استخدام المعاينة المزدوجة لتقدير صفي من المعممات إلى النسبة لتباين المجتمع المحدود

د. محمد عبود طاهر (*)

ريكان عبد العزيز احمد(**)

الملخص

في هذا البحث تم اقتراح نوعان من المقدرات المعممة لغرض تقدير نسبة تباين المجتمع المحدود باستخدام المعلومات المساعدة وبالاعتماد على المعاينة المزدوجة. حيث تم اشتقاق مقدار التحيز ومتوسطه مربعات الخطأ MSE إلى المقدرات المقترحة من المرتبة $O(n^{-1})$. وكذلك تم حساب اقل متوسط مربعات خطأ ممكن إلى تلك المقدرات لغرض المقارنة واستخراج أفضل المقدرات.

ABSTRACT:

This paper proposes a class of estimators for estimating ratio of variance of finite population using information on tow auxiliary characters. Asymptotic expression to terms of order $O(n^{-1})$ for bias and mean square error

MSE of the proposed class of estimators are derived. Optimum conditions are obtained under which the proposed class of estimators has the minimum MSE. An empirical study is carried out the compare the performance of various estimators of ratio with the conventional estimators.

(*) أستاذ الإحصاء المساعد/ جامعة البصرة/ كلية الإدارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء.

(**) مدرس الاحصاء المساعد/ جامعة البصرة/ كلية الإدارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء.

1. المقدمة

قد تظهر في كثير من المسوحات معلومات مساعدة أو إضافية لمتغير له علاقة مع المتغير الرئيسي الذي نحنو بصدد دراستة. هذة المعلومات يمكن الاستفادة منها لتحسن تصميم المعاينة. ومن ثم الوصول إلى تقديرات أكثر دقة لمعلومات المجتمع للمتغير الرئيسي الذي نحنو بصدد دراسته. فمثلاً إذا كنا نقوم بمسح لتقدير مصروفات العائلة الشهرية لمدينة معينة فأن عدد أفراد العائلة له علاقة مباشرة وقوية مع مصروفات العائلة الشهرية. غالباً نستطيع الحصول على معلومات عن عدد أفراد العائلة في المجتمع من خلال دوائر الأحوال المدنية أو من مسوحات شاملة جرى فيها جمع معلومات كاملة عن عدد أفراد العائلة وكذلك معلومات أخرى عن العائلة. وتعد عملية المعاينة المزدوجة الذي أول من قدم نظريتها Neyman(1938) أحدى تلك الطرق المستخدمة في التقدير, حيث يجرى تقسيم المجتمع تقسيماً طبقياً ويتم أولا سحب عينة عشوائية بسيطة بحجم n' من مجتمع حجمه N ومن خلال هزة العينة يتم دراسة المتغير المساعد لمعرفة خصائصه كالمتوسط العام والتباين والتوزيع الاحتمالي إن أمكن ومن ثم يتم سحب عينة ثانية وهي عينة عشوائية بسيطة بحجم n من العينة الأولى ويتم من خلالها دراسة خصائص المتغير الرئيسي تحت الدراسة, وتكون العينة الثانية عادة عينة عشوائية جزئية من العينة الأولى وهدفها معرفة خصائص متغير الدراسة الرئيسي. لقد استخدم العديد من الباحثين هذا الأسلوب في اقتراح بعض المقدرات التي تعتمد على متوسط المجتمع المحدود ودراسة خواصها أمثال. Singh (1994) , Rao (1990) , Srivstava (1967)

في هذا البحث سيتم الاعتماد على تباين المجتمع المحدود بدلاً من المتوسط لغرض اقتراح بعض المقدرات الإحصائية لمقدر النسبة والتي ستكون أكثر دقة من استخدام المتوسط ودراسة خواص تلك المقدرات وذلك لما لها من أهميه في الجانب التطبيقي والجانب البحثي في العلوم الإدارية والاقتصادية.

