

مقدر بيز لدالة بقاء توزيع ويبيل لبيانات أوقات بقاء مرضى الفشل الكلوي الضبابية

أ.د. افتخار عبد الحميد النقاش*

سها جعفر عبد الصاحب**

المستخلص

تم في هذا البحث إيجاد مقدر بيز لدالة بقاء توزيع ويبيل عندما تكون بيانات أوقات البقاء ضبابية، إذ تم استخدام تقريب Lindley's للحصول على مقدر بيز وذلك لصعوبة إيجاد مقدر دالة بقاء توزيع ويبيل لاحتوائها على معلمتين، وبالاكتفاء على الاشتقاق الرياضي لمقدر بيز الذي توصلنا إليه تم تطبيق بيانات أوقات البقاء الضبابية لمرضى الفشل الكلوي .

الكلمات المفتاحية : دالة العضوية، الإعداد الضبابية، المتجه الضبابي، طريقة بيز .

The Pease Estimator for Weibel Distribution Survival Function for the data of survival times of patients with blurred renal failure

Abstract

In this research, we found the Weibel distribution function of the Weibull distribution function when the time-of-stay data is blurry. Data on blurry survival times for renal failure patients.

Keywords: organic function, blur setting, blur vector, biz method.

المقدمة

تعد دوال البقاء من أشهر أنواع الدوال الإحصائية التي تستخدم بشكل واسع لتقدير احتمال البقاء على قيد الحياة للأشخاص الذين يعانون من الأمراض الخطيرة اعتماداً على عينة بيانات البقاء للمرضى المصابين بذلك المرض، إذ من المعروف أن هذه البيانات تعاني من عدم الدقة ونقص في التسجيل يرجع إلى عدة أسباب تعود في الأساس إلى الأوضاع غير المستقرة في عموم البلدان النامية ومنها العراق مما جعل استخدام هذه البيانات محدود جداً، وعليه تبلورت فكرة البحث حول تقدير دالة البقاء الضبابية بناءً على بيانات البقاء غير المؤكدة (الضبابية) إذ تم في هذا البحث تقدير دالة البقاء الضبابية لحساب الاحتمال الضبابي لبقاء مريض الفشل الكلوي على قيد الحياة عند كل نسبة ضبابية يحددها الباحث في البيانات ($0 < \delta < 1$).

مشكلة البحث

تعد الكلى الفلتر الذي يمر عليه الدم ويقوم بتخليصه من السموم والمواد الزائدة عن احتياج الجسم، وإذا وصلت كفاءة الكلى إلى أقل من (10%) يحدث الفشل الكلوي، وعليه فإن الوظيفة التي فقدتها الكلى ينبغي تعويضها عن طريق الغسيل الكلوي الذي يعتبر العلاج الوحيد للفشل الكلوي باستثناء عملية زرع الكلى، هذا الأمر الذي أدى إلى أن العديد من مرضى الفشل الكلوي ينتظرون في طوابير غسل الكلى وقد تحدث الوفاة خلال فترة الانتظار في الطابور، فضلاً على أن تسجيل مدة بقاء مرضى الفشل الكلوي على قيد الحياة كغيرها من البيانات الطبية تعاني من الضبابية (عدم التأكد)، وعلى هذا الأساس تبلورت فكرة البحث في تقدير دالة البقاء عندما تكون بيانات أوقات البقاء ضبابية.

هدف البحث

يهدف البحث إلى تقدير دالة البقاء الضبابية لحساب الاحتمال الضبابي لبقاء المريض على قيد الحياة عند كل نسبة ضبابية يحددها الباحث في البيانات ($0 < \delta < 1$)، لحساب احتمال البقاء الضبابي لمرضى الفشل الكلوي لمساعدة الأطباء المختصين في تحديد مواعيد غسيل الكلى وفق الحالات الحرجة.

الجانب النظري

Introduction

1. المقدمة

تم في هذا البحث توضيح بعض المفاهيم الأساسية، إذ تم التطرق إلى مفهوم توزيع ويبيل وخصائصه، المراقبة العشوائية، بعض المفردات المستخدمة في علم المنطق الضبابي، ومن ثم إيجاد مقدر بيز لدالة البقاء لهذا التوزيع .

Random Censoring

2. المراقبة العشوائية [4,8]

تحدث عند تحديد وقت انتهاء الدراسة, وفي عملية المراقبة العشوائية يفترض أن يكون كل من Z_i, T_i متغيرات عشوائية مستمرة ومستقلة

إذ أن :

T_i : وقت البقاء المشاهد (حدوث الوفاة) للمفردة i .

Z_i : وقت المراقبة (عدم حدوث الوفاة) للمفردة i .

و أن لكل منها دالة بقاء $S(t)$, $G(t)$ على التوالي, ولهذا الغرض يتم ترتيب البيانات على هيئة أزواج مرتبة
 (t_i, l_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ إذ أن:

$$t_i = \min(T_i, Z_i)$$

l_i : متغير عشوائي ثنائي يأخذ القيم.

$$l_i = \begin{cases} 1 & \text{if } T_i \leq Z_i \\ 0 & \text{if } T_i > Z_i \end{cases}$$

وعليه يمكن كتابة دوال توزيع الأزواج المرتبة, إذا كانت Z_i موجودة لجميع المفردات كما مبين أدناه:

$$= g(t) \Pr(t_i = 0, l_i = 0) = \Pr(Z_i = 1, T_i > Z_i) \\ S(t)$$

$$\Pr(t_i = 1, l_i = 1) = \Pr(T_i = 1, T_i \leq Z_i) \\ = f(t) G(t)$$

$$\Pr(t_i = t, l_i) = [f(t)G(t)]^{l_i} [g(t)S(t)]^{1-l_i}$$

إذ أن :

$f(t)$: دالة الكثافة الاحتمالية إلى وقت البقاء المشاهد .

$G(t)$: دالة البقاء للمفردات المشاهدة .

$g(t)$: دالة الكثافة الاحتمالية لأوقات المراقبة .

$S(t)$: دالة البقاء للمفردات المراقبة .

