

<b>تواريخ البحث</b> تاريخ تقديم البحث : 2023/5/7 تاريخ قبول البحث : 2023/5/24 تاريخ رفع البحث على الموقع: 2023/12/15	<b>المقارنة بين طريقتي التقدير ( الامكان الاعظم والمربعات الصغرى الاعتيادية) في تقدير معلمات توزيع Weibull القطبي<sup>1</sup></b>
	المدرس علي عبدالزهرة حسن
	أ.م.د. ايناس عبد الحافظ محمد أ.م.د. مشتاق كريم عبد الرحيم
	جامعة كربلاء / كلية الادارة والاقتصاد / قسم الاحصاء

**المستخلص :**

في هذا البحث تم بناء الدالة المشتركة لتوزيع ويبيل في نظام الاحداثيات القطبية(ثنائي المتغير)(سرعة الرياح واتجاهها) ومن ثم ايجاد دالة التوزيع الحدية لتوزيع ويبيل القطبي وبعد ذلك يتم تقدير معلمات التوزيع باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى وباستعمال المحاكاة بالاعتماد على لغة البرمجة (R-4.2.3) ، اذ تم افتراض عدة حالات مختلفة لمعلمات التوزيع وعدد مختلف من احجام العينات وتم اجراء المقارنة بين هذه الطرائق باستعمال المعيار الاحصائي MSE لمعرفة افضلية طريقة التقدير وقد اظهرت نتائج التقدير افضلية طريقة الامكان الاعظم مقارنة بطريقة المربعات الصغرى

**الكلمات المفتاحية:** توزيع ويبيل القطبي ، نظام الاحداثيات القطبية ، طريقة الامكان الاعظم ، طريقة المربعات الصغرى،

<sup>1</sup> بحث مستل من اطروحة الدكتوراه للطالب(علي عبد الزهرة حسن)/جامعة كربلاء-كلية الادارة والاقتصاد-قسم الاحصاء (بناء توزيع احتمالي في نظام الاحداثي القطبي بزوايا منتظمة مع تطبيق عملي)

## **A comparison of two methods the maximum likelihood and ordinary least squares to estimate the parameters of polar Weibull distribution**

Ali Abdulzahra Hassan

Ass .Prof .Dr. Enas Abdul hafidh Mohammed

Ass .Prof .Dr. Mushtak K Abd Al-Rahem

Administration & Economics College , Department of Statistics

University of Karbala

### **Abstract :**

In this research the joint function of the Weibull distribution is built in the polar coordinate system (bivariate),(Wind speed and direction), and then the marginal distribution function is found for the polar Weibull distribution, and then the distribution parameters are estimated using the method of the maximum likelihood and the method of least squares using simulation based on the (R-4.2.3) programming language, as it was Assuming several different cases of distribution parameters and a different number of sample sizes, a comparison was made between these methods by colonizing the MSE statistical standard to find out the preference of the estimation method. The estimation results showed the preference of the method of the maximum likelihood compared to the method of least squares.

**Keywords:** Polar Weibull Distribution , Polar Coordinate System , M.L.E , OLS .

## المقدمة :

نظام الإحداثيات القطبية هو نظام ثنائي الأبعاد يستخدم هذا النظام في العديد من المجالات والعلوم مثل الرياضيات والفيزياء والهندسة والبحرية وتكنولوجيا الروبوت والطائرات والمركبات الجوية بدون طيار وأجهزة الاستقبال والارسال الهاتفية.

في نظام الإحداثيات القطبية تُستخدم العلاقة بين الإحداثيات في المواقف التي يسهل فيها التعبير عنها بالقيم الزاوية والمكانية إذ يتم تحديد هذه العلاقة أيضاً بمساعدة الصيغ المثلثية. في بعض مشكلات الحياة الواقعية يكون من الأفضل استخدام نظام الإحداثيات القطبية بدلاً من الإحداثيات الديكارتيّة (الكارتيزية) ، على وجه الخصوص يتم استخدام نظام الإحداثيات القطبية بشكل متكرر في التطبيقات المذكورة انفا وللمساهمة في حلول بعض المشكلات يتم اللجوء الى الإحداثيات القطبية وانشاء حلول لمثل هذه التطبيقات وفرت الدافع لهذا البحث على وجه الخصوص .

## مشكلة البحث :

يواجه الباحثون بعض الصعوبات في اختيار التوزيع الاحتمالي لغرض تمثيل بيانات ظاهرة ما بأفضل صورة، فهناك العديد من البيانات يعبر عنها بمتغيرات اتجاهية وزاوية وهذه الحالة لا يمكن التعبير عنها بصورة جيدة ضمن الإحداثيات الديكارتيّة مما يتطلب الأمر بالتعبير عنها في نظام الإحداثيات القطبية كونها تمتلك زوايا ومسافه ومن ثم ايجاد التوزيع الاحتمالي القطبي المشترك لهذه البيانات ، وكذلك تنشأ الحاجة إلى حساب التوزيع الاحتمالي الحدي القطبي للتوزيع ثنائي المتغير (bivariate) لإنتاج توزيعات ذات متغير واحد على نصف القطر أو الزاوية، وذلك للتعبير عن سلوك احد المتغيرين. وفي هذا البحث سوف نتناول توزيع ويبيل القطبي الحدي الذي يعتمد على المتغير المسافة (r) وبفرض ثبات المتغير الزاوي ( $\theta$ ) ، وتم استعمال المحاكاة في الحصول على البيانات .