2. الجانب النظري

ليكن $U=\{1,2,\cdots i,\cdots N\}$ مجتمع محدود ذو حجم ثابت مقداره N وليكن Y_1 ,Y_0 يمثلان متغيرا الدراسة ولهما تباين مجتمع مقداره S_1^2 ,S_0^2 على التوالي. ولتكن R نسبة المجتمع بالاعتماد على تباين المتغيرين Y_1 ,Y_0 والتي تعرف حسب الصيغة التالية

$$R=\frac{S_0^2}{S_1^2}\,;S_1^2\neq 0$$

إن المشكلة تكمن هنا في عملية أيجاد أفضل تقدير لتلك النسبة R وذلك باستخدام المتغيرات المساعدة وهنا سوف نستخدم متغيرين مساعدين أخريين وهما Y_2, Y_3 الذين لهما كلفة اقل من Y_0, Y_1. وذلك على فرض أن تباين المجتمع S_2^2 بالنسبة إلى المتغير Y_2 يكون غير معلوم أما تباين المجتمع S_3^2 بالنسبة إلى المتغير Y_3 معلوم. وأن كلفة الوحدة الواحدة بالنسبة للمتغير Y_3 اقل من كلفة الوحدة الواحدة بالنسبة للمتغير Y_2 وذلك باستخدام أسلوب المعاينة المزدوجة حيث أن

$$S_j^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 \qquad (j = 0,1,2,3)$$

لتكن n' تمثل حجم العينة الكبيرة المسحوبة من المجتمع U وذلك بالاعتماد على أسلوب سحب العينة العشوائية البسيطة وبدون إرجاع (SRSWOR). ولتكن n تمثل حجم العينة الجزئية المسحوبة من العينة n' وبنفس طريقة السحب المستخدمة في الحالة الأولى. ليكن s_j^2 يمثل تباين العينة بالنسبة إلى y_j ومسحوب من العينة الثانية بحجم n أي أن

$$s_j^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2 \qquad (j = 0,1,2,3)$$

$$\hat{R} = \frac{s_0^2}{s_1^2} \quad ; s_1^2 \neq 0$$

وعليه يكون التقدير المقابل إلى النسبة وليكن $s_j'^2$ يمثل تباين العينة الكبيرة بالنسبة إلى المتغير y_j ومسحوب من العينة n' حيث أن

$$s_j'^2 = \frac{1}{n'-1}\sum_{i=1}^{n'}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2 \qquad (j = 2,3) \qquad (n' \succ n)$$

3. المقدرات المقترحة

قد يحدث في كثير من الدراسات أن نجمع معلومات عن أكثر من متغير في نفس الوقت. باستمرار توجد رغبة في دراسة العلاقة بين هذه المتغيرات, بالإضافة إلى دراسة هذه المتغيرات على حدة. إن تقدير النسبة R بين تباين المتغيرين من العلاقات التي نرغب بدراستها باستمرار ونظراً لكون تقدير هذه النسبة يكون متحيزاً وله متوسط مربعات خطأ MSE محسوب. لذا فأن المشكلة التي تواجه الباحثين هي كيفية أيجاد مقدرات أخرى لها MSE اقل

من MSE إلى النسبة R لتحل محل تلك النسبة وهنا في هذا البحث تم اقتراح صفين من المقدرات المعممة بالنسبة إلى R وهما على الترتيب كما يلي:

المقر المعمم الأول $\hat{R}_h = h(\hat{R}, u, v') = h(t) \quad \cdots (1)$

المقر المعمم الثاني $\hat{R}_g = g(\hat{R}, u, v, v') = g(t) \quad \cdots (2)$

حيث أن

$$\hat{R} = \frac{s_0^2}{s_1^2} \;,\quad u = \frac{s_2^2}{s_2'^2} \;,\quad v' = \frac{s_3'^2}{S_3^2} \;,\quad v = \frac{s_3^2}{s_3'^2}$$

يلاحظ أن المقدر الأول $\hat{R}_h$ هو دالة بدلالة كل من $\hat{R}, u, v'$ على الترتيب. أما المقدر الثاني $\hat{R}_g$ فهو دالة بدلالة كل من $\hat{R}, u, v, v'$ بحيث أن $g(\hat{R},1,1,1) = h(\hat{R},1,1) = \hat{R}$, وعندما تكون قيمة $v = 1$ فأن $\hat{R}_g = g(\hat{R}, u, 1, v') = h(\hat{R}, u, v') = \hat{R}_h$ أي أن المقدر الأول هو حالة خاصة من المقدر الثاني إذا كانت $v = 1$.

4. خواص صفي المقدرات المعممة المقترحة

أن دراسة خواص المقدرين المعممين يتم من خلال حساب توقع وتباين المقدرين, ولغرض معرفة تلك الخواص سوف يتم أعطاء بعض التعاريف التي تسهل عملية حساب تلك الخواص وهي كما يلي.