على هذا الأساس ستكون دالة الإمكان الأعظم لتوزيع الأزواج المرتبة
 $(t_i, l_i), i = 1, 2, \dots, n$ كالآتي:

$$L(t_i, l_i) = \prod_{i=1}^n [f(t_i)G(t_i)]^{l_i} [g(t_i)S(t_i)]^{1-l_i} \quad \dots (1)$$

وبما أن T_i مستقلة عن Z_i إذن يمكن كتابة دالة الإمكان الأعظم أعلاه كالآتي :

$$L(t_i, l_i) = \prod_{i=1}^n f(t_i)^{l_i} S(t_i)^{1-l_i} \quad \dots (2)$$

Weibull Distribution اقترح الباحثان

3. توزيع ويبيل [6,7]

(Fisher & Tippet) في عام 1928 دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل بمعلمتين بالشكل الآتي:

$$f(t|\lambda, \beta) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\beta\right], \quad I(0, \infty)^t, \lambda > 0, \beta > 0 \quad \dots (3)$$

إذ أن :

λ : تمثل معلمة القياس Scale Parameter .

β : تمثل معلمة الشكل Shape Parameter .

وقد اثبت هذا التوزيع بأنه الأكثر ملائمة ومتعدد الاستعمالات في وصف احتمال البقاء حيث انه من خلال تغيير قيمة معلمة الشكل β نستطيع نمذجة ويبيل لمجموعة واسعة من البيانات, لان كل قيمة لمعلمة الشكل نحصل على حالة خاصة من توزيع ويبيل.

— عندما ($\beta = 1$) نحصل على التوزيع الأسّي.

— عندما ($\beta = 2$) نحصل على توزيع رايلي.

— إذا كانت ($\beta = 3.25$) فان توزيع ويبيل يكون مقارباً إلى التوزيع الطبيعي.

— عند عدة قيم للمعلمة β توزيع ويبل يكون تقريبا التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي إضافة إلى انه بالإمكان معرفة اتجاه احتمال الخطورة (Hazard Rate) من خلال قيمة β , حيث إن احتمال الخطورة يكون متناقصا عندما تكون $(0 < \beta < 1)$, ويكون ثابتا عندما $(\beta=1)$, ويكون متزايدا عندما $(\beta > 1)$.
وان دالة التوزيع التجميعية (التراكمية) للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ويبل تكون وفق الصيغة الآتية :

$$F_T(t) = Pr(T \leq t) ; t \geq 0$$

$$F_T(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\lambda} \right)^\beta \right] \quad \dots (4)$$

أما دالة البقاء لتوزيع ويبل ودالة الخطورة تعرف بالصيغ الآتية على التوالي:

$$S_T(t) = 1 - F_T(t)$$

$$S_T(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\lambda} \right)^\beta \right] \quad \dots (5)$$

$$h_T(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$h_T(t) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{\beta-1} \quad \dots (6)$$

4. المجموعة الضبابية [3,13]

شاملة منتهية $X = \{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, عندها المجموعة الضبابية $\tilde{A}$ والتي تكون مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة تعرف بمجموعة الأزواج المرتبة $\tilde{A} = \{(x_i, m_{\tilde{A}}(x))\}, i = 1, 2, \dots, n$ إذ أن $m_{\tilde{A}}(x)$ هي قيمة درجة عضوية العنصر x_i في المجموعة الضبابية $\tilde{A}$, التي دالة عضويتها $m_{\tilde{A}}: x \rightarrow [0,1]$.

5. دالة العضوية [3,13]

Membership Function تعد دالة العضوية ($\mu(\cdot)$) الأساس لنظرية المجموعات الضبابية إذ إن أي عنصر من عناصر المجموعة الضبابية يتم تحديده من قبل دالة عضوية هذه المجموعة, وشرطها الأساس أن يكون مداها ما بين الصفر والواحد, ويعبر الصفر عن عدم انتماء x إلى المجموعة الضبابية, والواحد يعبر عن انتماء (x) بشكل تام إلى المجموعة الضبابية, وباقي القيم بين الصفر والواحد تعني إن (x) له انتماء جزئي في المجموعة الضبابية.
ومن الأنواع الأكثر استخداماً لدوال العضوية هي دالة العضوية المثلثية (Triangular Membership Function) التي يمكن تمثيلها بالصيغة الآتية [5,7,8,9,51]:

$$m_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0, & x \geq a_3 \end{cases} \quad \dots (7)$$

الدالة بثلاث معلمات هي

a_1 الحد الأدنى للمجموعة الضبابية, a_2 القيمة الوسطى للمجموعة الضبابية, a_3 الحد الأعلى للمجموعة الضبابية.
 $m_{\tilde{A}}(x)$ تمثل دالة عضوية المجموعة الضبابية $\tilde{A}$, وإن a_1, a_2, a_3 هي نقاط النهاية لشكل المثلث, a_2 تمثل العدد الضبابي, على أساس صيغة دالة العضوية نستطيع الحصول على مجموعة القطع- δ كالآتي:

$$[a_1^\delta, a_2^\delta] = [a_1 + (a_2 - a_1)\delta, a_3 - (a_3 - a_2)\delta], \quad \forall \delta \in (0,1] \quad \dots (8)$$

إذ أن :

a_1^δ : الحد الأدنى لمجموعة القطع- δ للمجموعة الضبابية $\tilde{A}$.

a_2^δ : الحد الأعلى لمجموعة القطع- δ للمجموعة الضبابية $\tilde{A}$.

