وغير التماثل واستخدمت طريقتين (Ishibuchi and Nii, 2001) و (Yen et al.,1999) وبالتالي الحصول على المعلمات المضببة والمجموع الاقل لانتشارات المعلمات الذي يتمثل بدالة الهدف وبذلك يتم الحصول على الانموذج الخطي .

**الكلمات الدالة:** الاعدادالمضببة ،دالة الانتماء المثلثية المتماثلة، دالة الانتماء المثلثية غير المتماثلة.

**المقدمة**

على الرغم من قدم استخدام الدوال المثلثية المتماثلة في كثير من التطبيقات فقد بلغت الاوج في القرن العشرين الا ان هناك من استخدم الدوال المثلثية غير المتماثلة ومازال الاهتمام بهذا المجال منذ بداية القرن الحادي والعشرين.

ان اساس استخدام الاعداد التي تمتلك صفة الضبابية هو في نظرية المجموعات المضببة (Theory fuzzy sets) للعالم لطفي عام ١٩٦٥ والتي استخدمت في العديد من التطبيقات العلمية ومنها الصناعية، الهندسية، الطبية، والانظمة الذكية والخ[1] .

اذ تمتلك الاعداد المضببة (Fuzzy numbers) دالة انتماء ( Membership function) والتي من خلالها يتم حساب درجة انتماء العنصر الى المجموعة المضببة وهذه الدرجة يكون مداها محصور بين الصفر والواحد.

واشارالعديد من الباحثين الى استخدام الاعداد المضببة المثلثية المتماثلة (Symmetric triangular fuzzy numbers) في كثيرمن التطبيقات .حيث استخدم Tanaka واخرون [2,3,4] معاملات مثلثية متماثلة.

اذ يعد البحث المنشور في عام ١٩٩٩ من قبل Yenواخرون [5 ] اول بحث نشر في موضوع الانحدار المضبب باستخدام دوال مثلثية غير متماثلة فقدم الباحثون خوارزمية جديدة في حين كانت جميع التطبيقات قد استخدمت معاملات مثلثية متماثلة للاعداد المضببة .

قدم الباحثان Ishibuchi و Nii [6]عدة طرائق انحدار مضبب اساسه نماذج خطية مضببة بمعاملات مثلثية متماثلة للاعداد المضببة.ثم توسيع هذه النماذج الخطية المضببة الى معاملات مثلثية وشبه المنحرف غير المتماثلة للاعداد المضببة. وقدما عدة صيغ لمشكلة البرمجة الخطية المقترحة لتحديد معاملات مضببة غير متماثلة للبيانات العددية وكذلك طرائق انحدار مضبب غير خطي بالاعتماد على شبكات عصبية مضببة مع اوزان مضببة مثلثية غير متماثلة.

اقترح الباحث Li [7] تقييم التامين الضبابي لشركة االتامين في تايوان المتضمن تامينات على الحريق وضرر السيارات والملاحة الجوية والبحرية كأن تكون البيانات اعداد مضببة مثلثية متماثلة وغير متماثلة واثبتت النتائج بان افضل المعالم الملائمة للنموذج كانت من البيانات المضببة المثلثية غير المتماثلة.

اقترح مجموعة من الباحثين[8] زوج من نماذج البرمجة الخطية الهجينة مع معاملات مضببة مثلثية غيرمتماثلة لتقدير العلاقات الدالية لخطة انتاجية تحت اللاتاكدية ، حيث اعتمدوا على فكرة انحدار بمعاملات مضببة مثلثية غير متماثلة كما تمكنوا من توسيع الفكرة في حالة معاملات مضببة شبه المنحرف غير المتماثل، وكانت عملية التوسيع من حالة المعاملات المضببة المثلثية المتماثلة الى غير المتماثلة اكثر مرونة في الانحدار الخطي.

