

استخدام اسلوب التحويل المويجي واسلوب الفروقات لتقدير الانموذج شبه المعلمي

أ.د. رعد فاضل حسن*

م.م علاء جابر طراد**

المستخلص :

ان تزايد الاهتمام بالنماذج شبه المعلمية في السنوات الخمس والعشرين الاخيرة قد حث الباحثين على اكتشاف المزيد من الطرق المختلفة لتقدير معلماته الخطية اضافة الى الجزء اللامعلمي منه , وكان استخدام التحويل المويجي في المجال الاحصائي فرصة جديدة للباحثين للسعي من اجل تقديرات جديدة لهذا النوع من النماذج , وقد تم تقدير الانموذج شبه المعلمي بأشراك اسلوبين من اساليب التقدير وهما اسلوب التحويل المويجي واسلوب الفروقات ليتم ايجاد مقدر جديد يضاف الى عائلة مقدرات هذا الانموذج .

Using the wavelet and difference method to estimate the quasi-parametric model

Abstract:

The increasing interest in quasi-parametric models in the last 25 years has prompted researchers to discover more different methods of estimating its linear parameters as well as the non-parametric part. The use of wavelet transformation in the statistical field was a new opportunity for researchers to seek new estimates for this type of model. The quasi-parametric model was estimated using two methods of estimation, the wavelet technique and the difference method.

1- المقدمة

يعتبر علم وتقدير نموذج الانحدار هو احد فروع علم الاحصاء الاساسية وهو يمثل احد البوابات الرئيسية لتفسير وتحليل وتشخيص اي مشكلة او ظاهرة (اقتصادية , اجتماعية , علمية , طبية ...) في طريق الوصول لحلها والتخلص من سلبياتها او لزيادة ايجابياتها , وقد تطور هذا العلم بالتزامن مع تطور علم الاحصاء نفسه , يقسم علم الانحدار الى ثلاثة انواع رئيسية وهي الانحدار المعلمي (Parametric) و الانحدار اللامعلمي (Nonparametric) و الانحدار شبه المعلمي (Semi parametric) والتي في حقيقتها تمثل اجيال نماذج الانحدار عبر التاريخ الاحصائي , وقد اختلفت ادوات وطرق تقدير هذه النماذج من نموذج الى اخر حيث كانت اشهر طريقتين للتقدير المعلمي هما الامكان الاعظم (Maximum Likelihood) والمربعات الصغرى الاعتيادية (Ordinary Least Square) وفيما يخص الانحدار اللامعلمي فان طرق تقديره ولفترة طويلة اعتمدت بشكل اساسي على الدوال اللبية (Kernel Functions) ومن اشهر هذه الطرق هي طرق (ناداريا – واتسون , برستل جاو , المقدر اللبي , الشرائح المقطعية , مهده الانحدار الخطي الموضوعي.....) وفيما يخص الانحدار شبه المعلمي فان طرق تقديره تعتمد على الدوال اللبية ايضا .

ان استخدام اساليب التقدير التي تعتمد على الاسلوب المويجي (Wavelet Approach) قد تاخرت قليلا عن اكتشاف المويجة نفسها والذي كان في بدايات عام 1981 عن طريق العالمان Jean Morlet و Alexander Grossmann واللذان يعتبران الاب الحقيقي لما يعرف الان باسم التحويل المويجي Wavelet transform ولكن مع مرور الوقت بدأت البحوث العلمية وخصوصا بعد العام 1987 عندما اكتشفت مويجة Daubechies من قبل عالمة الرياضيات البلجيكية Ingrid Daubechies وبعدها مويجة Coiflet عن طريق عالم الرياضيات الامريكي Ronald Coifman وغيرها من المويجات التي كان التوجه اليها بالاساس لغرض حل بعض المشاكل التي تصاحب تحويلات فورييه (Fourier Transformation) حيث انها لا يمكن ان تكون بكامل كفاءتها مع وجود عدم استقرار في الإشارة في حين ان التحويل المويجي يتعامل مع الحالات غير المستقرة لهذه الاشارات بكفاءة كبيرة , منذ بداية التسعينيات من القرن العشرين الماضي بدأت تطبيقات التحويل المويجي بالدخول الى علم الاحصاء كاداة قوية في مجال تمهيد البيانات وقد كتبت بحوث كثيرة و ثلاثة او اربعة كتب حول التطبيقات المويجية في الاحصاء

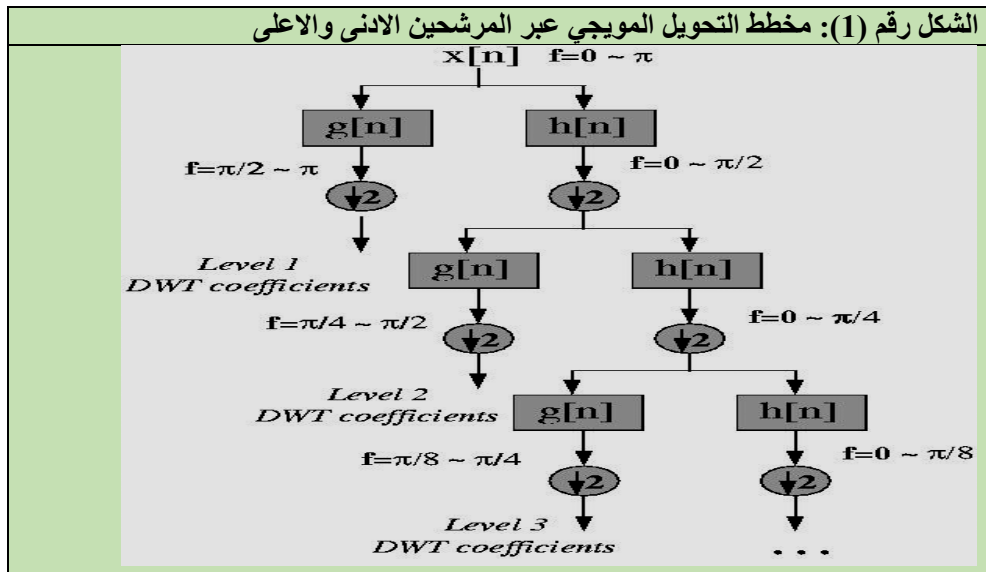
بصورة مباشرة او بصورة غير مباشرة وجميعها قد اتفقت بصورة حاسمة على اعتبار الاسلوب الموجي في التقديرات الاحصائية من الاساليب القوية جدا ويجدر بنا الاشارة الى نقطة مهمة جدا في هذا الاسلوب وهي حجم العينة المطلوب لها فان استخدام الموجة يجعل من الباحث مجبرا على اختيار عينات باحجام محددة تتبع نظام (2^k $k = 1, 2, 3, \dots$) اي ان العينات ستكون باحجام (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,) .

لماذا نستخدم الموجات ؟ ان هذا التساؤل كان علامة ثابتة في الكثير من المؤلفات التي تخصصت في الموجات وتحويلات وتطبيقاتها الرياضية والهندسية والاحصائية وتعددت الاجابات تبعا للتخصص او الغاية من المؤلف ولاننا احصائيون فان اهتمامنا سيكون منصبا على ما له علاقة بعلم الاحصاء بصورة اكبر من العلوم الاخرى لان الفكرة العامة هي ثابتة عند الجميع والاختلاف هو في بعض الاوصاف فمثلا قد يهتم علم الحاسوب في تحسين الصور وعلم الهندسة في تحليل الاشارة الصوتية او الكهربائية وهي في حقيقة الامر ليست الا تعاملات صرفة مع متجه من البيانات التي قد تحوي معلومات عن صورة او اشارة فلا يختلف كثيرا عن متجه للمتغير المعتمد Y في دالة الانحدار اللامعلمي مثلا فهو متجه يحوي بيانات يتم اخضاعها للاسلوب الموجي وكما سيأتي لاحقا , ان افضل اجابة قد حددها Todd Ogden في مقدمة كتابه {Ogden, 1997 #10} حيث حدد ثلاثة اسباب رئيسية لاستخدام الموجات في الاحصاء تحديدا وهي :-

1. انها محولات جيدة من نطاق الوقت الى نطاق التردد وتقدم معلومات كاملة في الوقت والتردد
2. تملك خوارزمية سريعة في تحويلاتها
3. خوارزمياتها بسيطة جدا

2- بعض انواع الموجات واساليب التحويل الموجي

ان تعبير الموجة (Wavelet) يدل على معنى الموجة الصغيرة (Little Wave) والتي تحوي على اقل ذبذبات (Oscillation) والتي ستتضاءل بسرعة نحو الصفر (fast decay to zero) في كلى الاتجاهين الموجب والسالب {Walnut, 2004 #4} {Van Fleet , 2009 #12} {Hubbard, 1996 #7} , وهذا يمثل الشرط المقبول (Admissibility Condition) للدالة التي تتطلب التحويل الموجي (WT) وهو ما عرف لأول مرة عام 1984 من (Jean Morlat) مبتكر الموجة الاصلية , ان مجموعة الموجات توظف لتقريب الاشارة (وفي حالتنا ستكون البيانات المراد تحليلها) من اجل ايجاد مجموعة من الموجات الفرعية والتي ستبنى من (توسيع او حيز او ضغط) وازاحة الموجة الاصلية والتي تمثل الاشارة (او البيانات المطلوب تحليلها) وهذه العملية باختصار هي التحول من القياسات الكبيرة الى القياسات الدقيقة عبر تمهيد هذه البيانات او الاشارات الى صورة اكثر دقة ووضوح وهذا بالضبط يمثل اسلوب الممهيدات اللبية والتي تطرق لها الكثير من علماء الاحصاء في النصف الثاني من القرن العشرين وما بعده والذي يمكن توضيحه بالمخطط التالي



$$\left. \begin{aligned} y_{low}[k] &= \sum x[n] * h[2k - n] \\ g[L - 1 - N] &= (-1)^n * h[n] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y_{high}[k] &= \sum x[n] * g[2k - n] \\ \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

حيث ان : $x[n]$, $g[2k - n]$, $h[2k - n]$ ستمثل الدالة المويجية و المرشح الاعلى والادنى على التوالي

k مقدار ثابت

$n = 1, 2, 3, \dots$

{Meyer, 1993 #13}

3. بعض انواع المويجات

سيتم التطرق الى ثلاثة انواع من المويجات وهي (Haar, Daubechies, Coiflet) وعلى التوالي :-

• مويجة هار (Haar Wavelet)