δ - Level set

[3, 13]

6. مجموعة المستوى δ مجموعة العناصر التي لها درجة عضوية مساوية إلى قيمة القطع- δ فتعرف بمجموعة المستوى- δ وتعرف رياضياً كالآتي :

$$L(\tilde{A}) = \{x | m_{\tilde{A}}(x) = \delta\} \quad \dots (9)$$

7. الأعداد الضبابية [10,11]

ضبابي مع دالة عضوية ($\cdot$) m , فإن $\tilde{x}$ يكون عدد ضبابي إذا حققت دالة العضوية الشروط الآتية :

$$m: R \rightarrow [0,1] -$$

– لجميع قيم $m(.) \in (0,1]$ فان مجموعة القطع- δ تكون
 $R: m(x) \geq \delta$
 $C_\delta(\tilde{x}) = \{x \in$ مجموعة محددة للفترة المتداخلة
 $C_\delta(\tilde{x}) = \bigcup_{j=1}^{k_\delta} [a_{\delta,j}, b_{\delta,j}] \neq \emptyset$ وهذا يعني أن
 إذ أن:

k_δ : عدد الفترات الضبابية لمستوى القطع- δ .
 j : مؤشر الفترات الضبابية يأخذ القيم من $1, \dots, k_\delta$.
 $a_{\delta,j}$: الحد الأدنى للفترة الضبابية (j) عند مستوى القطع- δ .
 $b_{\delta,j}$: الحد الأعلى للفترة الضبابية (j) عند مستوى القطع- δ .

– مجموعة الدعم دالة العضوية $m(.)$ تكون محددة ,
 $\{x \in R; m(x) > 0\} \subseteq [a, b]$
 وعلى هذا الأساس فان
 المجموعة التي تكون جميع عناصرها أعداد ضبابية نرسم لها $Fu(R)$, أما إذا كانت جميع القطوع- δ للعدد
 الضبابي تمثل فترات محددة مغلقة وغير خالية فان العدد الضبابي يسمى فترة ضبابية ويرمز له $Fu_I(R)$.
8. المتجه الضبابي [10,11]
Fuzzy Vector المتجه الضبابي $\tilde{x}$ يحدد
 بمتجه دالة العضوية $m(., \dots, .)$ وهي دالة حقيقية لـ n من المتغيرات الحقيقية $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ إذا حققت
 دالة العضوية الشروط الآتية :

– $m: R^n \rightarrow [0,1]$
 – لكل $m \in (0,1]$ مجموعة القطع- δ .
 $C_\delta(\tilde{x}) = \{x \in R^n: m(x) \geq \delta\}$
 محددة مغلقة وغير خالية .
 هي مجموعة

– مجموعة الدعم لمتجه دالة العضوية $m(., \dots, .)$ تكون محددة .
 وعليه فان مجموعة المتجهات الضبابية نرسم لها $Fu(R)^n$, إذا كونت جميع القطوع- δ للمتجهات الضبابية ذات
 البعد- n مجموعات مزدوجة بسيطة متصلة عندها فان المتجه الضبابي ذي البعد- n يسمى فترة ضبابية ذات البعد- n
 (n-Dimensional Fuzzy Interval).

9. نظرية (1) [10,11]
 $R: R^n \rightarrow g$, دالة مستمرة و إن فترة ضبابية مستمرة وبعدها- n , حيث
 فان مجموعة القطع- δ للدالة ستكون:

$$C_\delta(g(\tilde{x})) = \left[\min_{x \in C_\delta(\tilde{x})} g(x), \max_{x \in C_\delta(\tilde{x})} g(x) \right]$$

إذ أن :

$$\min_{x \in C_\delta(\tilde{x})} g(x) : \text{الحد الأدنى للأعداد الضبابية عند مستوى القطع-}\delta .$$

$$\max_{x \in C_\delta(\tilde{x})} g(x) : \text{الحد الأعلى للأعداد الضبابية عند مستوى القطع-}\delta .$$

10. طريقة الإمكان الأعظم [5,9]
 الإحصائية التي تهدف إلى جعل دالة الإمكان للمتغيرات العشوائية في نهايتها العظمى

بافتراض أن
 $L(\theta; y_i) = \prod_{i=1}^n f(y_i, \theta)$
 المتغيرات العشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع (iid) , تتصف مقدرات الإمكان الأعظم بكونها مقدرات غير متحيزة
 لها أقل تباين (MVUE), وسنتطرق إلى طريقة الحصول على مقدرات الإمكان الأعظم لأوقات البقاء (t_i) بافتراض
 أنها تتبع توزيع ويبل بمعلمتين وفق دالة الكثافة الاحتمالية في المعادلة (3) وعليه فان دالة الإمكان الأعظم ستكون:

$$L(t_i, \lambda, \beta) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \lambda, \beta) \quad \dots (10)$$

إذ أن $t_1, < \dots, < t_n$ تمثل أوقات البقاء لعينة بحجم n , كما أن $t_1, < \dots, < t_r$ تمثل أوقات البقاء المشاهدة
 (حدوث حدث الوفاة) وإن $t_n - t_r = t_q$, $q = r + 1, \dots, n$ تمثل أوقات البقاء المراقبة (عدم حدوث حدث
 الوفاة) ولكن ليست نفسها لجميع المفردات , وتأسيساً على ذلك فإن دالة الإمكان الأعظم لتوزيع Weibull يمكن
 كتابتها كما مبين أدناه :

$$L(\lambda, \beta; t_i) = \prod_{i=1}^r f(t_i) \prod_{i=r+1}^n S(t_i) \quad \dots (11)$$

إذ أن :

$f(t_i)$: دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل لأوقات البقاء المشاهدة ($i = 1, 2, \dots, r$) .

$S(t_i)$: دالة البقاء لتوزيع و بيل لأوقات البقاء المراقبة $(i = r + 1, \dots, n)$.

وبالاعتماد على صيغة دالة المخاطرة (6) تكون دالة الإمكان الأعظم بالصيغة الآتية:

$$L(\lambda, \beta; t_i) = \prod_{i=1}^r h(t_i) S(t_i) \prod_{i=r+1}^n S(t_i) \quad \dots (12)$$

وبالتعويض عن دالة المخاطرة ودالة البقاء بما يساويها على وفق الصيغ (6), (5) نحصل على:

$$L(\lambda, \beta; t_i) = \prod_{i=1}^r \left[\frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^{\beta} \right] \right] \prod_{i=r+1}^n \left[\exp \left[- \left(\frac{t_i}{\lambda} \right)^{\beta} \right] \right] \quad \dots (13)$$

وبالاشتقاق الجزئي لدالة الإمكان الأعظم بالنسبة إلى معلمتي توزيع و بيل (λ, β) ومساواة المشتقة إلى الصفر نحصل على صيغ حساب مقدرات الإمكان الأعظم وفق الآتي:

$$\hat{\lambda} = \left[\frac{1}{r} (\sum_{i=1}^n (t_i)^{\beta}) \right]^{1/\beta} \quad \dots (14)$$

$$\frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}} \ln(t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln(t_i) \quad \dots (15)$$

وباستخدام طريقة نيوتن رافسون لحل المعادلة (15) نحصل على مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة β التي تعوض في المعادلة (14) للحصول على مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة λ .