يهدف البحث الحالي الى وصف العدد المضبب وصيغ كتابته بدلالة دالة الانتماء وبالتحديد دالة الانتماء المثلثية المتماثلة وغير المتماثلة من خلال تطبيق مثال عددي في الانحدار باستخدام برنامج الجاهز (LINDO ) [9] للحصول على المعلمات المضببة والمجموع الاقل لانتشارات المعلمات الذي يتمثل بدالة الهدف وبذلك يتم الحصول على الانموذج الخطي المضبب. قسم البحث الى قسمين ففي القسم الاول عرض ووصف العدد المضبب بدالة الانتماء المثلثية المتماثلة وغير المتماثلة، وفي القسم الثاني تم اعطاء مثال عددي وتطبيق كلا الدالتين باسخدام تحليل الانحدار .

**دالة الانتماء( Membership function)**

هي الدالة التي بواسطتها يتم حساب درجة انتماء عنصر ما الى المجموعة المضببة(Fuzzy set) وهنالك عدة انواع من دوال الانتماء(دالة الانتماء المثلثية ، دالة شبه المنحرف ودالة شكل الجرس) [1] .

**١-وصف العدد المضبب وصيغ كتابته بدلالة دالة الانتماء المثلثية**

يوصف العدد المضبب (fuzzy number) بدالة الانتماء كما بالصيغة الاتية: [10,11] .

$$F = (\alpha, \beta, \gamma)_{LR} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حر

يث

A ترمز الى المركز

B ترمز الى الانتشار الايسر

$\gamma$ ترمز الى الانتشار الايمن

Lالجهة اليسرى ، R الجهة اليمنى

وعندما تكون$\gamma$ =$\beta$ مناظرة حول المركزفيمكن ان تكتب بالصيغة الاتية:

$$F^* = (\alpha, \beta) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبذلك يعرف العدد المضبب بدلالة دالة الانتماء المثلثية كما ياتي:

$$\mu_{F^*}(u)=\begin{cases}1-\dfrac{|\alpha-u|}{\beta} & \text{if } \alpha-\beta\le u\le\alpha+\beta\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\quad ...(3)$$

كما وصف العدد المضبب الاخرون بالصيغة الاتية:
. [5,8]

$$A_i=(a_i^L,a_i^C,a_i^U)\qquad ............(4)$$

حيث

$a_i^L$ هو الحد الادنى

$a_i^U$ هو الحد الاعلى

$a_i^C$ هو المركز.

او يكتب بالصيغة الاتية ان كان عدد مضبب متماثل فقد يوصف بمعلمتين هما الحد الادنى والاعلى.

$$A_i=(a_i^L,a_i^U)\qquad .........(5)$$

وبما انه متماثل حول المركز فيمكن ايجاد كل من $a_i^C$ قيمة المركز و $a_i^S$ مسافة الانتشار من المعادلات الاتية:وكما في الشكل (١).

$$a_i^C=(a_i^L+a_i^U)/2\qquad ......(6)$$

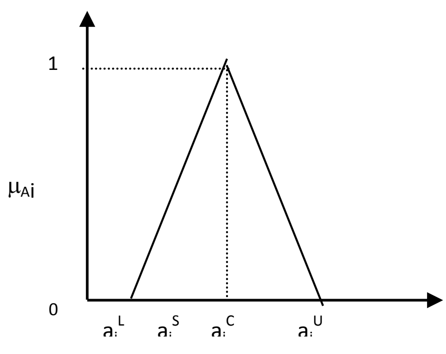
و

$$a_i^S=a_i^C-a_i^L\qquad ............(7)$$

$$a_i^S=a_i^U-a_i^C\qquad ............(8)$$

وبذلك يكتب العدد المضبب بدلالة قيمة المركز ومسافة الانتشار.

$$A_i=(a_i^C,a_i^S)..............(9)$$




**شكل (١) يمثل العدد المضبب المثلثي المتماثل**

وهناك من عرف العدد المضبب بـ $Y=(m,l,u)_{LR}$

حيث m المركز

l الانتشار من جهة اليسار

u الانتشار من جهة اليمين

وتكتب دالة الانتماء بالصيغة الاتية : [12] .