تعتبر مويجة هار من ابسط واقدم طرق التحويل المويجية والمقدمة من قبل الفريد هار (Alfred Haar) في عام 1915 وتعتبر من ابسط المويجات حيث ان المويجتين الام والاب (Haar mother and father wavelet) هما على الشكل التالي :-

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{mother wavelet}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{father wavelet} \quad (2)$$

ان مصفوفة التحويل المويجي ستكون بالوصف التالي

$$W_{Haar} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

وان مصفوفة المرشحين الادنى والاعلى (Highpassfilter , Lowpassfilter) ستكون بالصيغة التالية :-

$$W_{Haar} = \begin{bmatrix} h[n] \\ g[n] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

تم

• موجة Daubechies

تقديم موجة Daubechies من قبل عالمة الرياضيات البلجيكية (Ingrid Daubechies) كتنويع لبحثها المتقدم حول الموجات التي تملك نقاط التلاشي (Vanishing points) في عام (1988) وقدمت عدة موجات من ضمنها Daubechies 2 , Daubechies 4 , Daubechies 6 , Daubechies 8 , Daubechies 10 , Daubechies 12 , Daubechies 16 , Daubechies 18 , Daubechies 20 (Daubechies , 1999#3) وسنبين وصفا لدالة واحدة منها وهي Daubechies 4 حيث ان عدد المعالم في مصفوفتها هو اربعة وحسب التالي :-

$$\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \alpha_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \alpha_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \alpha_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

{Walnut, 2004 #4}

$$W_{d4} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

ومن المناسب هنا توضيح المرشح الاعلى والادنى في هذه المصفوفة اذ أن معالم المرشح الادنى (Lowpassfilter) ستكون في الصفوف (1 , 3 , 5 , 7) و معالم المرشح الاعلى ستكون في الصفوف (2 , 4 , 6 , 8) وبالتالي يمكن اعادة كتابة المصفوفة W_{d4} عندما (N=8) بالشكل التالي :-

$$W_{d4} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_0 \\ \alpha_1 & -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

ان العلاقة التي ستكون بين $h[n]$ و $g[n]$ هي

$$g_k = (-1)^k h_{3-k} \dots \dots \dots (3)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

• موجة Coiflet

تم تقديم موجة Daubechies من قبل عالمة الرياضيات البلجيكية (Ingrid Daubechies) ايضا بناء على مقترح من العالم الأمريكي Coifment حيث ستركز عزوم التلاشي فيها عند الموجة الاب فقط وهي بعدة موجات منها $Coi1, Coi2, Coi3, Coi4, Coi5$, ويمكن توضيح مصفوفة التحويل باختيار $Coi4$ كمثال عليها والتي ستملك المعلمات وبالشكل التالي :-

$$\begin{aligned} a_{-2} &= \frac{-\sqrt{2}b_0}{16}, a_{-1} = \frac{\sqrt{2}(4-b_1)}{16}, a_0 = \frac{-\sqrt{2}(8+2b_0)}{16} \\ a_1 &= \frac{\sqrt{2}(4+2b_1)}{16}, a_2 = \frac{-\sqrt{2}b_0}{16}, a_3 = \frac{-\sqrt{2}b_1}{16} \end{aligned}$$

$$W_{cof4} = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & 0 & 0 \\ -\alpha_{-2} & \alpha_{-1} & -\alpha_0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} \\ 0 & 0 & -\alpha_{-2} & \alpha_{-1} & -\alpha_0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & -\alpha_{-2} & \alpha_{-1} & -\alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ -\alpha_0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & -\alpha_{-2} & \alpha_{-1} \end{bmatrix}$$

ومصفوفة المرشحين الاعلى والادنى ستكون بالشكل التالي

$$W_{cof4} = \begin{bmatrix} h[n] \\ g[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} \\ \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_{-2} & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ -\alpha_{-2} & \alpha_{-1} & -\alpha_0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{-2} & \alpha_{-1} & -\alpha_0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 \\ -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & -\alpha_{-2} & \alpha_{-1} & -\alpha_0 & \alpha_1 \\ -\alpha_0 & \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & -\alpha_{-2} & \alpha_{-1} \end{bmatrix}$$

ومن الواضح ان $h[n]$ ستمثل الصفوف الفردية و $g[n]$ ستمثل الصفوف الزوجية منها

Wavelet's Thresholding (Wth)

4. العتبة الموجية

تعتبر العتبة من الاساسيات في التحويل الموجي (WT) ان كان متقطعا (DWT) او مستمرا (CWT) او سريعا (FWT) {Wolfgang Hardle, 1997 #6} حيث انها ستستخدم لازالة اي تشويش في بيانات الاشارة بعد

تحويلها الى موجة (اي نوع من الموجات) وبتعابيرنا الاحصائية فان العتبة الموجية ستقوم مقام معلمة التمهيد في الدوال اللبية حيث سيؤثر زيادتها او نقصانها على مقدار التمهيد للبيانات , وهناك نوعين من قانون العتبة وهما :-

1. قانون العتبة الصلب (*Hard Thresholding*) :- والذي يتم فيه تصفير القيم ما دون العتبة الى الصفر والمحافظة على القيم الأعلى من العتبة حيث يمكن وصفها بالعلاقة التالية :-

$$\hat{y}(n) = \begin{cases} y(n), & y(n) > \lambda \\ y(n), & y(n) < -\lambda \\ 0, & |y(n)| \leq \lambda \end{cases} \quad \dots \dots \dots (4)$$

2. قانون العتبة الناعم (*Soft Thresholding*) :- يتم فيها إنهاء القيم ما فوق العتبة الى الصفر والمحافظة على القيم الأدنى من العتبة حيث يمكن وصفها بالعلاقة التالية :-

$$\hat{y}(n) = \begin{cases} y(n) - \lambda, & y(n) > \lambda \\ y(n) + \lambda, & y(n) < -\lambda \\ 0, & |y(n)| \leq \lambda \end{cases} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Wavelet

5. الانحدار شبه المعلمي Regression

ان الحاجة الى نماذج انحدار غير تقليدية قد تزايدت منذ خمسينيات القرن العشرين وحتى هذه اللحظة وفيها ظهرت التقديرات اللامعلمية التي استخدمت الدوال اللبية (*Kernel Functions*) وصولا الى منتصف الثمانينات لتتحدد معالم الانموذج شبه المعلمي الموصوف بالصيغة :-

$$Y = x^t \beta + m(z) + e \quad \dots \dots \dots (6)$$

حيث ان :-

$\underline{Y}$ يمثل متغير الاستجابة (المتغير المعتمد) , $m(z)$ يمثل دالة الجزء اللامعلمي للمتغير التوضيحي z , $x^t \beta$ يمثل الجزء المعلمي من الانموذج و e يمثل خطأ النموذج , وقد تم تقدير هذا الانموذج بعدة اساليب منها (مقدر سبيكمان) و (مقدر سبيكمان المطور) ومقدر الفروقات والتي ستعتمد بالاساس على الاساليب اللبية في هذا التقدير (طراد, 2014 #2)

Wavelet Nonparametric

6. الانحدار المويجي اللامعلمي Regression

امتدادا لانموذج الانحدار شبه المعلمي والذي هو بالاصل امتدادا لنظرية الانحدار العامة فان الانحدار المويجي شبه المعلمي يعتبر احد الطرق الحديثة لتحليل البيانات ومعرفة العلاقات بين متغيراتها التوضيحية (X_i) المعلمية و (Z_i) اللامعلمية ومتغير الاستجابة (Y_i) فيها من حيث توفير منحني البيانات وجعله يطابق او يقترب من التطابق مع منحني المتغير المعتمد , ان البحث المستمر عن طرق تقدير نماذج الانحدار بصورة عامة ونموذج الانحدار شبه المعلمي بصورة خاصة لم تتوقف مع اكتشاف دوال ممهدة جديدة او تطوير الدوال الممهدة القديمة (طراد, 2014 #2) ومن هذا المنطلق فان ظهور الموجة والطرق المويجية كدوال ممهدة فعالة وقوية جدا جعل الباحثين الاحصائيين ينتبهون الى امكانياتها في تحديد مقدرات كفاءة ولتطور الحاسوب الالكتروني وانتشاره وجود انظمة حاسوبية مكنت الباحثين من القيام بالتحليل المويجي بسهولة اكبر مع توفر برامج كفاءة من قبيل الماتلاب *Mathlab* وبرنامج *XploRe* حيث تتوفر في كليهما مكتبة من الايعازات الخاصة بهذا التحليل , وعلى هذا الاساس فقد تمكن الباحثون الاحصائيون من تحديد ثلاث مقدرات رئيسية وهي بالاصل متابعة لمقدرات سابقة لهذا الانموذج ولكن بالتخلي عن التمهيد اللبي وابداله بالتمهيد المويجي وعلى التوالي :-

1. متابعة تقدير المطور لـ (Leming Qu) في عام 2004 وسنسّميه (تقدير *Speckman1* المويجي) (*Speckman1 Wavelet Estimation*) {Qu, 2003 #9}.