وبتعويض مقدرات الإمكان الأعظم في صيغة دالة البقاء (5) نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لدالة البقاء وفق الآتي:

$$\hat{S}(t) = \exp - \left(\frac{t}{\hat{\lambda}} \right)^{\hat{\beta}} \quad \dots (16)$$

ولإيجاد الحدود الدنيا والعليا لمقدرات الإمكان الأعظم الاعتيادية لأوقات البقاء الضبابية عند مختلف قيم مستوى القطع- δ , أي سيكون لدينا حد أدنى وحد أعلى لكل مقدر عند كل مستوى قطع- δ وحسب الخوارزمية الآتية:

أ- نأخذ قيم مختلفة لـ δ بين الصفر والواحد للقطع- δ .

ب- نجد قطوعات المشاهدات الضبابية عند كل قيمة من قيم القطع- δ .

ج- تحسب مقدرات الإمكان الأعظم الاعتيادية من العينات غير الضبابية التي تمثل القيم عند كل قطع- δ .

د- تعد اقل قيمة وأعلى قيمة للمقدرات الاعتيادية التي تم حسابها في الخطوة السابقة معلمات نهايات دالة العضوية عند كل قطع- δ .

وعلى هذا الأساس وبالاعتماد على مقدرات الإمكان الأعظم الاعتيادية $\hat{\lambda}, \hat{\beta}$ في الصيغ (15), (14) على التوالي وحسب النظرية (1) تكون مجموعة القطع- δ لكل مقدر:

$$C_{\delta}(\tilde{\lambda}) = [\underline{\lambda}_{\delta}, \bar{\lambda}_{\delta}], \quad \forall \delta \in (0,1] \quad \dots (29)$$

إذ أن:

$$\underline{\lambda}_{\delta} = \left\{ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n t_{i,\delta}^{\beta_{\delta}} \right\}^{\frac{1}{\beta_{\delta}}}, \quad \forall \delta \in (0,1]$$

$$\bar{\lambda}_{\delta} = \left\{ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \bar{t}_{i,\delta}^{\bar{\beta}_{\delta}} \right\}^{\frac{1}{\bar{\beta}_{\delta}}}, \quad \forall \delta \in (0,1]$$

$$C_{\delta}(\tilde{\beta}) = [\underline{\beta}_{\delta}, \bar{\beta}_{\delta}], \quad \forall \delta \in (0,1] \quad \dots (30)$$

$$\underline{\beta}_{\delta} = \min_{t \in X_{i=1}^n C_{\delta}(\tilde{t}_i)} \hat{\beta}, \quad \forall \delta \in (0,1]$$

$$\bar{\beta}_{\delta} = \max_{t \in X_{i=1}^n C_{\delta}(\tilde{t}_i)} \hat{\beta}, \quad \forall \delta \in (0,1]$$

وعلى هذا الأساس تكون مجموعة القطع- δ لدالة البقاء الضبابية وفق الصيغة الآتية :

$$C_{\delta}[\tilde{S}(t)] = \left[\exp \left[- \left(\frac{t}{\underline{\lambda}_{\delta}} \right)^{\underline{\beta}_{\delta}} \right], \exp \left[- \left(\frac{t}{\bar{\lambda}_{\delta}} \right)^{\bar{\beta}_{\delta}} \right] \right], \quad \forall \delta \in (0,1] \quad \dots (31)$$

11. طريقة بيز [1,2,6] **Bayes Method** أن الإطار العام

لأسلوب بيز هو التعامل مع معلومات التوزيع كمتغيرات عشوائية تتبع توزيع معين يسمى التوزيع المسبق

(Prior Distribution) ومن ثم إيجاد التوزيع الاحتمالي اللاحق (posterior distribution) لمعاملات التوزيع طبقاً لنظرية بيز كالآتي:

$$\pi(\underline{\theta}|t) = \frac{u(\underline{\theta})L(t_i|\underline{\theta})}{\int_{\underline{\theta}} u(\underline{\theta})L(t_i|\underline{\theta})d\underline{\theta}} \quad \dots (32)$$

إذ أن:

$u(\underline{\theta})$: دالة الكثافة الاحتمالية المسبقة لمتجه المعلمات $\underline{\theta}$.

$\pi(\underline{\theta}|t)$: دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة لمتجه المعلمات $\underline{\theta}$.

$L(t_i|\underline{\theta})$: دالة الامكان لبيانات العينة.

$\int_{\underline{\theta}} u(\underline{\theta})L(t_i|\underline{\theta})d\underline{\theta}$: دالة التوزيع الحدية لمتجه المعلمات $\underline{\theta}$.