## هدف البحث:

يسعى البحث الى المقارنة بين طريقتي التقدير الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معلمات توزيع ويبيل القطبي الحدي (متغير واحد - سرعة الرياح) مع ثبات المتغير الزاوي وبيان افضل طريقة تقدير معالم التوزيع من خلال معيار المقارنة MSE.

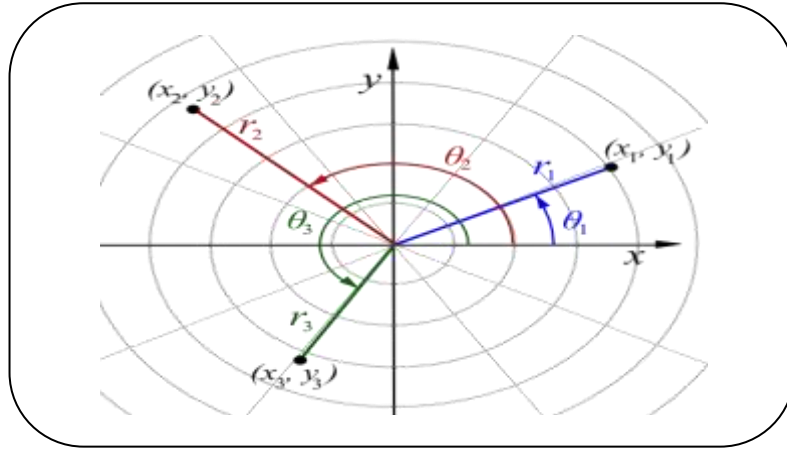
## الجانب النظري :

### 1-2 الإحداثيات القطبية: Polar Coordinate

هو نظام إحداثيات ثنائي الأبعاد ويستخدم هذا النظام في العديد من المجالات مثل الرياضيات ، والأحياء ، والفيزياء ، والهندسة ، والبحرية ، والروبوتات ، ومضادات الطائرات ، وأجهزة الإرسال الهاتفية. يتم استخدام نظام الإحداثيات القطبية عندما يتم التعبير بسهولة عن العلاقة بين إحداثيات من حيث الزاوية والمسافة، إذ يتم تحديد هذه العلاقة أيضاً من خلال الصيغ المثلثية. في بعض مشكلات الحياة الواقعية يكون من الأفضل استخدام نظام الإحداثيات القطبية بدلاً من الإحداثيات الديكارتيّة على وجه الخصوص ، ويستعمل مراقبو

الحركة الجوية أنظمة رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى والتضاريس الأرضية ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة لتمثيل موقع الطائرة ويقوم المرءون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين.<sup>[15,16]</sup> وهناك عدة أنواع من الأحداثيات ومنها :

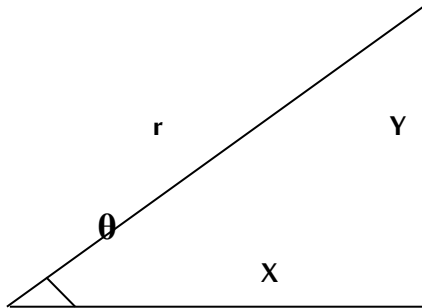
- الأحداثيات الكارتيزية (الديكارتية) Rectangular coordinates : تتكون من محورين المحور الأفقي X والمحور العمودي Y ويتقاطعان عند نقطة تسمى نقطة الأصل .
  - الأحداثيات القطبية Polar Coordinate : تحدد المحاور القطبية بالبعد r (البعد عن نقطة الأصل (0,0) وموقع النقطة (x,y) ) والزاوية  $\theta$  التي يصنعها مع المحور الأفقي .
- والشكل (1) يوضح زوايا مختلفة ثنائية الأبعاد في نظام الأحداثيات القطبية مقارنة مع الأحداثيات الديكارتية



الشكل (1) يوضح ثلاث زوايا ثنائية الأبعاد لتمثل نظام الأحداثيات القطبية مقارنة بالديكارتية<sup>[15]</sup>

## 2-2 العلاقة بين الأحداثيات الديكارتية والقطبية:<sup>[5,16]</sup>

يمكن توضيح العلاقة بين الأحداثيات القطبية والكارتيزية من خلال رسم المثلث



$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

يمكن تحويل المحاور القطبية المستوية لأي نقطة إلى محاور ديكارتية باستعمال العلاقة

$$X = r \cos \theta \quad ; \quad Y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{يمكن الحصول على قيمة } r$$

$$\tan \theta = \frac{Y}{X} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{Y}{X} \right) \quad ; \quad r \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

يمكن تحديد الزاوية ( $\theta = 0$  = صفر) عند الشرق او الشمال أي احداثي اخر.