2. متابعة تقدير خوارزمية الـ *Backfitting* لـ (Xiao Wen Chan , Leming Qu) في عام (2004) وسنطلق عليه تسمية (تقدير الـ *Backfitting* المويجي) {Wen & Qu , 2004 #14}

3. متابعة تقدير *Speckman* الكلاسيكي لـ (Irène Gannaz) في عام (2007) وسنطلق عليه تسمية (تقدير *Speckman2* المويجي) (*Speckman2 Wavelet Estimation*) {Gannaz, 2007 #8}, حيث سيتم التركيز على الأسلوبين الأول والثالث فقط

وان جميع هذه التقديرات قد استخدمت خوارزمية التقدير اللامعلمية والتي تعرف باسم خوارزمية تقدير *Donoho & Jonstone* لتقدير الجزء اللامعلمي من النموذج والتي تكون بالوصف التالي :-

خوارزمية رقم (1):- أسلوب *Donoho & Jonstone* لتقدير الانحدار المويجي اللامعلمي

1. اجراء التحويل المويجي المتقطع *DWT* على Y_i لاجاد $\tilde{Y}$ اي بعبارة اخرى تحويل البيانات من نطاق الوقت الى النطاق المويجي وباسلوب المصفوفات

$$\tilde{Y} = WY$$

2. يتم ادخال $\tilde{Y}$ على العتبة المويجية *wavelet thresholding* ليتم اجراء التمهيد على البيانات المحولة مويجيا (ان عملية اختيار معلمة العتبة ستكون اما بالصيغ التي تم ذكرها في موضوع العتبة او تكون اختيارية للوصول الى الحالة الافضل) ليتكون لدينا $\tilde{Y}$

3. يتم ادخال نتائج العتبة المويجية $\tilde{Y}$ في عماءة معكوس التحويل المويجي المتقطع (*IDWT*) لتكون لدينا البيانات الممهدة النهائية (اي اعادة البيانات الممهدة مويجيا من النطاق المويجي الى نطاق الوقت) وباسلوب المصفوفات

$$\hat{Y} = W^{-1}\tilde{Y}$$

7. التقدير بالفروقات

يعتبر اسلوب الفروقات من اشهر اساليب التقدير للنموذج شبه المعلمي والذي تم تحديده من قبل الرياضي الالمانى *Yatchow* (طراد 2) والذي سيكون بالشكل التالي :-
ليكن لدينا النموذج

$$y = x\beta + f(z) + e \dots \dots (7)$$

نقوم بترتيب المتغيرين Y, X على اساس ترتيب المتغير Z اذ أن:-

$$Z_1 \leq Z_2 \leq Z_3 \leq \dots \leq Z_n$$

يتم اخذ التحويل المويجي للفرق الاول ولكل مكونات النموذج (7)

$$W^*y_n - y_{n-1} = W^*(x_n - x_{n-1})\beta + W^*(f(z_n) - f(z_{n-1})) + W^*(e_n - e_{n-1})$$

من الناحية التقريبية فان الفرق الاول بين $f(z_n) - f(z_{n-1})$ سيكون مساويا للصفر وبالتالي فان التحويل المويجي له سيكون مساويا للصفر ايضا فيتبقى من معادلة الفروق

$$W^*(y_n - y_{n-1}) = W^*(x_n - x_{n-1})\beta + W^*(e_n - e_{n-1}) \dots \dots \dots (8)$$

وبتعويض

$$\Delta_{W^*e} = W^*(e_n - e_{n-1})$$

$$\Delta_{W^*x} = W^*(x_n - x_{n-1})$$

$$\Delta_{W^*y} = W^*(y_n - y_{n-1})$$

فان النموذج سيكون بالوصف

$$\Delta_{W^*y} = \Delta_{W^*x}\beta + \Delta_{W^*e} \dots \dots \dots (9)$$

$$\hat{\beta}_{def} = [\Delta_{W^*_x}^T \Delta_{W^*_x}]^{-1} \Delta_{W^*_x}^T \Delta_Y \quad \dots \dots \dots (10)$$
$$y = x\hat{\beta}_{def} + f(z) \quad \dots \dots \dots (11)$$
$$y - x\hat{\beta}_{def} = \tilde{f}(\mathbf{z})$$
$$\text{blue } \mathbf{D} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \xrightarrow{\text{yields}} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) = \mathbf{W}^*(\mathbf{D})\mathbf{y} - \mathbf{x}\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{def} = \mathbf{D}$$

خوارزمية رقم (2):- التقدير بالفروقات للأنموذج الشبه المعلمي باستخدام <i>DWT</i> 1. يتم ترتيب المتغير اللامعلمي z تصاعديا وترتيب المتغيرين التوضيحي والاستجابية y, x بناء على ترتيب المتغير اللامعلمي . 2. يتم اجراء التحويل المتقطع <i>DWT</i> لنتائج الفرق بين المتغير الاصلي وفرقه الاول لكل من المتغيرين x, y مع ادخال النتائج الى العتبة الموجية <i>Wth</i> ومن ثم اجراء التحويل المعكوس <i>IDWT</i> . 3. يتم تقدير المعلمة β خطأ وفق الصيغة (10) . 4. نعوض β المقدرة في اصل معادلة الانحدار شبه المعلمي (7) ونكمل تقدير الجزء اللامعلمي بعد تحويل الجزء المعلمي المقدر الى الطرف الثاني واكمال التقدير على اساس اعتبار المعادلة لامعلمية صرفة ويتم تقديرها وفق التقديرات اللامعلمية الموجية .

يعد التلوث البيئي من اخطر القضايا التي تمس حياة الانسان بصورة مباشرة من حيث التسبب باخطر الامراض التي تؤدي الى الوفاة او التشوهات الخلقية للجنة والاطفال, ان انواع الملوثات الجوية كثيرة جدا وقد تصنيفها في الامم المتحدة الى اربعة اصناف رئيسة وهي (تلوث الهواء والماء والتربة والضوضاء) ولكل منها اسبابه الخاصة او المشتركة ونتائجها الخاصة والمشاركة , وفي كل جزء من اجزاء هذه الانواع يوجد العشرات من الملوثات التي تختلف تاثيراتها عن بعضها البعض باختلاف هذا الملوث ولكنها تتفق جميعا في كونها احد اخطر التحديات الوجودية لانسان القرن العشرين الماضي والواحد والعشرين الحالي , وفي هذا القسم الخاص من البحث تمت نمذجة بيانات بيئية تم الحصول عليها من وزارة البيئة تخص تركيز ملوثا واحدا هو رابع اوكسيد الكبريت (SO_4) مع تواجد عاملين مؤثرين عليه هما درجة الحرارة وسرعة الرياح ولمدة 512 يوما تمتد بين العامين 2015 و 2016 حيث تمت نمذجتها بالاسلوب شبه المعلمي اللبي والاسلوب شبه المعلمي المويجي باستخدام نفس الموجات التي تمت الاشارة اليها في الجانب النظري , وعلى غرار النماذج اللامعلمية فاننا تقريبا سننتج نفس المراحل في هذا القسم الخاص من البحث من حيث تقدير النماذج اللبية واختيار اكثر من قيمة للمسافة البينية ($bandwidth$) وبعدها اجراء النمذجة الشبه معلمية المويجية وفي المرحلة الثانية اجراء المقارنة بين النوعين من هذه النماذج وفي المرحلة الاخيرة ستكون دراسة سلوك النماذج المويجية على اساس مقياس معامل التحديد ومعيار ايكبي وشوارتز , وكما تم تحديد قيمة لمعامل التحديد R^2 يتم عندها اختيار النماذج فان الاختيار سيكون هنا وبسبب كثرة النماذج عندما يكون معامل التحديد 0.75 فاكثر, وقد تم تحديد المتغيرات بالاسلوب التوافيق ليتكون شكلين للنموذج يمكن تقديرهما وكما يلي :-

الشكل الاول

أذن أن: Y ستمثل تركيز الملوث SO_4 يوميا

X_1 ستمثل درجة الحرارة اليومية (سلوك معلم)

X_2 ستمثل سرعة الرياح اليومية (سلوك لا معلمي)

$$Y = \beta_2 X_2 + W(X_1)$$

الشكل الثاني

أذ أن Y ستمثل تركيز الملوث SO_4 يوميا

X_1 ستمثل درجة الحرارة اليومية (سلوك لامعلمي)

X_2 ستمثل سرعة الرياح اليومية (سلوك معلمي)

تم تحديد شرطين رئيسيين لتقدير النماذج شبه المعلمية الأول هو اعتماد النماذج المنطقية بمعنى اخر عندما تكون درجة الحرارة هي المتغير المعلمي فان المعلمة المصاحبة يجب ان تكون بالاشارة الموجبة (زيادة في التلوث) وعندما تكون سرعة الرياح هي المتغير المعلمي فان المعلمة المصاحبة ستكون بالاشارة السالبة (نقص في التلوث) وعلى هذا الاساس تم تقدير 288 أنموذجا كانت بمجملها منطقية من الناحية العلمية وعند تطبيق الشرط الثاني باختبار النماذج التي تملك معامل تحديد التي تتعدى 0.70 فانها ستقلص الى 216 أنموذجا

وفي الجدول التالي تفصيل اولي لتقدير نماذج الطريقة المقترحة وللتحويل المتقطع فقط .

جدول رقم (1):- اعداد النماذج المويجية وحسب التحويل المويجي المتقطع و ولمختلف المستويات					
ت	المستوى المويجي	Haar	Daubechies	Coiflet	المجموع
1	1	2	20	10	32
2	2	2	20	10	32
3	4	2	20	10	32
4	8	2	20	10	32
5	16	2	20	10	32
6	32	2	20	10	32
7	64	2	20	10	32
8	128	2	20	10	32
9	256	2	20	10	32
المجموع					90
المجموع الكلي					288

وستتم مناقشة نتائج الأنموذج المقترح على ثلاثة مراحل رئيسية وهي بالصورة التالية:

1. سلوك النماذج على اساس المقاييس الثلاثة (معامل التحديد ومعيار اكيكي وشوارتز)
2. سلوك النماذج على اساس المويجات الثلاثة (*Haar, Daubechies, Coiflet*)
3. تحديد النماذج الافضل في كل مستوى مويجي على اساس معامل التحديد

1. سلوك النماذج على اساس المقاييس الثلاثة (معامل التحديد ومعيار اكيكي وشوارتز)

قبل البدء في توضيح سلوك النماذج المويجية للاسلوب المقترح نوضح بانه لم تظهر لنا اي نماذج ذات معامل تحديد متدني (اقل من 0.50) وهذا ما يخص معامل التحديد اما ما يخص معيار اكيكي فان قيمه كانت قليلة نوعا ما وقد تواجدت ولاول مرة في الحدود الاقل (2.010 - 2) من بين جميع النماذج شبه المعلمية اما بالنسبة لمعيار شوارتز فقد استقر عند فترة واحدة ولم يخرج منها ولمختلف المستويات . تم تكوين الجدولين بالرقم (63) على غرار الجداول الماضية لغرض تحديد خارطة مواقع هذه النماذج وكان بالشكل التالي :-

الجدول رقم (2) :- تبويب النماذج المقترحة على اساس المعايير (R^2 , AIC , BIC) ولمختلف المستويات المويجية للتحويل المتقطع DWT											
المستوى المويجي ($2^0 = 1$)											
Coif	Daub	Haar	R^2	Coif	Daub	Haar	BIC	Coif	Daub	H	AIC
0	0	0	0.500 - 0.599	0	0	0	6.101 - 6.200	8	12	2	2.011 - 2.020
5	10	1	0.600 - 0.699	10	20	2	6.201 - 6.300	2	8	0	2.021 - 2.030