إذ أن مجال المعلمات لتوزيع ويبيل بمعلمتين هو مجال الأعداد الحقيقية الموجبة، فإن دالة الكثافة الاحتمالية المسبقة غير المعلوماتية التي اقترحها (Jeffrey) هي دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع اللوغاريتمي المنتظم والتي تتناسب مع معكوس حاصل ضرب المعلمتين كما مبين أدناه [6]:

$$u(\lambda, \beta) \propto \frac{1}{\lambda\beta}$$

$$u(\lambda, \beta) = \frac{k}{\lambda\beta} \quad \lambda > 0, \beta > 0 \quad \dots (33)$$

إذ أن k ثابت التناسب الذي يجعل دالة الكثافة الاحتمالية المسبقة طبيعية، وعلى هذا الأساس فإن دالة الكثافة الاحتمالية المسبقة لتوزيع ويبيل ستكون:

$$\pi(\lambda, \beta|t) = \frac{u(\lambda, \beta)L(t_i|\lambda, \beta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty u(\lambda, \beta)L(t_i|\lambda, \beta)d\lambda d\beta} \quad \dots (34)$$

وبالتعويض عن الدالة $u(\lambda, \beta)$ بما يساويها في الصيغة (33) وعن الدالة $L(t_i|\lambda, \beta)$ بالصيغة المذكورة في (13) سابقاً نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة لتوزيع ويبيل بمعلمتين كما مبين أدناه:

$$\pi(\lambda, \beta|t) = \frac{\frac{k}{\lambda\beta} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^r \prod_{i=1}^r \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta\right]}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{k}{\lambda\beta} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^r \prod_{i=1}^r \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta\right] d\lambda d\beta} \quad \dots (35)$$

وبافتراض دالة الخسارة التربيعية لمقدر دالة البقاء $(\hat{S}(t) - S(t))^2$ يمكن الحصول على مقدر بيز لدالة البقاء

الذي يجعل القيمة المتوقعة لدالة الخسارة (دالة المخاطرة) $E(\hat{S}(t) - S(t))^2$ أقل ما يمكن على وفق الصيغة الآتية:

$$E[S(t)|t] = \left[\exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\beta\right] \right] \Big|_t = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\beta\right] \frac{1}{\lambda\beta} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^r \prod_{i=1}^r \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta\right] d\lambda d\beta}{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\lambda\beta} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^r \prod_{i=1}^r \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\lambda}\right)^\beta\right] d\lambda d\beta} \quad \dots (36)$$

أن الصيغة أعلاه معقدة ويصعب إيجاد التكاملات لها فقد تم اعتماد تقريب لندلي [6]:

$$E[u(\lambda, \beta)] = \hat{S}_B(t) = u + \frac{1}{2}[u_{11} \cdot \sigma_{11} + u_{22} \cdot \sigma_{22}] + u_1 \cdot \rho_1 \cdot \sigma_{11} + u_2 \cdot \rho_2 \cdot \sigma_{22} + \frac{1}{2}[L_{30} \cdot u_1 \cdot \sigma_{11}^2 + L_{03} \cdot u_2 \cdot \sigma_{22}^2] \quad \dots (37)$$

إذ أن:

$\hat{S}_B(t)$: مقدر بيز لدالة البقاء.

$u = \exp\left[-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^\beta\right]$: مقدر الإمكان الأعظم لدالة بقاء توزيع ويبيل.

وعليه تكون قيم حدود الصيغة (37) كما مبين أدناه:

$$u_1 = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}} \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \exp \left[- \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \right]$$

$$u_{11} = - \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}^2}\right) \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \exp \left[- \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \right] - \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}}\right)^2 \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \exp \left[- \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \right] + \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}}\right)^2 \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{2\hat{\beta}} \exp \left[- \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \right]$$

$$u_{22} = u_2 = - \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \ln \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right) \exp \left[- \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \right]$$

$$\left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{2\hat{\beta}} \ln^2 \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right) \exp \left[- \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \right] - \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \ln^2 \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right) \exp \left[- \left(\frac{t}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \right]$$

$$\rho_1 = -\frac{1}{\hat{\lambda}}$$

$$L_{20} = r \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}^2}\right) - \rho_2 = -\frac{1}{\hat{\beta}}$$

$$\left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}}\right)^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} - \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}^2}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}$$

$$\sigma_{11} = (-L_{20})^{-1}$$

$$L_{30} = -2r \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}^3}\right) + 2 \left(\frac{\hat{\beta}^2}{\hat{\lambda}^3}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} + \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}}\right)^3 \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} +$$

$$2 \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{\lambda}^3}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}$$

$$L_{02} = + \left(\frac{\hat{\beta}^2}{\hat{\lambda}^3}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}$$

$$- \left(\frac{r}{\hat{\beta}^2}\right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \ln^2 \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)$$

$$\sigma_{22} = (-L_{02})^{-1}$$

$$L_{03} = 2 \frac{r}{\hat{\beta}^3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \ln^3 \left(\frac{t_i}{\hat{\lambda}}\right)$$

لإيجاد المقدرات الاعتيادية للحد الأدنى والحد الأعلى للأعداد الضبابية بالاعتماد على مجموعة القطع- δ , أي أن عند كل مستوى قطع- δ يكون لدينا مقدر إلى الحد الأدنى ومقدر إلى الحد الأعلى لقطوعات المشاهدات الضبابية وبالاعتماد على الخوارزمية المذكورة في طريقة الإمكان الأعظم, إذ تكون الفترة الضبابية إلى مقدر بيز لدالة البقاء على وفق الصيغة (37) و بالاعتماد على النظرية (1) نحصل على مقدر بيز لدالة البقاء الضبابية بالشكل الآتي [12]:

$$\underline{t} = C_{\delta} \left(\hat{S}_B(t) \right) = \left[\min_{\underline{t} \in x_{i=1}^n C_{\delta}(\tilde{t}_i)} \hat{S}_B(\underline{t}); \max_{\underline{t} \in x_{i=1}^n C_{\delta}(\tilde{t}_i)} \hat{S}_B(\underline{t}) \right] \quad \dots (40)$$

$$(t_1, t_2, \dots, t_n) \in [0; \infty)^n \quad \forall \delta \in (0; 1]$$

إذ أن :

$$\text{مقدر بيز لدالة البقاء عند مستوى القطع-} \delta \text{ لبيانات الحد الأدنى: } \min_{\underline{t} \in x_{i=1}^n C_{\delta}(\tilde{t}_i)} \hat{S}_B(\underline{t})$$

$$\text{مقدر بيز لدالة البقاء عند مستوى القطع-} \delta \text{ لبيانات الحد الأعلى: } \max_{\underline{t} \in x_{i=1}^n C_{\delta}(\tilde{t}_i)} \hat{S}_B(\underline{t})$$

الجانب التطبيقي

تم في هذا المبحث تقدير الحدود الدنيا والعليا إلى دالة البقاء الضبابية لمرضى الفشل الكلوي عند نسب الضبابية المدروسة (1,0.5,0), وقد تم الحصول على نتائج التطبيق العملي بالاعتماد على برنامج (MATLAB-R2017a).