$$\mu_{(\alpha)}=\begin{cases}L\left(\dfrac{m-\alpha}{l}\right) & \alpha\le m \quad l>0\\ R\left(\dfrac{\alpha-m}{u}\right) & \alpha\ge m \quad u>0\end{cases}\quad ..............(10)$$

وايضا هناك من عبر عن العدد المضبب المثلثي المتماثل حيث رمز له بـ $M(m,\alpha,\beta)_T$ حيث m هي قيمة المركز و α ، β هما قيم الانتشار الايسر والايمن على التوالي و T ترمز الى كلمة (Triangular)[13] وتكتب دالة الانتماء بالصيغة الاتية:

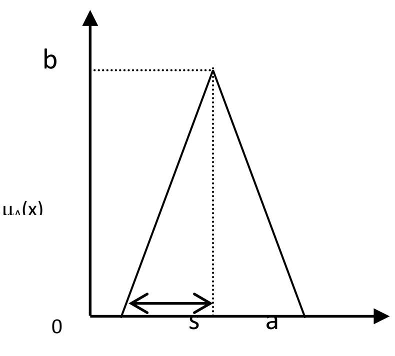
$$\mu_{M(x)}=\begin{cases}L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & \text{for } x\le m \quad \alpha>0\\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & \text{for } x\ge m \quad \beta>0\end{cases}\quad ....(11)$$

### ٢ –دالـة الانتمـاء المثلثيـة المتماثلـة Symmetric Triangular (Membership Function)

كل عدد مضبب يوصف بدالة انتماء له قد تكون دالة انتماء مثلثية متماثلة وهناك من يوصفها بثلاث معلمات اومعلمتين فقط.كما في الشكل (٢).

وتكتب صيغة دالة الانتماء المثلثية كما ياتي[1].

$$\mu_{A(x)}=\begin{cases}b\left(1-\dfrac{|x-a|}{s}\right) & \text{when } a-s\le x\le a+s\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\quad .....(12)$$




**شكل (٢) يمثل دالة الانتماء المثلثية المتماثلة**

### ٣– دالة الانتماء المثلثيةغيرالمتماثلة( Asymmetric Triangular (Membership Function

ان هذه الدالـة بمـا انهـا غيـر متماثلـة فحـد الانتشـار الايسـر لايسـاوي حـد

الانتشار الايمن وان هذه الدالة يجب كتابتها بثلاث معلمات على الاقل وكما في الصيغة الاتية:- [6] .

$$Ai=(a_i^L, a_i^C, a_i^U) \quad i=0,1,\ldots,n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

حيث

$a_i^L$ الحد الادنى

$a_i^U$ الحد الايمن

$a_i^c$ المركز

وبما ان استخدم الانموذج الخطي المضبب (F(x))

$$F(x)=(f_{(x)}^L, f_{(x)}^C, f_{(x)}^U)\ \ldots\ldots\ldots\ldots.(١٤)$$

حيث

$$f_{(x)}^L = a_0^L + \sum_{i=1}^{n} a_i^L .x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^U .x_i \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

$$f_{(x)}^C = a_0^C + \sum_{i=1}^{n} a_i^C .x_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

$$f_{(x)}^U = a_0^U + \sum_{i=1}^{n} a_i^U .x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^L .x_i \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

ولايجاد المعلمات المضببة المثلثية غير المتماثلة فقد اقترحا طريقة هجينة لانحدار مضبب مع انحدار مربعات صغرى وذلك باستخدام الطريقيتين الاتيتيين:

١-ايجاد قيم المركز المتمثلة بـ $f_{(x)}^C$ وذلك بطريقة المربعات الصغرى .