3	8	0	0.700 – 0.799	0	0	0	6.301 – 6.400	0	0	0	2.031 – 2.040
2	2	1	0.800 – 0.899	0	0	0	6.401 – 6.500	0	0	0	2.041 – 2.050
المستوى الموجي (2 ¹ = 2)											
Coif	Daub	Haar	R ²	Coif	Daub	Haar	BIC	Coif	Daub	H	AIC
0	0	0	0.500 – 0.599	0	0	0	6.101 – 6.200	8	11	2	2.011 – 2.020
5	11	1	0.600 – 0.699	10	20	2	6.201 – 6.300	2	9	0	2.021 – 2.030
3	7	0	0.700 – 0.799	0	0	0	6.301 – 6.400	0	0	0	2.031 – 2.040
2	2	1	0.800 – 0.899	0	0	0	6.401 – 6.500	0	0	0	2.041 – 2.050
المستوى الموجي 2 ² = 4											
Coif	Daub	Haar	R ²	Coif	Daub	Haar	BIC	Coif	Daub	H	AIC
0	0	0	0.500 – 0.599	0	0	0	6.101 – 6.200	7	11	2	2.011 – 2.020
5	11	1	0.600 – 0.699	10	20	2	6.201 – 6.300	3	9	0	2.021 – 2.030
3	8	0	0.700 – 0.799	0	0	0	6.301 – 6.400	0	0	0	2.031 – 2.040
2	1	1	0.800 – 0.899	0	0	0	6.401 – 6.500	0	0	0	2.041 – 2.050
المستوى الموجي 2 ³ = 8											
Coif	Daub	Haar	R ²	Coif	Daub	Haar	BIC	Coif	Daub	H	AIC
0	0	0	0.500 – 0.599	0	0	0	6.101 – 6.200	5	10	2	2.011 – 2.020
5	9	0	0.600 – 0.699	10	20	2	6.201 – 6.300	5	10	0	2.021 – 2.030
3	10	1	0.700 – 0.799	0	0	0	6.301 – 6.400	0	0	0	2.031 – 2.040
2	1	1	0.800 – 0.899	0	0	0	6.401 – 6.500	0	0	0	2.041 – 2.050
المستوى الموجي 2 ⁴ = 16											
Coif	Daub	Haar	R ²	Coif	Daub	Haar	BIC	Coif	Daub	H	AIC
0	0	0	0.500 – 0.599	0	0	0	6.101 – 6.200	6	11	2	2.011 – 2.020
3	5	0	0.600 – 0.699	10	20	2	6.201 – 6.300	4	9	0	2.021 – 2.030
4	13	1	0.700 – 0.799	0	0	0	6.301 – 6.400	0	0	0	2.031 – 2.040
3	2	1	0.800 – 0.899	0	0	0	6.401 – 6.500	0	0	0	2.041 – 2.050
المستوى الموجي 2 ⁵ = 32											
Coif	Daub	Haar	R ²	Coif	Daub	Haar	BIC	Coif	Daub	H	AIC
0	0	0	0.500 – 0.599	0	0	0	6.101 – 6.200	6	12	2	2.011 – 2.020
0	0	0	0.600 – 0.699	10	20	2	6.201 – 6.300	4	8	0	2.021 – 2.030
7	19	1	0.700 – 0.799	0	0	0	6.301 – 6.400	0	0	0	2.031 – 2.040
3	1	1	0.800 – 0.899	0	0	0	6.401 – 6.500	0	0	0	2.041 – 2.050
المستوى الموجي 2 ⁶ = 64											
Coif	Daub	Haar	R ²	Coif	Daub	Haar	BIC	Coif	Daub	H	AIC
0	0	0	0 – 0.500	0	0	0	6 – 6.100	1	1	1	2 – 2.010
0	0	0	0.500 – 0.599	0	0	0	6.101 – 6.200	6	15	1	2.011 – 2.020
0	0	0	0.600 – 0.699	10	20	2	6.201 – 6.300	3	4	0	2.021 – 2.030
5	13	1	0.700 – 0.799	0	0	0	6.301 – 6.400	0	0	0	2.031 – 2.040
5	6	0	0.800 – 0.899	0	0	0	6.401 – 6.500	0	0	0	2.041 – 2.050
0	1	1	0.900 – 0.999					0	0	0	2.051 –
المستوى الموجي 2 ⁷ = 128											
Coif	Daub	Haar	R ²	Coif	Daub	Haar	BIC	Coif	Daub	H	AIC

0	0	0	0-0.500	0	0	0	6 – 6.100	1	1	0	2 – 2.010
0	0	0	0.500 – 0.599	0	0	0	6.101 – 6.200	9	19	2	2.011 – 2.020
0	0	0	0.600 – 0.699	10	20	2	6.201 – 6.300	0	0	0	2.021 – 2.030
0	0	0	0.700 – 0.799	0	0	0	6.301 – 6.400	0	0	0	2.031 – 2.040
10	18	2	0.800 – 0.899	0	0	0	6.401 – 6.500	0	0	0	2.041 – 2.050
0	2	0	0.900-0.999					0	0	0	2.051 –
المستوى الموجي $2^8 = 256$											
Coif	Daub	Haar	R^2	Coif	Daub	Haar	BIC	Coif	Daub	H	AIC
0	0	0	0 – 0.500	0	0	0	6 – 6.100	7	14	1	2 – 2.010
0	0	0	0.500 – 0.599	0	0	0	6.101 – 6.200	3	6	1	2.011 – 2.020
0	0	0	0.600 – 0.699	10	20	2	6.201 – 6.300	0	0	0	2.021 – 2.030
0	0	0	0.700 – 0.799	0	0	0	6.301 – 6.400	0	0	0	2.031 – 2.040
0	0	0	0.800 – 0.899	0	0	0	6.401 – 6.500	0	0	0	2.041 – 2.050
10	20	2	0.900 – 0.999					0	0	0	2.051 –

• ان هذا الجدول يوضح سلوك النماذج الموجية بصورة عامة فما يخص معامل التحديد يمكن توضيح حركة النماذج الموجية على اساس معامل التحديد R^2 حيث انه في المستويات الستة الاولى منها ($(2^0 = 1)$), ($2^1 = 2$) ($2^2 = 4$) ($2^3 = 8$) ($2^4 = 16$) ($2^5 = 32$) , (وبعد متساوي من النماذج يبلغ 32 أنموذجاً لكل منها) فان اقيامه تتركز في الحدود المتوسطة (0.60-0.69) بالنسب التالية :- 53.1% , 53.1% , 34.1% , 32.2% , 34.1% , 43.7% , 0.25% , 0%) على التوالي بالنسبة للمستويات , والنماذج الجيدة من 0.70-0.799 بالنسب التالية :- 34.1% , 32.2% , 34.1% , 43.7% , 56.2% , 84.4%) على التوالي بالنسبة للمستويات المختلفة , والنماذج الجيدة جدا (0.80-0.89) بالنسب التالية :- 15.6% , 15.6% , 12.5% , 12.5% , 18.7% , 15.6%) على التوالي بالنسبة للمستويات المختلفة , اما عند المستوى السابع ($2^5 = 64$) فان النماذج بعدد (32) قد بدأت بالانتقال تدريجياً الى الحدود الممتازة مع مغادرة الحدود المتوسطة نهائياً وبقاء النماذج في الحدود الجيدة والجيدة جدا وبالنسب التالية :- 59.4% , 34.4% , 6.2%) على التوالي بالنسبة للحدود , اما عند المستوى الثامن ($2^7 = 128$) فان النماذج قد غادرت نهائياً الحدود الجيدة وتركزت فقط في الحدود الجيدة جدا والممتازة

• وبالنسب التالية (93.7% , 6.3%) وفي المستوى التاسع والآخر ($2^8 = 256$) فان النماذج اصبحت تتركز فقط في الحدود الممتازة ونسبة (100%) .

2. سلوك النماذج على اساس الموجات

يمكن تسليط الضوء على سلوك النماذج التي تم تقديرها عن طريق متابعتها بين الموجات الثلاثة ($Coiflet$, $Daubechies$, $Haar$) وبين المستويات حيث سيتم مناقشة هذا السلوك بين الموجات على اعتبار ان هذه النماذج مستقلة وكل عمود يمثل مجموع النماذج الكلية في كافة الحدود في اي مستوى موجي كما يلي:-

الجدول رقم (3):- نسب النماذج الموجية موزعة على اساس مجموع النماذج للدوال الموجية الثلاثة				
Coif	Daub	Haar	R^2	المستوى
%50	%50	%50	0.60 -	$2^0 = 1$
%30	%40	0	0.70 -	
%20	%10	%50	0.80 -	
%50	0.55	%50	0.60 -	$2^1 = 2$
305	%35	0	0.70 -	
%20	%10	%50	0.80 -	
%50	%55	%50	0.60 -	$2^2 = 4$
%30	%40	0	0.70 -	
%20	%5	%50	0.80 -	
%50	%45	0	0.60 -	$2^3 = 8$
%30	%50	%50	0.70 -	
%20	%5	%50	0.80 -	
%30	%25	0	0.60 -	$2^4 = 16$
%40	%65	%50	0.70 -	
%30	%10	%50	0.80 -	

2 ⁵ = 32	0.70 -	%50	%95	%70
	0.80 -	%50	%5	%30
2 ⁶ = 64	0.70 -	%50	%65	%50
	0.80 -	0	%30	%50
	0.90 -	%50	%5	0
2 ⁷ = 128	0.80 -	%100	%90	%100
	0.90 -	0	%10	0
2 ⁸ = 256	0.90 -	%100	%100	%100

وكذلك الجدول بصورة تجميعية (حيث تم حذف الصفوف التي تحوي اصفار لكافة الموجات) كما في التالي :-

الجدول رقم (4):- نسب النماذج الموجية موزعة على اساس المجموع العام للنماذج في كل مستوى موجي				
المستوى	R ²	Haar	Daub	Coif
2 ⁰ = 1	0.60 -	%3.1	%31.2	%15.6
	0.70 -	%0	%25	%9.4
	0.80 -	%3.1	%6.2	%6.2
2 ¹ = 2	0.60 -	%3.1	%34.4	%15.6
	0.70 -	%0	%21.8	%9.4
	0.80 -	%3.1	%6.2	%6.2
2 ² = 4	0.60 -	%3.1	%34.4	%15.6
	0.70 -	%0	%25	%9.4
	0.80 -	%3.1	%3.1	%6.2
2 ³ = 8	0.60 -	%0	%28.1	%15.6
	0.70 -	%3.1	%31.2	%9.4
	0.80 -	%3.1	%3.1	%6.2
2 ⁴ = 16	0.60 -	%0	%15.6	%9.4
	0.70 -	%3.1	%40.6	%12.5
	0.80 -	%3.1	%6.2	%9.4
2 ⁵ = 32	0.70 -	%3.1	%59.4	%21.8
	0.80 -	%3.1	%3.1	%9.4
2 ⁶ = 64	0.70 -	%3.1	%40.6	%15.6
	0.80 -	%0	%18.7	%15.6
	0.90 -	%3.1	%3.1	%0
2 ⁷ = 128	0.80 -	%6.2	%56.2	%31.2
	0.90 -	%0	%6.2	%0
2 ⁸ = 256	0.90 -	%6.2	%62.5	%31.3