1- فكرة عامة عن مرض الفشل الكلوي وطرق علاجه

تقوم الكليتان بدور مهم في جسم الإنسان وتعد من أهم الأعضاء فيه, والكلية على صغر حجمها (إذ لا تزيد على 12 سم طولاً و 6 سم عرضاً و 120 جرام وزناً) تقوم بتنقية دم الإنسان بصفة مستمرة, والكلية وظائف أخرى منها

المحافظة على معدل الضغط الشرياني، إفرازات هرمونية تنشط وتجدد العظام وتكاثر كريات الدم الحمراء، المحافظة على معدل حموضة الدم وتركيبته الدقيقة.

إن حدوث قصور في عمل الكلية ووظائفها يؤدي إلى الفشل الكلوي ويصل الفشل الكلوي إلى مراحله النهائية عندما تهبط وظائف الكلى إلى أقل من 10% من مستوى عملها الطبيعي، وهو من الحالات المنتشرة في جميع المجتمعات حيث يصيب جميع الفئات العمرية والكبار من السن أكثر عرضة له، وينقسم الفشل الكلوي إلى الأنواع الآتية:

– **الفشل الكلوي الحاد** **Acute Renal Failure**
هو التوقف المفاجئ لوظائف الكلى عن العمل مما يؤدي إلى ارتفاع في نسبة البوليوريا والكرياتينين بالدم، في هذا النوع يحتاج المصاب إلى الغسيل المؤقت وتعود الكلى إلى كامل كفاءتها عند زوال السبب.

– **الفشل الكلوي المزمن** **Chronic Renal Failure**
هو القصور الدائم لوظائف الكلى، وقد لا تبدأ الأعراض بالظهور إلا بعد أن تقل كفاءة الكليتين عن 25% من حجم وظيفتها، ولا تعود الكلى إلى وظيفتها حتى لو تم زوال السبب.

– **الفشل الكلوي النهائي** **The Final Renal Failure**
وهو عبارة عن قصور شديد مزمن في وظائف الكلى، أي تصبح الكلى غير قادرة على أداء مهامها بالتخلص من النفايات والماء الزائد من الجسم، وتعود هذه الوظائف عبر عملية غسيل الكلى أو في حال زراعة كلية جديدة. ويتم علاج مرض الفشل الكلوي بمختلف أنواعه بوحدة أو أكثر من طرق العلاج الآتية:

– **زراعة الكلى الاستباقية** **Kidney Transplant Proactively**
– **الغسيل الدموي** **Bloody Dialysis**
وهو أن يقوم الشخص بإجراء عملية تنقية الدم بواسطة جهاز الغسيل الدموي وتتم هذه العملية في مراكز الغسيل الدموي حوالي ثلاث مرات أسبوعياً.

– **الغسيل البريتوني** **Peritoneal Dialysis**
وهو أن يقوم الشخص بإجراء عملية تنقية الدم وذلك بوضع سوائل مخصصة لمثل هذا النوع من الغسيل داخل البطن.

2- بيانات البحث

تم جمع بيانات البقاء لثلاثة أشهر من تاريخ 1/10/2016 وإلى غاية التاريخ 31/12/2016 من المستشفيات التعليمية (بغداد، الكندي، الكرامة، الكاظمية)، إذ تم الحصول على بيانات (108) مريضاً يعانون من الفشل الكلوي بينهم (16) شخصاً توفي خلال المراقبة، إذ تم اعتماد قيم عامل الضبابية $(\bar{z} = [0, \infty), m_{\bar{z}})$ الذي يمثل عدد حقيقي مثلثي تم تحديد قيم الحد الأدنى والحد الأعلى له، إذ تكون القيمة الوسطية له $(z = 1)$ ، وتم افتراض قيم عامل الضبابية $(Z_{max} = 1.5, Z_{min} = 0.5)$ ، وعلى هذا الأساس سيكون لدينا (108) من دوال العضوية للأوقات الضبابية وبتطبيق الصيغة (8) عند كل نسبة ضبابية δ نحصل على قيم الحدود الدنيا والعليا لكل عدد ضبابي والنتائج التي حصلنا عليها موضحة في الجدول (1) أدناه:

جدول (1) بيانات أوقات البقاء الضبابية

التكرار	State	$\bar{t}_i$	$\bar{t}_i \delta = 0$	$\bar{t}_i \delta = 0$	$\bar{t}_i \delta = 0.5$	$\bar{t}_i \delta = 0.5$
1	م	1	0.5	1.5	0.75	1.25
2	ح	2	1	3	1.5	2.5
1	م	4	2	6	3	5
1	ح	4	2	6	3	5
1	ح	5	2.5	7.5	3.75	6.25
3	ح	6	3	9	4.5	7.5
1	ح	7	3.5	10.5	5.25	8.75
1	م	9	4.5	13.5	6.75	11.25
2	ح	9	4.5	13.5	6.75	11.25
1	ح	10	5	15	7.5	12.5
1	م	11	5.5	16.5	8.25	13.75
2	ح	11	5.5	16.5	8.25	13.75
1	ح	12	6	18	9	15
3	ح	13	6.5	19.5	9.75	16.25
2	م	15	7.5	22.5	11.25	18.75

2	ح	15	7.5	22.5		11.25	18.75
1	ح	16	8	24		12	20
2	م	17	8.5	25.5		12.75	21.25
2	ح	17	8.5	25.5		12.75	21.25
1	ح	18	9	27		13.5	22.5
2	ح	20	10	30		15	25
1	ح	21	10.5	31.5		15.75	26.25
1	م	22	11	33		16.5	27.5
1	م	23	11.5	34.5		17.25	28.75
3	ح	23	11.5	34.5		17.25	28.75
2	م	24	12	36		18	30
2	ح	24	12	36		18	30
1	ح	25	12.5	37.5		18.75	31.25
3	ح	26	13	39		19.5	32.5
1	م	27	13.5	40.5		20.25	33.75
3	ح	27	13.5	40.5		20.25	33.75