ليكن

$$e_j = \frac{s_j^2 - S_j^2}{S_j^2} \,,\, e'_j = \frac{s_j'^2 - S_j^2}{S_j^2} \quad \forall\ j = j' = 0,1,2,3$$

وباستخدام أسلوب المعاينة العشوائية البسيطة (SRSWOR) نحصل على

$$E(e_j) = E(e_{j'}) = E(e'_{j'}) = 0$$

$$E(e_j e_{j'}) = \begin{cases} (\frac{1}{n} - \frac{1}{N})\,(B_j - 1) & \forall\, j = j' \\ (\frac{1}{n} - \frac{1}{N})\,(\theta_{jj'} - 1) & \forall\, j \neq j' \end{cases}$$

$$E(e'_j e_{j'}) = E(e'_j e'_{j'}) = \begin{cases} (\frac{1}{n'} - \frac{1}{N})\,(B_j - 1) & \forall\, j = j' \\ (\frac{1}{n'} - \frac{1}{N})\,(\theta_{jj'} - 1) & \forall\, j \neq j' \end{cases}$$

حيث أن

$$\theta_{jj'} = \frac{\mu_{2,2(j,j')}}{\mu_{2,0(j,j')}\mu_{0,2(j,j')}} \;,\; \beta_j = \frac{\mu_{4,0(j,j)}}{\mu^2_{2,0(j,j)}}$$

$$\mu_{rs(z,t)} = \frac{1}{N}(z_j - \bar{Z})^r (t_j - \bar{T})^s$$

أن المقدرين $h(t)$, $g(t)$ نستطيع فتحهما عند النقطة $T = t$ باستخدام سلسلة تايلور من المرتبة الثانية وحسب الصيغة التالية, وعلية فأن المعادلة رقم (1) سيتم أعادة صياغتها كما يلي.

$$\hat{R}_h = h(t) + (\hat{R}-R)h_1(T) + (u-1)h_2(T) + (v'-1)h_3(T) + \frac{1}{2}\{(\hat{R}-R)h_{11}(t^*)\,(u-1)$$
$$+ h_{22}(t^*) + (v'-1)h_{33}(t^*) + 2(\hat{R}-R)(u-1)h_{12}(t^*) + 2(\hat{R}-R)(v'-1)h_{13}(t^*) + 2$$
$$(\hat{R}-R)(u-1)(v'-1)h_{23}(t^*)\} \qquad \cdots(3)$$

حيث أن

$(\hat{R} - R) = P(1+e_0)(1+e_1)^{-1} - 1$, $h(T) = R$,
$h_i(T) = 1 \quad i = 1,2,3$, $(v'-1) = e'_3$, $(u-1) = (1+e_2)(1+e'_2)^{-1} - 1$,
$h_{ij}(t^*) \quad i, j = 1,2,3$
عبارة عن قيم المشتقات الجزئية الأولى والثانية على التوالي.ومن المعادلة رقم (3) وبأخذ التوقع الرياضي لها نحصل على

$$E(\hat{R}_h) = R + O(n^{-r}) \quad ; r \geq 1$$

ويلاحظ أن مقدار التحيز إلى المقدر $\hat{R}_{u}$ من المرتبة $O(n^{-r})\ ;r\geq 1$ أما متوسط مربعات الخطأ MSE بالنسبة إلى المقدر $\hat{R}_{u}$ فيتم تقديره حسب الصيغة التالية.

$$MSE(\hat{R}_{u})=E(\hat{R}_{u}-R)^{2}$$

$$MSE(\hat{R}_{u})=MSE(\hat{R})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{N})\{h_{2}^{2}(B_{2}-1)+2Rh_{2}(\theta_{0,2}-\theta_{1,2})\}+(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N})$$
$$\{(B_{3}-1)+2Rh_{3}(\theta_{0,3}-\theta_{1,3})\}\qquad\cdots(4)$$