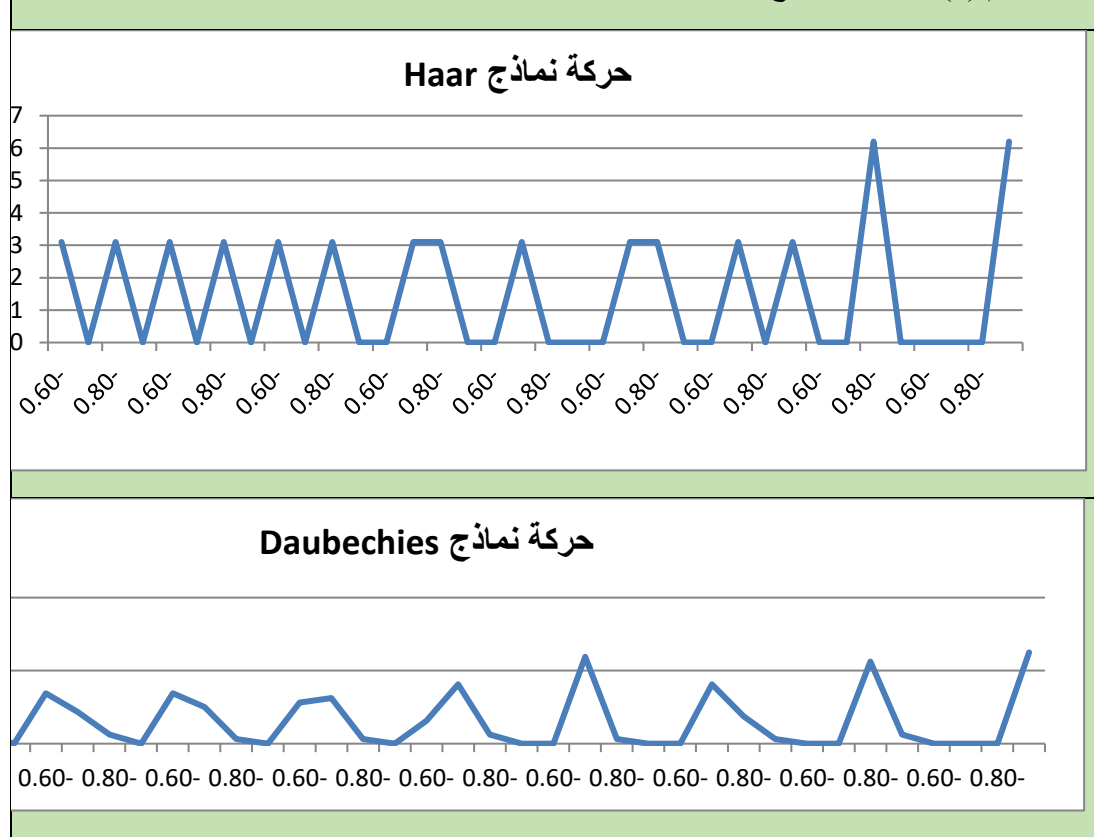
• عند النظر للجدولين (3 , 4) فان سلوك النماذج على اساس الموجات سيكون واضحا عندما يتم على اساس الحدود الخاصة بمعامل التحديد والمستويات الموجية فبالنسبة للموجة الاولى (**Haar**) فانها تتواجد في المستوى الاول (**2⁰ = 1**) في الحدود المتوسطة والجيدة جدا وبنسب (%50 , %50) على التوالي وعلى اساس المجموع العام للنماذج فهي (%3.1) لكلاهما من النماذج بصورة عامة وهذا الامر سيتكرر الى المستوى الثالث وبنفس النسب العامة لانه سيتغير قليلا في المستوى الرابع (**2³ = 8**) حيث ستتقل النماذج من الحدود المتوسطة الى الحدود الجيدة والجيدة جدا وبنفس النسب العامة (3.1) وستبقى مستقرة عندهما حتى المستوى السابع **2⁶ = 64** حيث سيتغير تواجد النماذج من الجيدة والجيدة جدا الى الجيدة والممتازة وبنفس النسب العامة (%3.1) مع ملاحظة انها اول موجبة انتقلت للحدود الممتازة (-0.90) وعند المستوى الثامن (**2⁷ = 128**) ستعود النماذج للتواجد فقط في الحدود الجيدة جدا متراجعة من الممتازة ومتقدمة على الجيدة وبنسبة (%100) ونسبة عامة (%6.2) اما عند المستوى التاسع والآخر (**2⁸ = 256**) فانها ستستقر عند الحدود الممتازة وبنسبة 100 % ونسبة (%6.2) من النماذج العامة .

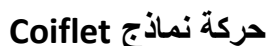
• اما بخصوص نماذج (**Daubechies**) فانها في المستوى الاول والثاني والثالث والرابع والخامس (**2⁰ = 1**), (**2¹ = 2**), (**2² = 4**), (**2³ = 8**), (**2⁴ = 16**) ستتواجد عند الحدود الثلاثة الاولى (المتوسطة والجيدة والجيدة جدا) و بنسب مختلفة جدا (يمكن ملاحظتها في الجدولين بوضوح) وعند المستوى السادس (**2⁵ = 32**) فان التغير سيبدأ حيث ستغادر النماذج نهائيا الحدود المتوسطة وتبقى عند الجيد والجيدة جدا (%59.4 , %3.1) , (%95 , %5) ويلاحظ تفوق الحدود الجيدة الصريح جدا وعند المستوى السابع **2⁶ = 64** فان النماذج تبدأ بالانتقال تدريجيا الى الحدود الممتازة وتبدأ بمغادرة تدريجية للحدود الجيدة وبنسب التالية للحدود الجيدة والجيدة جدا والممتازة وعلى التوالي (%40.6 , %18.7 , %3.1) , (%65 , %30 , %5) ويمكن ملاحظة ان نسبة النماذج في الحدود الجيدة قد بدأت بالتناقص , وعند المستوى الثامن (**2⁷ = 128**) فان

النماذج قد غادرت نهائيا الحدود الجيدة لتستقر في الحدود الجيدة جدا والممتازة وبالنسب (56.3% , 5.2%) للمجموع العام للنماذج وبالنسب (90% , 10%) لنماذج الموجة نفسها ويمكن ملاحظة انها تتركز عند الحدود الجيدة بصورة كبيرة , وعند المستوى التاسع $2^8 = 256$ فانها وكما في الموجة التي سبقتها ستتركز عند الحدود الممتازة فقط وبالنسب (62.5%) للنماذج العامة و(100%) لنماذج الموجة نفسها .

- اما بخصوص نماذج (Coiflet) فانها في المستوى الاول والى الرابع ($2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 8$, $2^3 = 8,4$) ستتواجد عند الحدود الثلاثة الاولى (المتوسطة والجيدة والجيدة جدا) وبنفس النسب دائما (50% , 30% , 20%) بالنسبة لنماذج الموجة و (15.6% , 9.4% , 6.2%) على اساس مجموع النماذج , وعند المستوى الخامس $2^4 = 16$ فان النماذج ستبقى في نفس الحدود ولكن بتغيير بالنسب حيث كانت نسب الأنموذج الموجي (30% , 40% , 30%) و (9.4% , 12.5% , 9.4%) بالنسبة للمجموع العام , اما عند المستوى السادس $2^5 = 32$ فان النماذج قد غادرت نهائيا الحدود المتوسطة لتستقر فقط في الحدود الجيدة والجيدة جدا وبالنسب (70% , 30%) لنماذج الموجة و (21.8% , 9.4%) للنماذج العامة , وعند المستوى السابع $2^6 = 64$ فالنماذج قد بقيت عند الحدود الجيدة والجيدة جدا ولكنها بدأت بالانتقال بصورة اكبر الى الحدود الجيدة جدا حيث كانت النسب (50%) من نماذج الموجة لكلاهما والنسب (15.6%) من النماذج العامة لكلاهما ايضا , وعند المستوى الثامن $2^7 = 128$ فان النماذج قد غادرت نهائيا الحدود الجيدة لتستقر تماما عند الحدود الجيدة جدا ولكنها لم تصل الى الحدود الممتازة على عكس الموجتين السابقتين وبالنسبة (100%) من نماذج الموجة و (31.2%) من النماذج العامة , وعند المستوى التاسع والآخر $2^8 = 256$ فان نماذج الموجة قد انتقلت باكملها الى الحدود الجيدة وبنفس النسب السابقة (31.2%) و (100%) , ويمكن توضيح حركة هذه النماذج بالاشكال التالية :-

الشكل رقم (2) :- حركة النماذج بالنسبة للمستويات الموجية على اساس معيار معامل التحديد





3

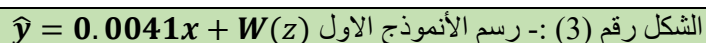
وكما تم اختيار النماذج الأفضل في التقدير السابق فان تحديد الشرط سيكون باختيار النماذج التي تملك معامل تحديد مساوي 0.80 او اكبر وهي بعدد 106 أنموذجا يمكن تحديد الأفضل منها حسب المستويات المويجية وسنكتفي بمعيار معامل التحديد وكما يلي :-

•

عند هذا المستوى كان عدد النماذج الجيدة قليلا فلم يتجاوز خمسة نماذج فقط عند التحويل المتقطع مع ملاحظة ان جميعها تملك المعلمة الموجبة وتعني ان المتغير المعلمي في الأنموذج هي درجة الحرارة (X) وهي كما يلي :-