تابع لجدول (1)

التكرار	State	$\bar{t}_i$	$\bar{t}_i \delta = 0$	$\bar{t}_i \delta = 0$	$\bar{t}_i \delta = 0.5$	$\bar{t}_i \delta = 0.5$
1	ح	28	14	42	21	35
1	ح	30	15	45	22.5	37.5
1	ح	31	15.5	46.5	23.25	38.75
2	ح	33	16.5	49.5	24.75	41.25
2	ح	35	17.5	52.5	26.25	43.75
5	ح	38	19	57	28.5	47.5
1	ح	39	19.5	58.5	29.25	48.75
1	ح	46	23	69	34.5	57.5
4	ح	48	24	72	36	60
1	ح	49	24.5	73.5	36.75	61.25
1	ح	54	27	81	40.5	67.5
3	ح	56	28	84	42	70
2	ح	58	29	87	43.5	72.5
1	م	59	29.5	88.5	44.25	73.75
2	ح	60	30	90	45	75
2	م	63	31.5	94.5	47.25	78.75
2	ح	63	31.5	94.5	47.25	78.75
1	ح	67	33.5	100.5	50.25	83.75
1	ح	68	34	102	51	85
2	ح	69	34.5	103.5	51.75	86.25
1	ح	70	35	105	52.5	87.5
3	ح	72	36	108	54	90
2	ح	73	36.5	109.5	54.75	91.25
1	ح	75	37.5	112.5	56.25	93.75
1	ح	76	38	114	57	95
5	ح	81	40.5	121.5	60.75	101.25
1	ح	83	41.5	124.5	62.25	103.75
1	ح	85	42.5	127.5	63.75	106.25
3	ح	87	43.5	130.5	65.25	108.75
3	ح	89	44.5	133.5	66.75	111.25

3- اختبار حسن المطابقة لتوزيع البيانات

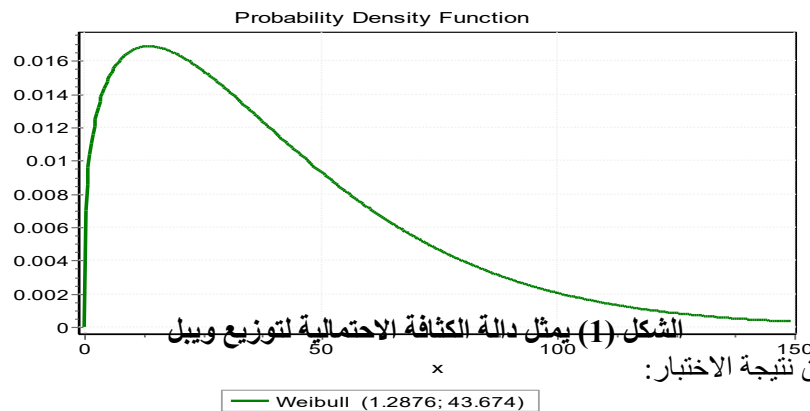
لغرض معرفة توزيع أوقات البقاء لمرضى الفشل الكلوي التي حصلنا عليها، تم إجراء اختبار حسن المطابقة (goodness of fit) لبيانات أوقات البقاء في الجدول (1) باستخدام التطبيق الإحصائي (Easy Fit Professional 5.6, لفرضية الاختبار الآتية:

life times are Weibull distributed H_0 :

life times are not Weibull distributed

H_1 :

إذ كانت قيم الإحصاءات المحسوبة لأوقات البقاء في جميع الاختبارات اصغر من القيمة الحرجة لذلك الاختبار عند مختلف قيم مستوى المعنوية α , وعليه تم قبول فرضية العدم التي تنص على أن بيانات أوقات البقاء تتبع توزيع ويبل, والشكل (1) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل.



الجدول (2) قيم اختبارات حسن المطابقة لبيانات البقاء الضبابية

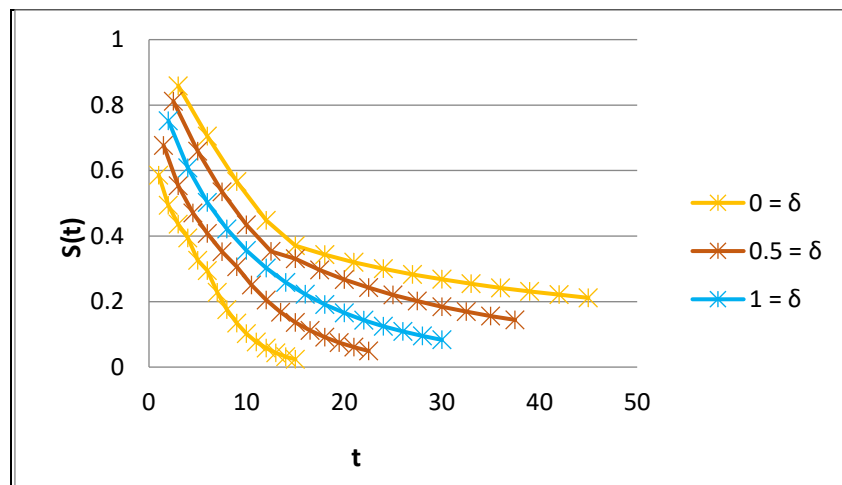
Weibull					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	108				
Statistic	0.09032				
P-Value	0.32206				
Rank	7				
☐	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.10325	0.11768	0.13067	0.14607	0.15675
Reject?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Sample Size	108				
Statistic	0.98552				
Rank	3				
☐	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	No	No	No	No	No
Chi-Squared					
Deg. of freedom	6				
Statistic	4.5919				
P-Value	0.59712				
Rank	1				
☐	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	8.5581	10.645	12.592	15.033	16.812
Reject?	No	No	No	No	No