أما المعادلة رقم (2) فيتم أعادة صياغتها حسب الصيغة التالية

$$\hat{R}_{g}=g(T)+g_{1t}(T)(\hat{R}-R)+g_{2}(T)(u-1)+g_{3}(T)(v-1)+g_{3}^{0}(T)(v'-1)+$$
$$\frac{1}{2}\{g_{11}(t^{*})(\hat{R}-R)^{2}+g_{22}(t^{*})(u-1)^{2}+g_{33}(t^{*})(v-1)^{2}+g_{33}^{0}(t^{*})(v'-1)^{2}$$
$$+2g_{12}(t^{*})(\hat{R}-R)(u-1)+2g_{13}(t^{*})(\hat{R}-R)(v-1)+2g_{13}^{0}(t^{*})(\hat{R}-R)$$
$$(v'-1)+2g_{23}^{0}(t^{*})(u-1)(v-1)+2g_{33}^{0}(t^{*})(v-1)(v'-1)\qquad\cdots(5)$$

حيث أن

$$g(T)=R,\qquad (\hat{R}-R)=P(1+e_{0})(1+e_{1})^{-1}-1$$
$$g_{i}(T)=1\quad i=1,2,3$$
$$(v'-1)=e_{3}',$$
$$(u-1)=(1+e_{2})(1+e_{2}')^{-1}-1,(v-1)=(1+e_{3})(1+e_{3}')^{-1}-1$$
$$g_{ij}(t^{*})\quad i,j=1,2,3$$

عبارة عن قيم المشتقات الجزئية الأولى والثانية على التوالي.

وبنفس الأسلوب السابق نستطيع أن نشتق التوقع ومتوسط مربعات الخطأ إلى المقدر $\hat{R}_{g}$ وهما على التوالي.

$$E(\hat{R}_{g})=R+O(n^{-r})\quad ;r\geq 1$$

وعلية يكون مقدار التحيز للمقدر الثاني $\hat{R}_{g}$ من مرتبة $O(n^{-r})\ ;r\geq 1$ وهو مساوي الى مرتبة التحيز بالنسبة الى المقدر الاول.

$$MSE(\hat{R}_{g})=MSE(\hat{R})\quad +(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'})\{g_{2}^{2}(B_{2}-1)+2g_{2}g_{3}(\theta_{2,3}-1)+2Rg_{2}$$
$$(\theta_{0,2}-\theta_{1,2})+g_{3}^{2}(B_{3}-1)+2Rg_{3}(\theta_{0,3}-\theta_{1,3})\}\quad +(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N})$$
$$\{g_{3}^{0^{2}}(B_{3}-1)+2Rg_{3}^{0}(\theta_{0,3}-\theta_{1,3})\}\qquad\cdots(6)$$

حيث يلاحظ من المعادلة (4) و(6) أن المقدار $MSE(\hat{R})$ عبارة عن متوسط مربعات الخطأ الى النسبة $\hat{R}$ والذي يعرف حسب العلاقة التالية.

$$MSE(\hat{R}) = R^2(\frac{1}{n} - \frac{1}{N})\{(B_0 - 1) - (B_1 - 1) - 2(\theta_{0.1} - 1)\} \qquad \cdots(7)$$

5. أفضل القيم والمقدرات

أن الصيغة التي توصلنا إليها في حساب MSE الى كل من المقدرين السابقين وكما هو موضح في المعادلتين رقم 4 و6 على التوالي يلاحظ إنها يحتويان على قيم تتمثل بكل من $g_3^0, g_3, g_2, h_3, h_2$ على الترتيب أن أيجاد أفضل هذة القيم التي تجعل MSE الى كل من المقدر الاول $\hat{R}_h$ والمقدر الثاني $\hat{R}_g$ أصغر ما يمكن هي الغاية المرجوة ويتم ذلك من خلال الاشتقاق الجزئي الى كل من المعادلتين أعلاه وعلية فأن أفضل تقدير الى القيم هي على الترتيب كما يلي.

$$\hat{h}_2 = -R\frac{(\theta_{0.2} - \theta_{1.2})}{(B_2 - 1)} \qquad \cdots(8)$$

$$\hat{h}_3 = -R\frac{(\theta_{0.3} - \theta_{1.3})}{(B_3 - 1)} \qquad \cdots(9)$$

$$\hat{g}_2 = R\frac{(\theta_{0.2} - \theta_{1.2})(B_3 - 1) - (\theta_{0.3} - \theta_{1.3})(\theta_{2.3} - 1)}{(\theta_{2.3} - 1)^2 - (B_2 - 1)(B_3 - 1)} \qquad \cdots(10)$$

$$\hat{g}_3 = R\frac{(\theta_{0.3} - \theta_{1.3})(B_2 - 1) - (\theta_{0.2} - \theta_{1.2})(\theta_{2.3} - 1)}{(\theta_{2.3} - 1)^2 - (B_2 - 1)(B_3 - 1)} \qquad \cdots(11)$$

$$\hat{g}_3^0 = -R\frac{(\theta_{0.3} - \theta_{1.3})}{(B_3 - 1)} \qquad \cdots(12)$$