الجدول رقم (5): النماذج الأفضل في التحويل المتقطع للمستوى الأول $2^0 = 1$						
ت	معادلة الأنموذج	AIC	BIC	الموجبة	Beta	R^2
1	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.011	6.252	Dau2	0.0041	0.854
2	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.011	6.251	Haar	0.0041	0.854
3	$\hat{y} = 0.0056x + W(z)$	2.019	6.259	Dau6	0.0056	0.822
4	$\hat{y} = 0.0036x + W(z)$	2.016	6.256	Coi1	0.0036	0.815
5	$\hat{y} = 0.0051x + W(z)$	2.018	6.258	Coi2	0.0051	0.814

ويمكن توضيح شكل هذه النماذج باختيار الأنموذج الأول منها لكونها جميعا ضمن النماذج الجيدة جدا كالتالى:-



●

عند هذا المستوى كان عدد النماذج التي حققت الشرطين في التحويل المتقطع هي خمسة ذات المعلمة الموجبة وكما في الجدول التالي مع ملاحظة مدى الشبه بينها وبين المستوى الاول :-

الجدول رقم (6): النماذج الافضل في التحويل المتقطع للمستوى الثاني $2^1 = 2$

ت	معادلة الأنموذج	AIC	BIC	الموجة	Beta	R ²
1	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.011	6.252	Dau2	0.0041	0.859
2	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.011	6.251	Haar	0.0041	0.859
3	$\hat{y} = 0.0056x + W(z)$	2.019	6.259	Dau6	0.0056	0.811
4	$\hat{y} = 0.0036x + W(z)$	2.016	6.256	Coi1	0.0036	0.804
5	$\hat{y} = 0.0051x + W(z)$	2.018	6.258	Coi2	0.0051	0.801

وتقريباً سيكون شكل الأنموذج الافضل منه مشابها لرسم الأنموذج الافضل من المستوى الاول.

• النماذج الافضل عند المستوى الثالث $2^2 = 4$

عند هذا المستوى كان عدد النماذج التي حققت الشرطين هي اربعة وذات المعلمة الموجبة وكما في الجدول التالي:-

الجدول رقم (7): النماذج الافضل في التحويل المتقطع للمستوى الثالث $2^2 = 4$						
ت	معادلة الأنموذج	AIC	BIC	الموجة	Beta	R ²
1	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.019	6.259	Dau2	0.0041	0.816
2	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.018	6.259	Haar	0.0041	0.815
3	$\hat{y} = 0.0036x + W(z)$	2.016	6.256	Coi1	0.0036	0.805
4	$\hat{y} = 0.0052x + W(z)$	2.018	6.258	Coi2	0.0052	0.803

وكذلك سيكون شكل الأنموذج الافضل منه مشابها لرسم الأنموذج الافضل من المستوى الاول

• النماذج الافضل عند المستوى الرابع $2^3 = 8$

كان عدد النماذج التي حققت الشرطين هي اربعة وذات المعلمة الموجبة وكما في الجدول التالي:-

الجدول رقم (8): النماذج الافضل للمستوى الرابع $2^3 = 8$						
ت	معادلة الأنموذج	AIC	BIC	الموجة	Beta	R ²
1	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.019	6.259	Dau2	0.0041	0.82
2	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.018	6.259	Haar	0.0041	0.82
3	$\hat{y} = 0.0052x + W(z)$	2.018	6.258	Coi2	0.0052	0.802
4	$\hat{y} = 0.0036x + W(z)$	2.012	6.252	Coi5	0.0036	0.802

ويمكن ملاحظة ان المعلمة الموجبة 0.0041 قد تكررت كثيراً عند النماذج الافضل وكذلك سيكون شكله مشابها لرسم الأنموذج الافضل من المستوى الاول

• النماذج الافضل للمستوى الخامس $2^4 = 16$

وعلى نفس المنوال فان النماذج الافضل قد احتوت على المعلمة الموجبة 0.0041 وكذلك المويجتين *Haar* و *Daubechies2* كما في الجدول التالي :-

الجدول رقم (9): النماذج الافضل للمستوى الخامس $2^4 = 16$						
ت	معادلة النموذج	AIC	BIC	الموجة	Beta	R^2
1	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.011	6.249	Dau2	0.0041	0.849
2	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.011	6.249	Haar	0.0041	0.848
3	$\hat{y} = 0.0056x + W(z)$	2.018	6.257	Dau6	0.0056	0.817
4	$\hat{y} = 0.0051x + W(z)$	2.018	6.256	Coi2	0.0051	0.81
5	$\hat{y} = 0.0045x + W(z)$	2.021	6.259	Coi1	0.0045	0.808
6	$\hat{y} = 0.0036x + W(z)$	2.012	6.250	Coi5	0.0036	0.807

ورسم الأنموذج الافضل سيكون بنفس المعطيات السابقة .

• النماذج الافضل للمستوى السادس $2^5 = 32$

هنا ايضا استمرت السلسلة من (Daubechies2 , Haar , Coiflet 2, Coiflet5 , Coiflet1) والمعالم الموجبة (0.004 , 0.0052 , 0.0036 , 0.0045) بالظهور في سلسلة النماذج الافضل كما في الجدول التالي :-

الجدول رقم (10): النماذج الافضل للمستوى السادس $2^5 = 32$						
ت	الأنموذج معادلة	AIC	BIC	الموجة	Beta	R^2
1	$\hat{y} = 0.004x + W(z)$	2.018	6.258	Dau2	0.004	0.828
2	$\hat{y} = 0.004x + W(z)$	2.018	6.258	Haar	0.004	0.828
3	$\hat{y} = 0.0052x + W(z)$	2.018	6.259	Coi2	0.0052	0.827
4	$\hat{y} = 0.0036x + W(z)$	2.012	6.252	Coi5	0.0036	0.821
5	$\hat{y} = 0.0045x + W(z)$	2.021	6.261	Coi1	0.0045	0.818

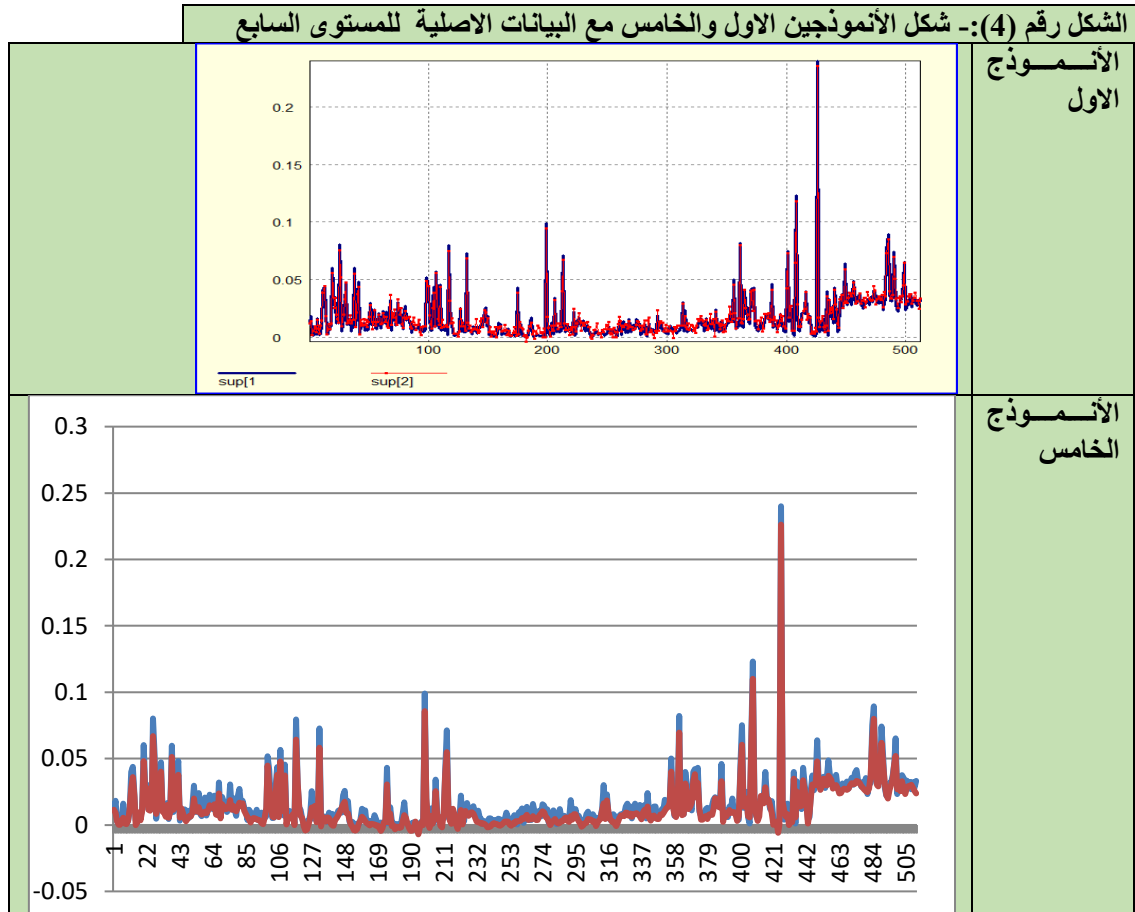
النماذج الافضل للمستوى السابع $2^6 = 64$

سجل هذا المستوى ظهور اول أنموذج يحوي المعلمة السالبة (متغير سرعة الريح هو المتغير المعلمي) ضمن النماذج الافضل والتي بعدد 13 أنموذج وبداية ظهور النماذج الممتازة وبقاء الموجتين Daubechies2 و Haar ضمن النماذج الافضل ولكن بمعلمات مختلفة و حسب الجدول التالي :-

الجدول رقم (11): النماذج الافضل في المستوى السابع $2^6 = 64$						
ت	معادلة الأنموذج	AIC	BIC	الموجة	Beta	R^2
1	$\hat{y} = 0.009x + W(z)$	2.007	6.247	Dau2	0.009	0.909
2	$\hat{y} = 0.009x + W(z)$	2.007	6.247	Haar	0.009	0.908
3	$\hat{y} = 0.005x + W(z)$	2.012	6.252	Dau12	0.005	0.859
4	$\hat{y} = 0.0034x + W(z)$	2.01	6.25	Coi3	0.0034	0.851
5	$\hat{y} = -0.0007z + W(x)$	2.014	6.254	Dau12	-0.0007	0.849
6	$\hat{y} = 0.0058x + W(z)$	2.013	6.253	Dau20	0.0058	0.848
7	$\hat{y} = 0.0045x + W(z)$	2.018	6.259	Coi1	0.0045	0.845
8	$\hat{y} = 0.0054x + W(z)$	2.02	6.26	Coi2	0.0054	0.844
9	$\hat{y} = 0.0036x + W(z)$	2.012	6.252	Coi5	0.0036	0.836
10	$\hat{y} = 0.0052x + W(z)$	2.022	6.262	Coi4	0.0052	0.832