4- مقدر بيز لدالة البقاء الضبابية

بتطبيق صيغة مقدر بيز في (40) لتقدير دالة البقاء الضبابية عند نسبة الضبابية (0,0.5,1) على أوقات بقاء مرضى الفشل الكلوي التي حصلنا عليها وباستخدام البرنامج (MATLAB-R2017a), تم حساب الحدود الدنيا والعليا لاحتمال البقاء على قيد الحياة عند مختلف أوقات البقاء من (2-30) يوم والنتائج التي حصلنا عليها موضحة في الجدول (3) أدناه:

جدول (3) مقدرات الحدود الدنيا والعليا لاحتمالات البقاء الضبابية عند مختلف نسب الضبابية لمختلف أوقات البقاء (2-30)

$\tilde{t}_i$	$\hat{BS}$				
	$\delta = 0$		$\delta = 0.5$		$\delta = 1$
	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower=upper
2	0.586113	0.858575	0.676726	0.811707	0.751702
4	0.494198	0.704595	0.553375	0.658984	0.608493
6	0.436555	0.565868	0.470207	0.535032	0.503095
8	0.394610	0.447541	0.407933	0.434413	0.421206
10	0.325873	0.370544	0.351787	0.352728	0.355757
12	0.294360	0.343218	0.306478	0.330922	0.302494
14	0.228391	0.320217	0.250622	0.296653	0.258587
16	0.175752	0.300452	0.204832	0.267512	0.222038
18	0.134244	0.283195	0.167327	0.242422	0.191377
20	0.101847	0.267939	0.136629	0.220604	0.165492
22	0.076788	0.254317	0.111520	0.201474	0.143522
24	0.057559	0.242048	0.090993	0.184583	0.124790
26	0.042913	0.230922	0.074219	0.169582	0.108755
28	0.031832	0.220779	0.060520	0.156189	0.094980
30	0.023499	0.211458	0.049336	0.144179	0.083110



الشكل (2) قيم احتمالات البقاء للحدود الدنيا والعليا لأوقات البقاء الضبابية عند نسب الضبابية ($\delta = 0, 0.5, 1$)

الاستنتاجات

- 1- يتضح من الجدول (3) والشكل (2) أن احتمالات البقاء عند الحدود الدنيا لكل وقت بقاء تتزايد بازدياد نسبة الضبابية، بينما احتمالات البقاء عند الحدود العليا لكل وقت بقاء تتناقص بازدياد نسبة الضبابية.
- 2- أن احتمال البقاء للبيانات الضبابية التامة يقع ضمن الحدود الدنيا والعليا لاحتمالات البقاء للبيانات نصف الضبابية وبدون ضبابية وهذا ينطبق مع سلوك دالة العضوية المثلثية المستخدمة في بحثنا.
- 3- أن سلوك احتمالات البقاء للحدود الدنيا والعليا عند جميع نسب الضبابية في البيانات ينطبق مع سلوك نظرية البقاء بتناقص احتمالات البقاء على قيد الحياة بزيادة أوقات البقاء.
- 4- أن الحد الأدنى لاحتمال البقاء لمرضى الفشل الكلوي (0.586113) في حين كان الحد الأعلى (0.858575) عند الوقت ($t=2$) لمختلف نسب الضبابية.

التوصيات

- 1- تقدير دالة البقاء الضبابية باستخدام دوال عضوية أخرى.
- 2- تقدير معدل البقاء ودالة الخطورة الضبابية بطريقة بيز باستخدام دوال خسارة وتقريبات أخرى.

3- نوصي بتوفير أجهزة غسيل الكلى المستحدثة (جهاز غسيل الكلى المحمول) للحد من معاناة مرضى الفشل الكلوي.

المصادر

1. النعيمي, ليث فاضل سيد حسين . (2015) . مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية الضبابية . رسالة ماجستير, قسم الإحصاء, كلية الإدارة والاقتصاد, جامعة بغداد .
2. الصبيحاي, حيدر كريم رحيم . (2014) . مقارنة مقدرات دالة معولية الأنظمة الهجينة والمحسنة باستخدام بعض الطرائق البيزية . رسالة ماجستير, قسم الإحصاء, كلية الإدارة والاقتصاد, الجامعة المستنصرية .
3. الصياد, جلال مصطفى . (1993) . الاستدلال الإحصائي, دار المريخ للنشر . الرياض .
4. Collett, D. (2015). Modelling Survival Data In Medical Research. Crc Press.
5. Guure, C. B., Ibrahim, N. A., & Adam, M. B. (2013). Methods For Estimating The 2-Parameter Weibull Distribution With Type-I Censored Data. Res J Appl Sci Eng Technol, 5, 689-694.
6. Guure, C. B., Ibrahim, N. A., Adam, M. B., Bosomprah, S., & Ahmed, A. O. M. (2014). Bayesian Parameter And Reliability Estimate Of Weibull Failure Time Distribution. The Bulletin Of The Malaysian Mathematical Sciences Society, Series, 2, 611-632.
7. Jamkhaneh, E. B. (2014). Analyzing System Reliability Using Fuzzy Weibull Lifetime Distribution. International Journal Of Applied, 4(1),93-102.
8. Lawless, J. F. (2011). Statistical Models And Methods For Lifetime Data (Vol. 362). John Wiley & Sons.
9. Nielsen, M. A. (2011). Parameter Estimation For The Two-Parameter Weibull Distribution. Department Of Statistics/ College/ Physical And Mathematical Sciences/Brigham Young University.
10. Shafiq, M., & Viertl, R. (2016). On the estimation of parameters, survival functions, and hazard rates based on fuzzy life time data. Communications in Statistics-Theory and Methods, 46(10), 5035-5055.
11. Shafiq, M., Atif, M., & Viertl, R. (2017). Parameter and reliability estimation of three-parameter lifetime distributions for fuzzy life times. Advances in Mechanical Engineering, 9(8),1687814017716887.
12. Viertl, R. (2011). Statistical Methods For Fuzzy Data. John Wiley & Sons.
13. Zettervall, H. (2014). Fuzzy Set Theory Applied To Make Medical Prognoses For Cancer Patients (Doctoral Dissertation, Blekinge Institute Of Technology).