أن عملية أيجاد أقل متوسط مربعات خطأ MSE_{min} الى كلا المقدرين يتم من خلال تعويض القيم المقدرة التي تم حسابها الى كل من $g_3^0, g_3, g_2, h_3, h_2$ ولكن بعد إعادة صياغة هذة القيم بأسلوب أخر تكون فيه هذة القيم أسهل مما هي علية حتى نحصل على الصيغ النهائية والأفضل الى MSE_{min} لكلا المقدرين وذلك باستخدام التعاريف التالية.

ليكن

$$k_{jj'} = \frac{(\theta_{jj'} - 1)}{(B_{j'} - 1)} \qquad \rho_{jj'} = \frac{(\theta_{jj'} - 1)}{\sqrt{(B_j - 1)}\sqrt{(B_{j'} - 1)}} \quad \forall\, j = j' = 0,1,2,3 \quad k_j = k_{0,j} - k_{1,j}$$

وعليه يمكن صياغة المعادلات السابقة من المعادلة رقم (8) الى المعادلة رقم (12) حسب الصيغ التالية وعلى الترتيب.

$$\hat{h}_2 = -Rk_2 \qquad \cdots (13)$$

$$\hat{h}_3 = -Rk_3 \qquad \cdots (14)$$

$$\hat{g}_2 = \frac{R(k_{23}k_3 - k_2)}{(1 - \rho_{23}^2)} \cdots (15)$$

$$\hat{g}_3 = \frac{R(k_{23}k_2 - k_3)}{(1 - \rho_{23}^2)} \qquad \cdots (16)$$

$$\hat{g}_3^{\,0} = -Rk_3 \qquad \cdots (17)$$

وبتعويض المعادلتين رقم (13) و(14) في المعادلة رقم (4) والمعادلات (15) و(16) و(17) في المعادلة رقم (6) نحصل على أقل متوسط مربعات الخطأ $MSE_{\min}$ بالنسبة الى المقدر الاول $\hat{R}_h$ وكذلك بالنسبة الى المقدر الثاني $\hat{R}_g$ وهما على التوالي كما يلي.

$$MSE_{\min}(\hat{R}_h) = MSE(\hat{R}) - [(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'})R^2k_2^2(B_2 - 1) + (\frac{1}{n'} - \frac{1}{N})R^2k_3^2(B_3 - 1)] \quad \cdots (18)$$

$$MSE_{\min}(\hat{R}_g) = MSE(\hat{R}) - \Bigg[(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'})R^2(\frac{1}{1-\rho_{23}^2})\{(B_3 - 1)\,(\theta_{0.2} - \theta_{1.2})^2 - 2(\theta_{2.2} - 1)$$

$$(\theta_{0.2} - \theta_{1.2})(\theta_{0.3} - \theta_{1.3}) + (B_2 - 1)\,(\theta_{0.3} - \theta_{1.3})^2\} + (\frac{1}{n'} - \frac{1}{N})R^2k_3^2(B_3 - 1)\Bigg] \cdots (19)$$

6. المقارنات

عند مقارنة المعادلات 19,18,7 نظرياً ولتي تمثل أقل متوسط مربعات خطأ MSE_{min} ممكن الى المقدرات $\hat{R}_g, \hat{R}_h, \hat{R}$ على التوالي. يلاحظ من صيغ المعادلات الثلاثة أعلاه ان المقدرين المقترحين $\hat{R}_h$ و $\hat{R}_g$ هما أفضل من مقدر النسبة $\hat{R}$ وذلك كون لهما اقل MSE ، أما من حيث التحيز فأن جميع المقدرات متحيزة ولكن مقدار التحيز للمقدرات المقترحة $\hat{R}_h$ و $\hat{R}_g$ يكون اقل من مقدار التحيز الى مقدر النسبة $\hat{R}$ وكما سيوضح ذلك عددياً من خلال التطبيق العملي. أما عند مقارنة MSE_{min} الى المقدر المعمم $\hat{R}_g$ مع MSE_{min} الى المقدر المعمم $\hat{R}_h$ يلاحظ ما يلي.