المحور القطبي : هو نصف مستقيم يمتد افقيا من القطب الي اليمين

r : تمثل المسافة المتجهة من القطب 0 الى النقطة p أي تتضمن قيما واتجاها فمن الممكن ان تكون r قيمة سالبة .

$\theta$  : الزاوية المتجهة أي تتضمن قيمة واتجاها من المحور القطبي الى النقطة p.

### 3-2 - توزيع ويبيل : Weibull Distribution

ويعد هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة وينسب الى العالم الفيزيائي السويدي Waloddi Weibull . ويُستعمل توزيع ويبيل لمحاكاة كثير من التطبيقات الاحتمالية كسرعة الرياح مثلا وفي المجال الصناعي والحياتي. [4,11].

وان الصيغة المستخدمة لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل ذي المعلمتين هي :

$$f(x; a, \lambda) = \begin{cases} \frac{a}{\lambda^a} X^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{X}{\lambda}\right)^a} & , \quad X \geq 0, a, \lambda, k > 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \dots (1)$$

وان دالة التوزيع التراكمية (CDF) بالشكل التالي:

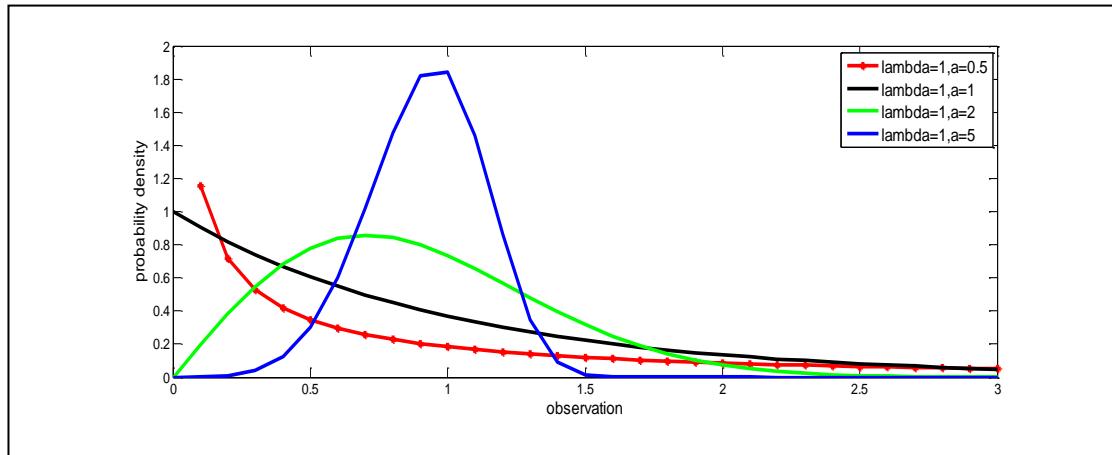
$$F(x; a, \lambda) = 1 - e^{-\left(\frac{X}{\lambda}\right)^a} \quad \dots (2)$$

حيث ان :  $a > 0$  ،  $\lambda > 0$  معلمتا التوزيع

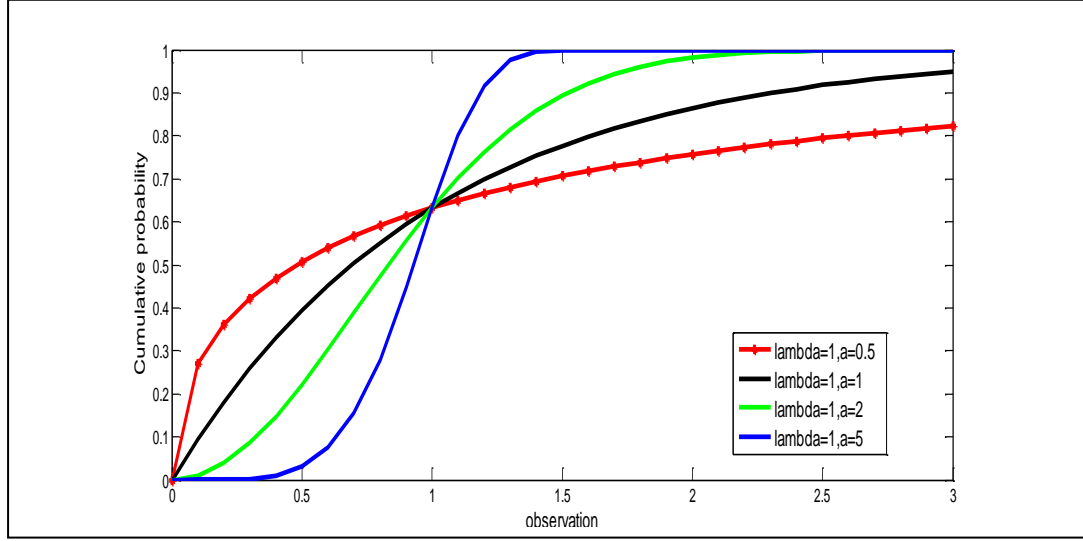
$\lambda$  : تمثل معلمة القياس لتوزيع ويبيل ووحداتها هي وحدات المتغير X نفسها.

a : تمثل معلمة الشكل لتوزيع ويبيل بدون وحدات .