٢-ايجاد قيم الحدين الاعلى والادنى ( $f_{(x)}^U$ و $f_{(x)}^L$ ) للنموذج الخطي باستخدام البرمجة الخطية(LP) وكما في المنظومة الاتية:

$$\min z = \sum \left\{ f_{(xp)}^U - f_{(xp)}^L \right\}$$

*subjet*

$$h.\ f_{(xp)}^C + (1-h) f_{(xp)}^U \geq y_p \ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

$$h.\ f_{(xp)}^C + (1-h) f_{(xp)}^L \leq y_p$$

$$p = 1,2,\ldots\ldots.m$$

$$a_i^L \leq a_i^C \leq a_i^U$$

اما في بحث Yen وآخرون (1999)[5] فقد وصف العدد المضبب المثلثي غير المتماثل بالصيغة الاتية:

$A_i=(s_i^L, a_i^p, s_i^R)$ او $Ai=(s_i^L, a_i^p, k_i)$

حيث

$a_i^p$ هي النقطة التي عندها دالة الانتماء تساوي واحد( $\mu_{Ai}(a_i^p)$)

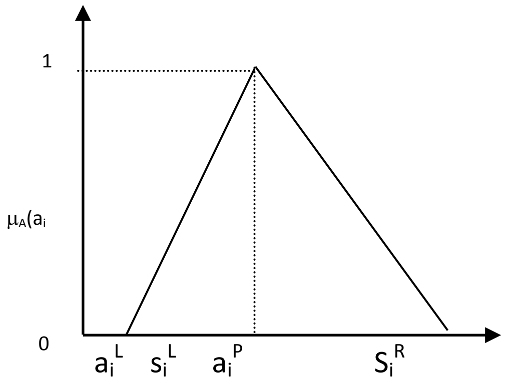
$s_i^L$ هي الانتشار الايسر عن النقطة $a_i^p$

$s_i^R$ هي الانتشار الايمن عن النقطة $a_i^p$

$k_i$ عامل الميلان

وكما موضح في الشكل (٣).وبذلك يمكن كتابة دالة الانتماء المثلثية غير المتماثلة بالصيغة الاتية:-

$$\mu_{\tilde{A}_i}(a_i) = \begin{cases} 1-\dfrac{a_i - a_i^p}{S_i^L} & , a_i^p \leq a_i \leq a_i^p + S_i^L \\ 1-\dfrac{a_i^p - a_i}{S_i^R} & , a_i^p - S_i^R \leq a_i \leq a_i^p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \ldots(19)$$




**شكل (٣) يمثل دالة الانتماء المثلثية غيرالمتماثلة**

وبما ان الباحثين [5] استخدموا هذه الدالة في انموذج الخطي المضبب فقد حوروا دالة الانتماء لمتغير الاستجابة في حالة العدد المضبب المثلثي غير المتماثل الى الصيغة الاتية:

$$\mu_{\tilde{y}}(y) = \begin{cases} 1-\dfrac{y-\sum_i a_i^p x_i - a_0^p}{S_0^L + \sum_i S_i^L |x|} & , a_0^p + \sum_i a_i^p x_i \leq \\ & y \leq a_0^p + \sum_i a_i^p x_i + (S_0^L + \sum_i S_i^L |x_i|) \\ 1-\dfrac{a_0^p + \sum_i a_i^p x_i - y}{S_0^R + \sum_i S_i^R |xi|} & , a_0^p + \sum_i a_i^p x_i \\ & -(S_0^R + \sum_i S_i^R |x_i|) \leq y \leq a_0^p + \sum_i a_i^p x_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \ldots(20)$$

ومن الممكن تعويض بدل كل من $S_i^R$ بـ $k_i S_i^L$ أي ضرب قيمة حد الانتشار الايسر بقيمة عامل الميلان.