$$MSE_{min}(\hat{R}_g) - MSE_{min}(\hat{R}_h) = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n'})R^2(1-\rho_{23}^2)(B_2 - 1)\{(\theta_{0,2} - \theta_{1,2})^2$$
$$[(B_2-1)(B_3-1)-(1-\rho_{23}^2)] - 2(\theta_{2,3}-1)(\theta_{0,2}-\theta_{1,2})(\theta_{0,3}-\theta_{1,3})$$
$$+(B_2-1)^2(\theta_{0,3}-\theta_{1,3})\}$$

وهذه الكمية دائماً تكون اكبر أو مساوية الى الصفر كونها تمثل التباينات والتباينات المشتركة بين المتغيرات وهذا ما يدل على ان $MSE_{min}(\hat{R}_g) \le MSE_{min}(\hat{R}_h)$ أي ان المقدر المعمم الثاني افضل من المقدر المعمم الاول.

7. التطبيق العملي

سيتم في هذا المبحث استخدام طريقتان في عملية حساب MSE_{min} الى المقدرات الثلاثة $\hat{R}_g, \hat{R}_h, \hat{R}$ عددياً ومقارنتها مع ما توصلنا إليه في المبحث السابق من نتائج نظرية وكذلك حساب الكفاءة النسبية الى $\hat{R}$ نسبتاً الى $\hat{R}_{()}$ وحسب الصيغة التالية.

$$PRE(\hat{R}_{(\cdot)}) = \frac{MSE_{min}(\hat{R})}{MSE_{min}(\hat{R}_{()})} \times 100\ \%$$

الى كل من الطريقتين وذلك لزيادة الدقة في عملية المقارنة ومعرفة أي المقدرات أفضل وسيتم الاعتماد على البيانات التي تم الحصول عليها من النشرات الإحصائية الهندية لعام 1998 والخاصة بدراسة القرى الزراعية حيث يلاحظ من هذه البيانات ان Y_0 يمثل عدد الأشخاص المتعلمين في القرية و Y_1 هو عدد الفلاحين في القرية و Y_2 هو عدد السكان في القرية و Y_3 عدد البيوت في القرية. حيث كان حجم المجتمع والعينة الأولى والثانية التي تم الاعتماد عليها في الدراسة هي على التوالي $n = 80\ , n' = 200\ , N = 332$.

7 .1. الطريقة الأولى

في هذه الطريقة سوف يتم الاعتماد على البيانات التي تم الحصول عليها من النشرات الإحصائية وحساب الصيغ الخاصة بمتوسط مربعات الخطأ المصغر MSE_{min} الى كل من $\hat{R}_g , \hat{R}_h , \hat{R}$ وحسب الصيغ التي تم التوصل إليها في المعادلات ذات الأرقام 19,18,7 وكذلك حساب الكفاءة النسبية المئوية الى المقدرات وحسب الصيغة التي تم تعريفها سابقا والجدول رقم (1) يوضح النتائج التي تم الحصول عليها من هذه الطريقة.

7 .2. الطريقة الثانية

في هذه الطريقة سيتم الاعتماد على أسلوب المحاكاة لغرض حساب اقل متوسط مربعات الخطأ MSE_{min} والكفاءة النسبية المئوية والتحيز الى المقدرات $\hat{R}_g , \hat{R}_h , \hat{R}$ وذلك بالاعتماد على البيانات السابقة وحسب الخطوات التالية.

1) سحب عينة عشوائية بسيطة بحجم $n' = 200$ من المجتمع الذي حجمه $N = 332$ ومن ثم سحب عينة ثانية وبحجم $n = 80$ من العينة الأولى.
2) استخدام العينة التي تم سحبها في الخطوة الأولى لحساب قيم الى المقدرات $\hat{R}_{(\bullet)}$.
3) إعادة الخطوة الأولى والثانية 1500 دورة وعلية سنحصل على 1500 قيمة الى المقدرات $\hat{R}_{(\bullet)}$.
4) حساب متوسط مربعات الخطأ الى المقدرات $\hat{R}_{(\bullet)}$ وحسب الصيغة التالية.

$$MSE(\hat{R}_{(\bullet)}) = \frac{1}{1500} \sum_{i=1}^{1500} (\hat{R}_{(\bullet)i} - \hat{R}_{(\bullet)})^2$$

5) حساب الكفاءة النسبية المئوية والتحيز وحسب الصيغة التي تم تعريفها مسبقاً, هذا وقد تم استخدام نظام (Mintab) ونظام (Mathmatica) لحساب الخطوات السابقة أعلاه وتم الحصول على النتائج وهي موضحة في الجدول رقم (2).