والشكل (2) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية p.d.f والشكل (3) يوضح دالة التوزيع التراكمي C.D.F لتوزيع ويبيل



\* المصدر من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج matlab R2014a



الشكل (3) يوضح دالة التوزيع التراكمية CDF لتوزيع ويبيل

\*المصدر من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج matlab R2014a

#### 4-2 معامل التحويل في الاحداثيات القطبية

the Jacobian of the polar coordinate

يمكن الحصول على معامل التحويل للإحداثي القطبي ذي البعدين (2-D) حسب الصيغة <sup>[10,14]</sup>:

$$X=r \cos \theta \quad ; \quad Y=r \sin \theta$$

$$J_2 = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \quad \dots (3)$$

#### 5-2 دوال التوزيع القطبية : Polar Distribution Functions

يتزايد استعمال دوال الاحتمال ثنائي المتغير في نظرية الاحتمالات تدريجيا وعلى الرغم من ان دوال التوزيع ثنائية المتغير تجد مزيدا من الاستخدام في الإحداثيات الديكارتية وان تحويلها إلى نظام إحداثيات قطبية سيسهل في حل مشكلات في عدد من المجالات ، وتستعمل الإحداثيات القطبية في دوال التوزيع القطبية وهذه الإحداثيات هي المسافة (r) من نقطة البداية والزاوية ( $\theta$ ) مع المحور الأفقي <sup>[13,15]</sup>.

تعرف دالة التوزيع التراكمي ثنائية المتغير المستخدمة في الإحداثيات الديكارتية بانها:

$$F_{x,y}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{x,y}(u, v) du dv \quad \dots (4)$$

ومن خلال التحويل من الاحداثي الديكارتى الى الاحداثي القطبي الذي تم توضيحه في المعادلة (3)

تكون دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة في الاحداثيات القطبية تحقق الشرط التالي(شرط دالة الكثافة الاحتمالية):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f_{\theta,r}(\theta, r) r dr d\theta = 1 \quad \dots (5)$$

ويتم تعريف دالة التوزيع التراكمي القطبي على أنها:

$$F_{\theta,r}(\theta, r) = \int_0^{\theta} \int_0^r f_{\theta,r}(\varphi, \rho) \rho d\rho d\varphi \quad \dots (6)$$

والمحددة من علاقة التطابق التالية

$$f_{x,y}(x,y) \equiv f_{\theta,r}(\theta, r) \quad \dots (7)$$

وسوف يتم التطرق الى توزيع ويبيل في الاحداثيات القطبية وكما يلي:

#### 6-2: توزيع ويبيل القطبي ( التوزيع الجديد) Polar Weibull Distribution

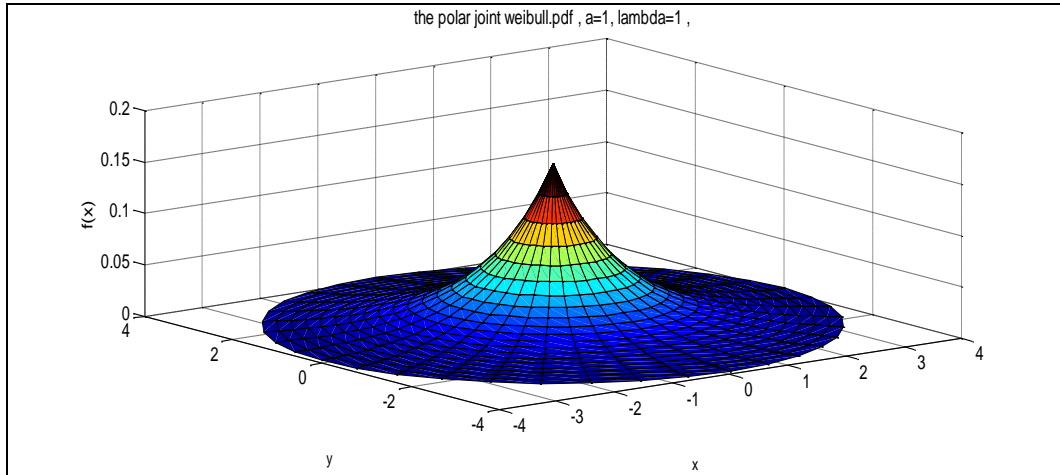
##### 1-6-2: دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لتوزيع ويبيل في الاحداثيات القطبية وبعد اخذ التغيير الزاوي  $\theta$  ثابت (منتظم) تكون بالصورة التالية :

$$f(\theta, r; \lambda, a) = \frac{1}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{a}{\lambda^{a+1}} (r)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \quad \dots (8)$$

$a > 0$  (shape) ;  $\lambda > 0$  (scale) ;  $r > 0$  ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ويمكن رسم الدالة بفرض قيمة  $\lambda = 1$  وقيمة  $a$  مثلا ( $a = 1$ ) وكما موضح في الشكل (4)



الشكل (4) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي

المصدر: من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج matlab R2014a

## 2-6-2: دالة التوزيع التراكمي المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي

لإيجاد دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي (c.d.f) لتوزيع ويبيل في الاحداثيات القطبية من دالة الكثافة الاحتمالية الموضحة في المعادلة (8) وبالاعتماد على المتغير  $r$ .