فتصبح دالة الهدف في مسألة البرمجة الخطية بالصيغة الاتية:

$$\min z = (S_0^L + S_0^R) + \sum_i \left[ (S_i^L + S_i^R) \sum_i |x_{ji}| \right] \ldots\ldots\ldots(21)$$

*or*

$$\min z = (1+k_0) S_i^L + \sum_i \left[ (1+k_1) S_i^L \sum_i |x_{ji}| \right] \ldots\ldots\ldots(22)$$

والقيود تصبح بالشكل الاتي:

$$(1-h)S_0^L + (1-h)\sum S_i^L\left|x_i\right| + \sum a_i^p x_i + a_0^p \ge y \ldots.(23)$$

$$(1-h)S_0^R + (1-h)\sum S_i^R\left|x_i\right| - \sum a_i^p x_i - a_0^p \ge -y \ldots(24)$$

**ويما ان** $S_0^R = k_i * S_0^L$ فيصبح القيد الثاني

$$(1-h)k_0 S_0^L + (1-h)\sum k_i S_i^L\left|x_i\right| - \sum a_i^p x_i - a_0^p \ge -y \qquad \ldots\ldots\ldots(25)$$

**التطبيق العملي**

تم تطبيق مفاهيم الدوال المثلثية المتماثلة وغير المتماثلة في مثال عددي باستخدام مسألة البرمجة الخطية (Linear programming problem) ،وذلك لتحليل الانحدارباستخدام البرنامج الجاهز (LINDO) [9] ففي حالة التماثل تظهر المعلمات ($a_0^S,a_0^C$)و ($a_1^S,a_1^C$). اما في حالة غير التماثل فتكون المعلمات ($a_0^L,a_0^C, a_0^R$) و ($a_1^L,a_1^C, a_1^R$).

مثال عددي لتطبيق الانحدار وطبقت هذه البيانات من الجدول (١) .

**جدول (١) بيانات لمتغيرات الاستجابة والمفسرة (جازمة)**

| No. | xi | yi |
|---|---|---|
| 1 | ٢ | 4 |
| ٢ | 3.5 | 5.5 |
| ٣ | 5.5 | 7.5 |
| ٤ | ٧ | 6.5 |
| ٥ | 8.5 | 8.5 |
| ٦ | 10.5 | 8 |
| ٧ | 11 | 10.5 |
| ٨ | 12.5 | 9.5 |

واستخدمت قيمة حد الانتماء h مساوية الى (0.5) فكانت نتائج قيم المعاملات حيث يكتب الانموذج الخطي المضبب كماياتي:

$$y = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_i$$

$$y = (2.227273,0) + (3.386364,0.545455)x_i$$

اما قيمة دالة الهدف فتكون

z=2.227273

اما في حالة عدم التماثل فاستخدمت طريقة Ishibuchi و Nii (2001) [6]المقسمة الى قسمين ايجاد قيم المركز بطريقة المربعات الصغرى ثم استخدام المنظومة (١٩) كدالة هدف مع القيود.وكانت النتائج كما ياتي:

$$y = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_i$$

$y=(a_0^L,a_0^C, a_0^U) + ( a_1^L,a_1^C, a_1^U)\, x_i$

$y=(0.975455,3.57,5.43)+(0,0.519,0.571909)x_i$

**جدول (٢) قيم المعلمات المثلثية غير المتماثلة باختيار عدة قيم من عامل الميلان**

| k0 | k1 | $a_0^L$ | $a_1^L$ | $a_0^C$ | $a_1^C$ | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.5 | 2.7 | 1.272727 | 0 | 3.86363 | 0.54545 | 4.4545 |
| 2.7 | 3.0 | 1.203931 | 0 | 3.89803 | 0.54545 | 4.4545 |
| 3.1 | 3.4 | 1.086475 | 0 | 3.95676 | 0.54545 | 4.4545 |
| 3.4 | 3.7 | 1.012397 | 0 | 3.99380 | 0.54545 | 4.4545 |

وكذلك استخدمت طريقة Yen وآخرون (1999) [5] لنفس بيانات الجدول (١) وباستخدام دالة الهدف (٢٢) والقيود (٢٣) و(٢٥) واختيار عامل الميلان k0=2.5 وk1=2.7 وقيمة حد الانتماء (h=0.5) فنتج الانموذج الخطي بمعلمات مثلثية غير متماثلة وكما ياتي:

$$y = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_i$$

$$y = (a_0^L, a_0^C, k_0) + (a_1^L, a_1^C, k_1)x_i$$

$Y = (1.272727,.863636,2.5)+ (0,0.545455,2.7)x_i$

اما قيمة دالة الهدف المتمثلة باقل قيمة الانتشارات هي :