0.815	0.0047	Dau6	6.266	2.025	$\hat{y} = 0.0047x + W(z)$	1
						1
0.812	0.0039	Dau10	6.26	2.02	$\hat{y} = 0.0039x + W(z)$	1
						2
0.809	0.0037	Dau4	6.265	2.025	$\hat{y} = 0.0037x + W(z)$	1
						3

ويمكن توضيح شكل الأنموذجين الاول والخامس بالصورة التالية :-

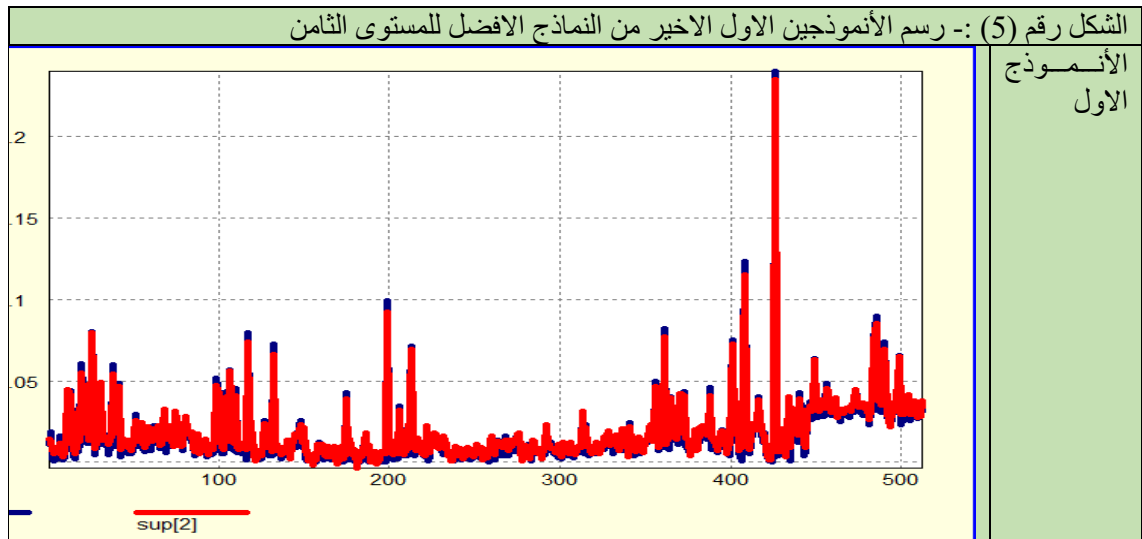


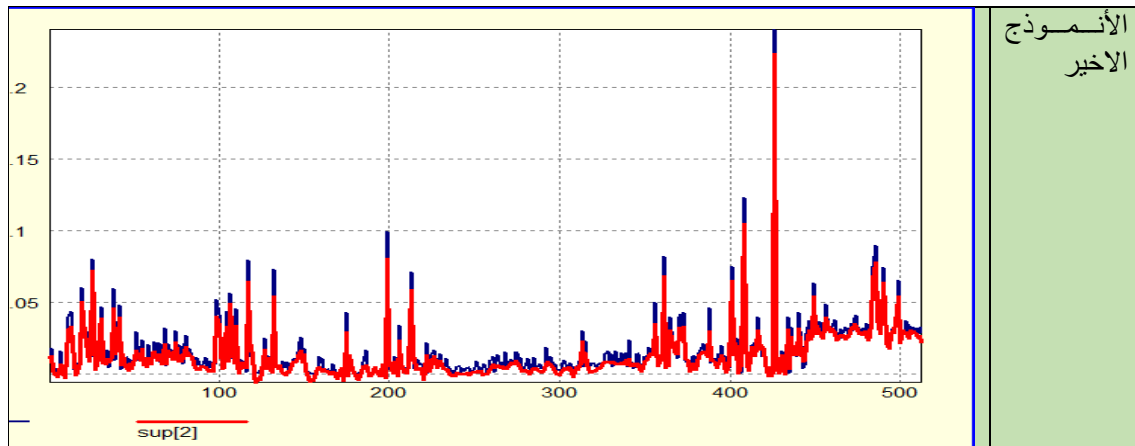
• النماذج الافضل للمستوى الثامن $2^7 = 128$

عند هذا المستوى اصبحت جميع النماذج تحقق الشرطين مع ضرورة ملاحظة ان المويجتين (*Daubechies2 , Haar*) قد تواجدت ضمن الاربعة الافضل وبنفس المعلمة الموجبة وان المويجتين (*Daubechies 12, 20*) اصبحت هي النماذج الاعلى والافضل وان كان معامل التحديد لهما متساوي فان المعلمة الموجبة المصاحبة لها متقاربة وهناك فرق بسيط في معامل اكيكي وشوارتز وحسب الجدول التالي :-

الجدول رقم (12): النماذج الافضل للمستوى الثامن $2^7 = 128$						
R^2	Beta	الموجة	BIC	AIC	معادلة النموذج	ت
0.901	0.0064	Dau20	6.248	2.008	$\hat{y} = 0.0064x + W(z)$	1
0.901	0.006	Dau12	6.251	2.011	$\hat{y} = 0.006x + W(z)$	2
0.898	0.0043	Dau2	6.253	2.012	$\hat{y} = 0.0043x + W(z)$	3
0.898	0.0043	Haar	6.252	2.012	$\hat{y} = 0.0043x + W(z)$	4
0.897	0.0062	Dau6	6.256	2.016	$\hat{y} = 0.0062x + W(z)$	5
0.896	0.005	Coi1	6.258	2.018	$\hat{y} = 0.005x + W(z)$	6
0.889	0.0035	Coi3	6.251	2.01	$\hat{y} = 0.0035x + W(z)$	7
0.889	0.0052	Coi2	6.258	2.018	$\hat{y} = 0.0052x + W(z)$	8
0.882	0.005	Coi4	6.259	2.019	$\hat{y} = 0.005x + W(z)$	9
0.879	0.0039	Coi5	6.254	2.014	$\hat{y} = 0.0039x + W(z)$	10
0.879	0.0032	Dau4	6.254	2.014	$\hat{y} = 0.0032x + W(z)$	11
0.866	0.005	Dau18	6.256	2.016	$\hat{y} = 0.005x + W(z)$	12
0.862	0.0037	Dau14	6.257	2.017	$\hat{y} = 0.0037x + W(z)$	13
0.862	-0.0006	Coi1	6.253	2.013	$\hat{y} = -0.0006z + W(x)$	14
0.86	0.0035	Dau10	6.258	2.018	$\hat{y} = 0.0035x + W(z)$	15
0.858	-0.0005	Dau4	6.254	2.013	$\hat{y} = -0.0005z + W(x)$	16
0.857	-0.0005	Dau6	6.254	2.013	$\hat{y} = -0.0005z + W(x)$	17
0.856	0.0034	Dau16	6.256	2.016	$\hat{y} = 0.0034x + W(z)$	18
0.856	0.0025	Dau8	6.258	2.017	$\hat{y} = 0.0025x + W(z)$	19
0.855	-0.0005	Dau8	6.253	2.012	$\hat{y} = -0.0005z + W(x)$	20
0.853	-0.0007	Coi3	6.254	2.014	$\hat{y} = -0.0007z + W(x)$	21
0.849	-0.0007	Dau12	6.254	2.014	$\hat{y} = -0.0007z + W(x)$	22
0.848	-0.0008	Coi2	6.256	2.016	$\hat{y} = -0.0008z + W(x)$	23
0.848	-0.0007	Coi5	6.255	2.015	$\hat{y} = -0.0007z + W(x)$	24
0.848	-0.0006	Dau10	6.254	2.013	$\hat{y} = -0.0006z + W(x)$	25
0.848	-0.0008	Coi4	6.256	2.016	$\hat{y} = -0.0008z + W(x)$	26
0.845	-0.0005	Dau2	6.259	2.018	$\hat{y} = -0.0005z + W(x)$	27
0.844	-0.0005	Haar	6.258	2.018	$\hat{y} = -0.0005z + W(x)$	28
0.843	-0.0005	Dau18	6.253	2.013	$\hat{y} = -0.0005z + W(x)$	29
0.841	-0.0006	Dau16	6.254	2.014	$\hat{y} = -0.0006z + W(x)$	30
0.834	-0.0007	Dau14	6.258	2.017	$\hat{y} = -0.0007z + W(x)$	31
0.828	-0.0004	Dau20	6.255	2.015	$\hat{y} = -0.0004z + W(x)$	32

ويمكن توضيح الأنموذج الاول والاخير بالشكل التالي :-



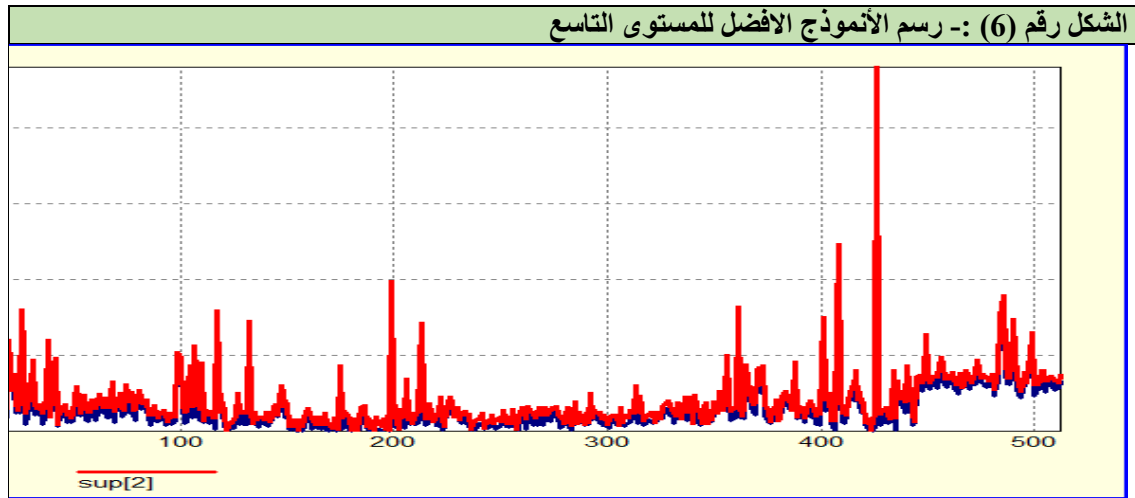


• النماذج الأفضل عند المستوى التاسع $2^8 = 256$

عند هذا المستوى فإن جميع النماذج تحقق الشرطين مع ضرورة ملاحظة عودة سلسلة نماذج الموجات $(Haar, Daubechies2, Coiflet2, 4, 1)$ كأفضل النماذج مثبتة في الجدول التالي :-