$$F(\theta, r) = \int_0^\theta \int_0^r f(\phi, \rho; \lambda, a) \rho d\rho d\phi \quad \dots (9)$$

وبعد التعويض في الصيغة المذكورة انفا واجراء التكامل نحصل على:

$$F(\theta, r) = \int_0^\theta \int_0^r \frac{1}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{a}{\lambda^{a+1}} (\rho)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^a} \rho d\rho d\phi$$

$$F(\theta, r) = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{\gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \quad \dots (10)$$

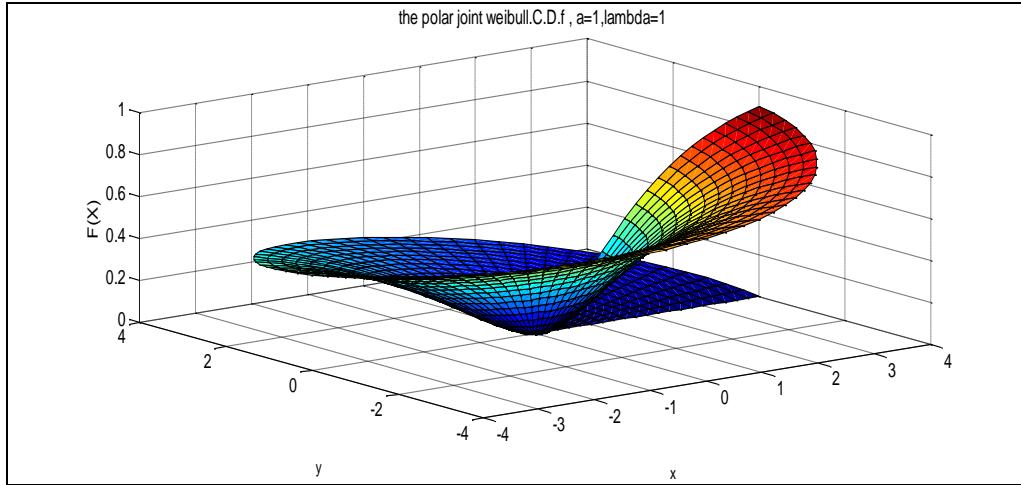
والتي تمثل دالة التوزيع التراكمي المشتركة للمتغيرين  $(\theta, r)$  لتوزيع ويبيل القطبي .  
اذان:

$$\gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)$$

ويمكن تعريف دالة غاما الغير تامة الدنيا حسب الصيغة التالية:

$$\gamma(a, t) = \int_0^t u^{a-1} e^{-u} du$$

ويمكن الحصول على الرسم البياني لشكل هذه الدالة التي تم التوصل اليها في المعادلة (10) بافتراض قيم المعلمات  $\lambda = 1$  وكذلك نفرض قيمة  $a = 1$ ، وكما موضح في الشكل (5).



الشكل (5) يوضح الرسم البياني لدالة التوزيع التراكمي المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي على فرض ان المعلمات  $(\lambda=1, a=1)$

المصدر: من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج matlab R2014a



### 3-6-2: دالة الكثافة الاحتمالية الحدية فيما يتعلق بالمتغير $r$

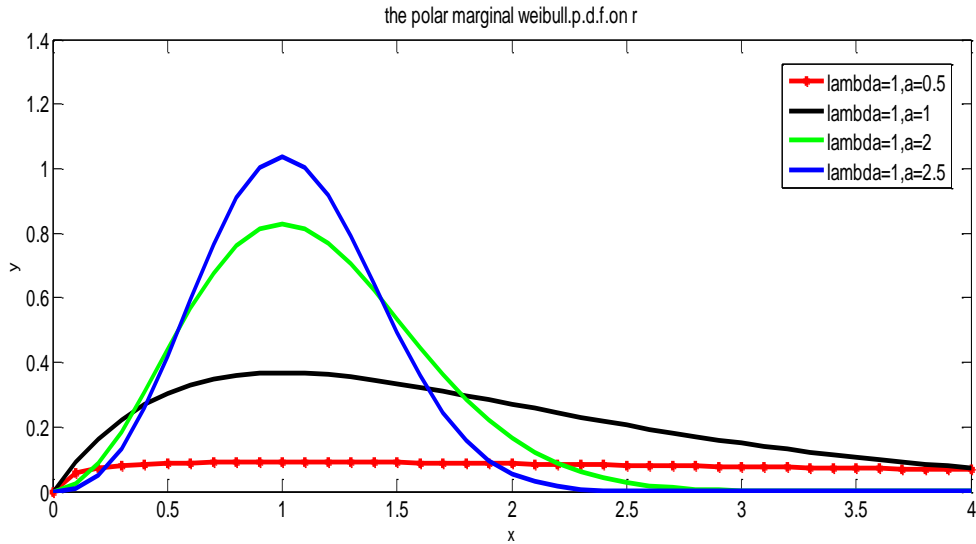
ويمكن ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية الحدية لتوزيع ويبيل القطبي فيما يتعلق بالمتغير  $r$  وذلك من خلال ايجاد التكامل للدالة المشتركة الموضحة في المعادلة (8) وضمن حدود التكامل للمتغير  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f(r; \lambda, a) = \int_0^{2\pi} f(\theta, r; \lambda, a) r d\theta \quad \dots (11)$$

وبعد اجراء التكامل نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية الحدية لتوزيع ويبيل القطبي وبالتبسيط نحصل على:

$$f(r; \lambda, a) = \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \quad \dots (12)$$

وعلى فرض ان قيمة ( $\lambda=1$ ) وقيم مختلفة للمعلمة ( $a=0.5, 1, 2, 2.5$ ) نقوم برسم الدالة التي تم الحصول عليها في المعادلة (12) كما موضح في الشكل (6).