جدول رقم (1) نتائج $Bias , PRE , MSE$ الى المقدرات التي تم حسابها بالاعتماد على الطريقة الأولى

المقدرات	MSE	PRE	$Bias$
$\hat{R}$	111.641	100.00	7.264
$\hat{R}_h$	98.857	112.93	5.235-
$\hat{R}_g$	62.972	177.29	2.314

جدول رقم (2) نتائج $Bias\ ,PRE\ ,MSE$ الى المقدرات التي تم حسابها بالاعتماد على الطريقة الثانية

المقدرات	MSE	PRE	$Bias$
$\hat{R}$	125.524	100.00	10.254
$\hat{R}_h$	102.321	122.67	7.264-
$\hat{R}_g$	67.251	186.65	1.254

8. الاستنتاجات و التوصيات

8 .1. الاستنتاجات

نستنتج من النتائج التي تم التوصل أليها في عملية حساب $Bias\ ,PRE\ ,MSE$ الى كلا المقدرين المقترحين مايلي.

1) أن المقدر المقترح المعمم الثاني $\hat{R}_g$ هو أفضل المقدرات المقترحة لكونه يعطي اقل MSE وكذلك مقدار التحيز له اقل من مقدار التحيز الى بقية المقدرات الأخرى $\hat{R}$ و $\hat{R}_h$ وكذلك ان مقدار الكفاءة النسبية الى هذا المقدر أعلى من بقية المقدرات نسبتاً الى المقدر $\hat{R}$.

2) ان المقدر المعمم الاول $\hat{R}_h$ هو أفضل من المقدر $\hat{R}$ كونه يعطي اقل MSEوكذلك مقدار التحيز له اقل من مقدار التحيز الى المقدر $\hat{R}$ وكذلك ان مقدار الكفاءة النسبية الى هذا المقدر أعلى من الكفاءة النسبية الى المقدر $\hat{R}$ ولكنه ليس أفضل من المقدر الثاني.

3) تطابق النتائج النظرية التي تم التوصل إليها في المبحث رقم 6 مع النتائج العملية التي تم التوصل إليها في المبحث رقم 7 وهذا ما يدل على دقة الطريقة المستخدمة في عملية التقدير التي تعتمد على المتغيرات المساعدة في عملية التقدير.

8 .2. التوصيات

يوصي الباحثان باستخدام المقدرات المقترحة في هذا البحث في الميادين النظرية والتطبيقية في المسوحات الإحصائية والعينات التي تستخدم في العلوم الإدارية ة والاقتصادية عوضاً عن مقدر النسبة $\hat{R}$ وذلك لكفاءة المقدرات المقترحة. ومما تجدر الإشارة إليه ان المقدر المعمم الثاني $\hat{R}_g$ هو أفضل بكثير من المقدر المعمم الاول $\hat{R}_h$ وذلك لكون المقدر $\hat{R}_h$ هو حالة خاصة من المقدر $\hat{R}_g$ عندما تكون $v=1$.

المصـــــادر

1)Arcos, C.A & Ruede, G.M.,(1997) Variance estimation using auxiliary information an almost unbiased multivariate ratio estimator *Matrika.Vol.45,PP.171-178*

2)Cochran, W.G.,(1977) Sampling Techniques, third edition. John *Wiley & Sons*

3)Neyman, J.,(1938) Contribution to theory of sampling human population. *Jour.Amer.Stat.Asso.Vol.33,PP.101-116*

4)Rao,J.N.K. & Kovar, J.G.,(1990) On estimating distribution function and quintiles form survey data using auxiliary information. *Biometrika Vol.77,2;PP.365-375*

5)Singh,M.P.,(1994) Comparison of some ratio cum product estimators. *Sankhy $\bar{a}$.Vol.31,B.PP.375-378*

6)Srivastava, S.K.,(1967) An estimator using auxiliary information in sample surveys. *Cal.stat.Assc. Bull.Vol.16,PP121-132*