z= 4.454545

ان اختيار قيمة عامل الميلان يعتمد على المعرفة بالمشكلة ومميزات البيانات. فقد اختيرت في هذا البحث عدة قيم من عامل الميلان لاغراض المقارنة لنفس المثال فكانت النتائج كما موضحة في جدول (٢) .فاذا ازدادت قيم عامل الميلان فان قيم $a_0^L$ تبدأ بالتناقص اما قيم $a_1^C$ و z فتبقى على ماهي عليه أي لاتتاثر بتغيير العامل.

**الاستنتاجات**

يمكن استخدام الدالة المثلثية غير المتماثلة لايجاد معلمات الانموذج الخطي المضبب وذلك باحدى الطرائق ففي طريقة , Ishibuchi وNii [6]استخدم معلمات الانموذج بدلالة قيمة المركز وقيمتا الحد الادنى والحد الاعلى. اما طريقة Yen واخرون [5] فقد استخدم معلمات الانموذج بدلالة قيمة الانتشار ،قيمة المركز وقيمة عامل الميلان وبكلا الطريقتين اعطت نفس النتائج تقريبا من دون تغير الهيكل العام للبرمجة الخطية .

وفي حالة المثال العددي الذي نفذت الطرائق عليه حيث كان هناك متغير مفسر واحد ومتغير الاستجابة وكانت البيانات جازمة أي غير مضببة فظهرت النتائج بطريقة , Ishibuchi وNii [6] ستة مجاهيل للمعلمات المضببة .اما في حالة طريقة Yen واخرون [5] فكانت نتائج المعلمات اربعة مجاهيل.

**المصادر**


1- G.J. Klir ,U.St. Clair and B. Yuan,. (1997) Fuzzy Set Theory, Foundations and Applications , Prentice Hall PTR.,245

2- H. Tanaka, S. Uejima and K. Asai, IEEE Trans. Systems, Man, Cybernet. 12,(1982) 903–907.

3- H. Tanaka, Fuzzy Sets and Systems 24(1987),363 - 375.

4- H. Tanaka, I. Hayashi and J. Watada. Eur. J. Oper. Res. 40(1989), 38–396.

5- K.K. Yen ,S. Ghoshray and G. Roig, Fuzzy Sets and Systems 106 (1999), 167-177.

6- H. Ishibuchi and M. Nii.,Fuzzy Sets and Systems 119(2001) 273–290.
7- H.L. Li, Academic Conference Guide of Taiwan institute of business administration, 1, (2005) No.2 Dec.
8- R.Y.K. Fung, Y.Chena, Jiafu T., Fuzzy Sets and Systems 157 (2006), 98–120.
9- W.L. Winston, Operations Research Applications of Algorithms.( 1994) Duxbury Press, USA.
10- P. D'Urso. Comput. Statist. Data Anal. 42(2003), 47–72.
11- P. -Diamond , Inform. Sci. 46(1988) 141–157.
12- P. D'Urso and, T. Gastaldi. Comput. Statist. Data Anal. 34 ( 2000) 427–440.
13- M. Sh. Yang and T. Sh. Lin, Fuzzy Sets and Systems 126 (2002) 389–399.

# Asymmetric Triangular Membership Function for Fuzzy numbers and Application in Regression

( Received 30 / 11 / 2008 , Accepted 10 / 3 / 2009 )

**Abstract**

The present study described the form of fuzzy number represented by function in terms of membership function, namely Symmetric Triangular Membership Function and Asymmetric and how to use this function in the regression and application by a numerical example and comparison between symmetry and asymmetry .Two methods were used (Ishibuchi and Nii, 2001) and (Yen et al., 1999) thus fuzzy coefficients , the least total of coefficients spreads which is represented by objective function and the linear model could be obtained.

**Key words:**

Fuzzy numbers**,** Symmetric Triangular Membership Function**,** Asymmetric Triangular Membership Function.