الشكل (6) يوضح الدالة الحدية لتوزيع ويبيل القطبي بالاعتماد على المتغير  $r$  ولقيم مختلفة للمعلمات

المصدر: من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج *matlab R2014a*

### 4-6-2: دالة التوزيع التراكمي الحدية لتوزيع ويبيل القطبي

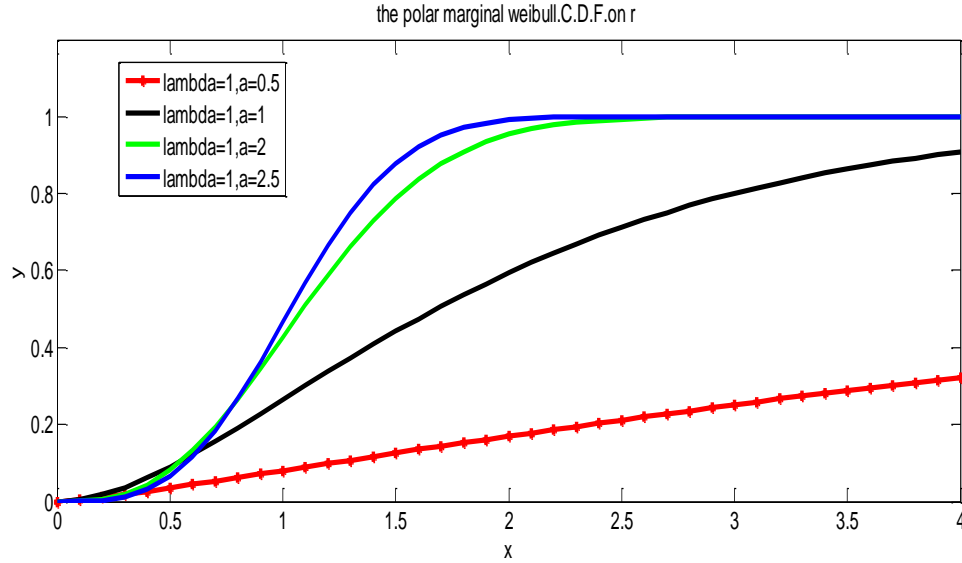
للحصول على دالة التوزيع التراكمي الحدي لتوزيع ويبيل القطبي نقوم بأجراء التكامل على الدالة المذكورة في المعادلة ( ) وضمن مجال المتغير  $r \in [0, r]$  هي:

$$F(r; \lambda, a) = \int_0^r \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} \rho^a \cdot e^{-\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^a} d\rho \quad \dots (13)$$

وبعد اجراء التكامل نحصل على:

$$F(r; \lambda, a) = \frac{\gamma\left(\frac{1}{a} + 1, \frac{z}{\lambda^a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \quad \dots (14)$$

ويمكن الحصول على الرسم البياني لدالة التوزيع التراكمي الحدي لتوزيع ويبيل القطبي المذكورة في المعادلة (14) بالاعتماد على المتغير  $r$  ، على افتراض قيم المعلمات  $\lambda = 1$  ، وكذلك قيم مختلفة لـ  $a = 0.5, 1, 2, 2.5$  ، كما موضح في الشكل (7)



الشكل (7)

يمثل دالة التوزيع التراكمي الحدي لتوزيع ويبيل القطبي بالاعتماد على المتغير  $r$  ، ولقيم مختلفة من المعلمات

المصدر: من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج matlab R2014a

#### 7-2 : طرائق التقدير : Method of estimation

سوف يتم التركيز في طرائق التقدير على توزيع ويبيل القطبي الحدي الذي تم التوصل اليه في المعادلة (11) وان من اهم الطرائق التي سوف يتم التطرق اليها في التقدير هي:

#### 1-7-2: طريقة الامكان الاعظم : Maximum Likelihood Estimation (MLE)

تعد طريقة الامكان الاعظم من الاساليب الكلاسيكية المستعملة في تقدير المعلمات لأي توزيع وكان العالم فيشر اول من طبق هذه الطريقة في ابحاث عديدة له ، وتهدف هذه الطريقة الى جعل الدالة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية اعظم ما يمكن ، وغالبا ما يتم استخدامها لتقدير معلمات التوزيع لأنها تتميز بخصائص جيدة منها خاصية الثبات وتمتلك اقل تباين وخاصية عدم التحيز عندما يكون حجم العينة كبير . [3,5]