الجدول رقم (13) :- النماذج الأفضل للمستوى التاسع $2^8 = 256$						
ت	معادلة الأنموذج	AIC	BIC	الموجة	Beta	R^2
1	$\hat{y} = 0.00421x + W(z)$	2.012	6.252	Haar	0.0048	0.97
2	$\hat{y} = 0.00459x + W(z)$	2.012	6.253	Dau2	0.0048	0.97
3	$\hat{y} = 0.00425x + W(z)$	2.008	6.248	Coif2	0.0058	0.969
4	$\hat{y} = 0.00418x + W(z)$	2.008	6.248	Coif4	0.0054	0.968
5	$\hat{y} = 0.00313x + W(z)$	2.01	6.25	Coif1	0.0053	0.967
6	$\hat{y} = 0.00313x + W(z)$	2.007	6.247	Dau12	0.0063	0.964
7	$\hat{y} = 0.0041x + W(z)$	2.009	6.249	Coif5	0.0045	0.963
8	$\hat{y} = 0.00352x + W(z)$	2.006	6.246	Dau6	0.004	0.959
9	$\hat{y} = 0.00362x + W(z)$	2.014	6.254	Dau18	0.0044	0.958
10	$\hat{y} = 0.00394x + W(z)$	2.007	6.247	Dau20	0.006	0.957
11	$\hat{y} = 0.00335x + W(z)$	2.005	6.245	Dau8	0.0032	0.955
12	$\hat{y} = 0.00357x + W(z)$	2.009	6.249	Dau16	0.0037	0.953
13	$\hat{y} = 0.00354x + W(z)$	2.014	6.254	Coif4	-0.0008	0.953
14	$\hat{y} = 0.00313x + W(z)$	2.008	6.248	Dau2	-0.0005	0.952
15	$\hat{y} = 0.00323x + W(z)$	2.007	6.247	Coif1	-0.0008	0.951
16	$\hat{y} = 0.00355x + W(z)$	2.014	6.255	Dau14	0.0037	0.951
17	$\hat{y} = 0.00262x + W(z)$	2.01	6.25	Coif2	-0.0008	0.951
18	$\hat{y} = 0.0025x + W(z)$	2.007	6.248	Haar	-0.0005	0.951
19	$\hat{y} = 0.00242x + W(z)$	2.01	6.25	Coif3	-0.0008	0.951
20	$\hat{y} = 0.0026x + W(z)$	2.011	6.251	Coif5	-0.0008	0.95
21	$\hat{y} = 0.00221x + W(z)$	2.014	6.255	Dau8	-0.0005	0.95
22	$\hat{y} = 0.00233x + W(z)$	2.01	6.25	Dau4	-0.0005	0.948
23	$\hat{y} = 0.0022x + W(z)$	2.011	6.251	Coif3	0.0034	0.947
24	$\hat{y} = 0.00236x + W(z)$	2.01	6.25	Dau6	-0.0005	0.946
25	$\hat{y} = 0.00237x + W(z)$	2.008	6.248	Dau10	0.0034	0.945
26	$\hat{y} = 0.00211x + W(z)$	2.009	6.249	Dau10	-0.0006	0.945
27	$\hat{y} = 0.00215x + W(z)$	2.01	6.251	Dau12	-0.0007	0.942
28	$\hat{y} = 0.00181x + W(z)$	2.01	6.251	Dau16	-0.0006	0.938
29	$\hat{y} = 0.00181x + W(z)$	2.009	6.249	Dau18	-0.0005	0.938
30	$\hat{y} = 0.0023x + W(z)$	2.01	6.25	Dau14	-0.0007	0.935
31	$\hat{y} = 0.00187x + W(z)$	2.013	6.253	Dau20	-0.0004	0.927
32	$\hat{y} = 0.00222x + W(z)$	2.011	6.251	Dau4	0.0026	0.922

اما رسم الأنموذج الافضل فهو بالشكل التالي :-



الاستنتاجات

ان هذا الاستنتاج يتطلب شرحا تفصيليا للوصول خطوة بعد خطوة اليه وكما سيأتي:-

1. ان معادلة الانحدار التقليدية تكون بالشكل المعروف علميا $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_k X_k + e$ ويمكن اعطاء مفهوم اخر لها عن طريق شرح وظيفة المتغيرات التوضيحية حيث انها هنا ستكون بوظيفة تكوين لمتغير الاستجابة وبمساهمات مختلفة حسب الوزن او المعلمة المصاحبة لها وفي نفس الوقت تقوم بوظيفة تكوين لمقدر متغير الاستجابة حيث انها تساهم مساهمة مباشرة في تقدير معالم الأنموذج تارة كما في صيغة التقدير التقليدية

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

والتي ستستخدم لتكوين مقدر متغير الاستجابة كما في معادلة الانحدار التقديرية التقليدية

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$$

ويمكنها ايضا تقدير متغير الاستجابة مباشرة بصيغة اخرى وهي

$$\hat{y} = (X(X^T X)^{-1} X^T) Y$$

مما يمكن اختصاره بوجود وظيفتين رئيسيتين للمتغيرات المعلمية التوضيحية الاولى هي المساهمة في تكوين متغير الاستجابة او بعبارة اخرى تكوين خط الانحدار الرئيس والثانية هي المساهمة في تكوين مقدر متغير الاستجابة او بمعنى اخر المنحنى التقديري للأنموذج .

2. عند النماذج اللامعلمية فان الصيغة العامة لها هو $Y = m(X) + e$

وهذا يعني ان المتغيرات التوضيحية ذات السلوك اللامعلمي ستبقى بوظيفة تكوين متغير الاستجابة , وعند اللجوء لاي اسلوب لبي في تقدير هذا الأنموذج كما في صيغ ناداريا واتسون او المقدر اللبي فان المتغيرات التوضيحية ستبقى مساهمة في تقدير متغير الاستجابة المقدر كما في المعادلة التقديرية : $\hat{y} = \hat{m}(x)$

مما يعني بقاء الوظيفتين معا كما في الحالة الاولى ولكن عند ملاحظة خوارزمية التقدير المويجي اللامعلمي (الخوارزمية 1) فاننا سنستنتج على الفور بالغاء دور المتغير اللامعلمي التوضيحي في تقدير متغير الاستجابة وبصورة نهائية , أذ أن عملية التقدير المويجي وبصورة واضحة ستعتمد على متغير الاستجابة فقط كمساهم رئيسي ووحيد في تقدير نفسه واستبعاد نهائي للمتغير اللامعلمي التوضيحي . ومما تقدم يمكن صياغة الاستنتاج النهائي وهو (ان الاسلوب المويجي يحو تماما اي اثر للمتغيرات ذات السلوك اللامعلمي) .

المصادر

1. الشاروط ، محمد حبيب كاظم (2006) ، "تحليل الموجة الصغيرة Wavelet لتقدير منحني الانحدار اللامعلمي" ، اطروحة دكتوراه ، كلية الادارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .
2. طراد ، علاء جابر ، (2014)، " نماذج الانحدار المعلمي وشبه المعلمي (دراسة مقارنة)" ، رسالة ماجستير ، كلية الادارة والاقتصاد / الجامعة المستنصرية.
3. Daubechies .I," Ten Lectures on WAVElets", (1999) , SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS.
4. David F. Walnut , "An Introduction to Wavelet Analysis" (2004) , Springer Science+Business Media, LLC
5. Hardle, W " Applied Nonparametric Regression"(1990). Cambridge University Press. Cambridge
6. Hardle,W & Kerkyacharian.G , Picard.D & John.N
"Wavelets, Approximation and Statistical Applications"(1997)
Springer
7. Hubbard. B.B , " The World According to Wavelets" (1996) , A K Peters Wellesley, Massachusetts
8. Irène Gannaz , "Robust estimation and wavelet thresholding in partially linear models"(2007) Springer Science+Business Media ,17,293-310
9. Leming Qu , " Wavelet thresholding in partially linear models: a computation and simulation"(2003) , Appl. Stochastic Models Bus. Ind ,19,221-230
10. R.Todd Ogden , "Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis" (1997) , Birkhauser ,
11. Van Fleet .P & David.k.r , "Wavelet Theory : An Elementary Approach With Applications"(2009) , John Wiley & Sons
12. Van Fleet .P "DISCRETE WAVELET TRANSFORMATIONS : An Elementary Approach with Applications"(2008) , John Wiley & Sons, Inc
13. Yves Meyer, "Wavelet : Algorithms and Application" 1993, Society for Industrial and Applied Mathematics
14. Chang, X. and Qu, L. (2004). "Wavelet estimation of partially linear models".Comput. Statist. Data Anal., 47 31–48.
15. Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Kerkyacharian, G., and Picard, "Wavelet Shrinkage: Asymptotop"(1995) , Wiley for the Royal Statistical Society , Vol: 57 , 2(301-369)
16. Donoho, D. L. and Johnstone, "Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage"(1995) , American Statistical Association , Vol :90 , 423(P1200-1224).
17. Donoho, D. L. and Johnstone, I. M. (1994b) Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, Biometrika, 81, 425–455.
18. Grossman, A. and Morlet, J. , (1984), "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shap", SIAM. J. Math., 15 , 723 – 736.
19. HERRICK.D.R , G.P. NASON , B.W. SILVERMAN , "SOME NEW METHODS FOR WAVELET DENSITY ESTIMATION", 2001, The Indian Journal of Statistics ,vol: 63
20. Kevin R. Wheeler , Atam P. Dhawan," Basis Selection For Wavelet Regression" 1998 , 11th International Conference on Neural Information Processing Systems

21. Kovac, A. , Silverman, W. B. , (2000), “Extending The Scope of Wavelet Regression Methods by Coefficient-Dependent Thresholding”, Journal of the American Statistical Association, 95, 172-183 .
22. NASON.G.P , “Choice of wavelet smoothness” (2002), Statistics and Computing , 12(219-227) .