ويتم تطبيق الطريقة كالآتي:

ان دالة الامكان تتمثل بالتوزيع المشترك للملاحظات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ، فاذا رمزنا لدالة الامكان بالرمز  $(L)$  فان هذه الدالة هي:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta) \quad \dots (15)$$

وان دالة الامكان الاعظم لتوزيع ويبيل القطبي الحدي والتي تم ذكرها بالمعادلة (12) سوف تكون بالصيغة الاتية :

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n, a, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r_i^a \cdot e^{-\left(\frac{r_i}{\lambda}\right)^a}$$

$$L = \left(\frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda^{a+1}}\right)^n \prod_{i=1}^n r_i^a \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{\lambda}\right)^a} \quad \dots (16)$$

يتم تحويل الصيغة المذكورة انفا الى الشكل الخطي وذلك بعد اخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$\begin{aligned} \ln L = n \ln a - n \ln \left[ \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) \right] - n(a+1) \ln \lambda + a \left( \sum_{i=1}^n \ln r_i \right) \\ - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a}{\lambda^a} \quad \dots (17) \end{aligned}$$

ولإيجاد القيم التقديرية لكل من معلمي القياس والشكل (a, λ) التي تجعل من دالة الإمكان اعظم ما يمكن نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (17) ومساواتها للصفر وكما يلي :

اولاً: الاشتقاق بالنسبة للمعلمة λ.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = - \frac{n(a+1)}{\lambda} - \frac{[\lambda^a \cdot (0) - \sum r_i^a (a\lambda^{a-1})]}{\lambda^{2a}}$$

وبمساواة المعادلة للصفر وبعد التبسيط نحصل على

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = - \frac{n(a+1)}{\lambda} + \frac{a \sum r_i^a}{\lambda^{a+1}} = 0$$

وبإعادة الترتيب وبالاختصار

$$n(a+1)\lambda^{a+1} = \lambda a \sum r_i^a$$

$$n(a+1)\lambda^a = a \sum r_i^a$$

$$\lambda^a = \frac{a \sum r_i^a}{n(a+1)} \quad \dots (18)$$

$$\hat{\lambda} = \left[ \frac{a \sum r_i^a}{n(a+1)} \right]^{\frac{1}{a}} \quad \dots (19)$$

ثانياً: الاشتقاق بالنسبة للمعلمة a.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} - n \frac{d}{da} \left[ \ln \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) \right] - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln r_i \\ - \frac{[\lambda^a \cdot (\sum r_i^a \ln r_i) - \sum r_i^a \lambda^a \ln \lambda]}{\lambda^{2a}} \quad \dots (20) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} - n \left[ -\frac{\psi\left(\frac{1}{a} + 1\right)}{a^2} \right] - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{\lambda^a [\sum r_i^a \ln r_i - \sum r_i^a \ln \lambda]}{\lambda^{2a}}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} \psi\left(\frac{1}{a} + 1\right) - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{\sum r_i^a \ln r_i - \sum r_i^a \ln \lambda}{\lambda^a}$$

(Digamma function)  $\psi\left(\frac{1}{a} + 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)}$  حيث

وبعد التعويض والتبسيط والاختصار وبمساواة المشتقة للصفر وإعادة الترتيب نحصل على:

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} \ln\left(\frac{1}{a} + 1\right) - \frac{n}{(2a + 2a^2)} + \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{n(a + 1) \sum r_i^a \ln r_i}{a \sum r_i^a} + \frac{n \ln \lambda}{a} = 0$$

$$\hat{a} = \frac{1 + \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{a} + 1\right) - \frac{1}{2(1 + a)} + \ln \lambda}{\frac{\sum r_i^a \ln r_i}{\sum r_i^a} + \frac{\sum r_i^a \ln r_i}{a \sum r_i^a} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln r_i} \quad \dots (21)$$

وبالتعويض عن قيمة  $\hat{\lambda} = \left[\frac{a \sum r_i^a}{n(a+1)}\right]^{\frac{1}{a}}$  التي تم الحصول عليها في المعادلة (19) نحصل على:

$$\hat{a} = \frac{1 + \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{a} + 1\right) - \frac{1}{2(1 + a)} + \frac{1}{a} \ln\left[\frac{a \sum r_i^a}{n(a + 1)}\right]}{\frac{\sum r_i^a \ln r_i}{\sum r_i^a} + \frac{\sum r_i^a \ln r_i}{a \sum r_i^a} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln r_i} \quad \dots (22)$$

المعادلة (22) والمعادلة (19) يمكن حلها بطرائق التحليل العددي ومنها طريقة نيوتن رافسون - Newton method Raphson

#### 2-7-2 : طريقة المربعات الصغرى: Least Squares Method

تعد من احد اكثر الاساليب شيوعا واهمية في تقدير المعلمات عندما تكون معادلة الانموذج متغيرات خطيه او غير خطيه ، وتستعمل في الكثير من الظواهر الاقتصادية والطبية والهندسية والرياضية ... الخ . [2] وتمتاز هذه الطريقة بعدة خصائص منها خطية المعلمات المقدره وكذلك خاصية عدم التحيز وخاصية اقل تباين وتمتاز ايضا بخاصية الاتساق، والهدف الرئيس لهذه الطريقة هو تقليل مجموع مربعات الخطأ(الفروق التربيعية بين القيم الحقيقية للعينة والقيم المتوقعة لها) ويرمز لها بالرمز (S) وكما موضح في الصيغة التالية :

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [Y_i - E(Y_i)]^2 \quad \dots (23)$$

$$S = \sum_{i=1}^n [F(X_i) - E(F(X_i))]^2 \quad \dots (24)$$

ويتم ايجاد القيم التقديرية الى  $\hat{F}(X_i)$  من خلال احدى الطرائق اللامعلمية  
 $E(F(X_i)) = \frac{i}{n+1} = q_i \dots (25)$

وبالتعويض في المعادلة (24) وكالاتي :

$$S = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\gamma\left(\frac{1}{a} + 1, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} - q_i \right]^2 \dots (26)$$

من خلال العلاقة بين دالة كاما التامة ودالة كاما الدنيا والعليا<sup>[12]</sup>

$$\gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) \dots (27)$$

ومن ثم تكون المعادلة (26) بعد التعويض كالاتي:

$$S = \sum_{i=1}^n \left[ 1 - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} - q_i \right]^2 \dots (28)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (28) بالنسبة للمعلمات  $(a, \lambda)$  ومساواة المشتقة للصفر للحصول على القيم

المقدرة للمعلمات وكما يلي :

اولاً: بالنسبة للمعلمة a

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \left( \frac{1}{a^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \right) \left[ e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} G_{2,3}^{3,0} \left( \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \middle| \begin{matrix} 1, 1 \\ 0, 0, 1 + \frac{1}{a} \end{matrix} \right) + a^2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}+1} \log \left(\frac{r}{\lambda}\right) + e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) \left[ \log \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a - \psi \left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \right]$$

بالقسمة على (2) والمساواة مع الصفر نحصل على:

$$\sum_{i=1}^n \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \left( \frac{1}{a^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \right) \left[ e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} G_{2,3}^{3,0} \left( \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \middle| \begin{matrix} 1, 1 \\ 0, 0, 1 + \frac{1}{a} \end{matrix} \right) + a^2 \left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)^{\frac{1}{a}+1} \log\left(\frac{r}{\lambda}\right) + e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) \left[ \log\left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) - \psi\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \right] = 0 \quad \dots (29)$$

تم تعريف دالة (Meijer G function) اخرمرة في عام 1946 من قبل Meijer والتي تعد احد انواع التكامل المعقد من نوع Mellin-Barnes integrals ويتم تعريفها بصورة عامة كما يلي :<sup>[7]</sup>

$$G_{p,q}^{m,n} \left( Z \middle| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s)) (\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s))}{(\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s)) (\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s))} z^s ds$$

ثانياً: بالنسبة للمعلمة  $(\lambda)$

وبالطريقة نفسها نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (28) بالنسبة للمعلمة  $(\lambda)$  ومساواة المشتقة بالصفر.

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \left[ - \frac{\left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)^{\frac{1}{a}+1} a e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}}{\lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] \right] = 0 \quad \dots (30)$$

بالقسمة على (-2) والمساواة مع الصفر وبعد التبسيط نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n \left[ \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \left[ \frac{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{1+a} a e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}}{\lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] \right] = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \left[ \frac{a r^{1+a} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}}{\lambda^{2+a} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] \right] = 0 \quad \dots (31) \end{aligned}$$

والمعادلات (31) و (29) تمثل معادلات غير خطية لا يمكن حلها الا باستعمال الطرائق العددية لغرض الحصول على مقدرات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وتم استخدام طريقة نيوتن رافسون في الحصول على المعلمات المقدرة.

#### 8-2 : معيار المقارنة بين طرائق التقدير (Criteria for comparing estimation methods)

ليبين أي الطرائق افضل في التقدير نستخدم معيار (MSE)(Mean squared Error) متوسط مربعات الخطأ حيث تفضل الطريقة التي تمتلك اقل قيمة لهذا المعيار ويتم حسابه من الصيغة التالية: [4]

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{\theta}_i - \theta)^2 \quad \dots(32)$$

$\theta$  : تمثل القيم الافتراضية لمعالم الانموذج أي ان  $\theta = (a, \lambda)$  .

$\hat{\theta}_i$  : تمثل القيم المقدرة لمعالم الانموذج وحسب طريقة التقدير المستعملة.

R : يمثل عدد تكرار التجربة .

2- الجانب التجريبي

#### 1-3 : المحاكاة

ومن اهم الطرائق المستعملة في المحاكاة والاكتر شيوعا هي طريقة مونت كارلو (Monte Carlo) وتستعمل في توليد الاعداد العشوائية التي تتبع احد التوزيعات الاحصائية ولهذه الطريقة اهمية كبيرة في تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية والمقارنة بين طرائق التقدير وبالاعتماد على محاكاة احجام عينات مختلفة من البيانات المتولدة بحسب هذه الطريقة ، والتي تعد ايضا من الطرائق العددية الخاصة والتي تتعامل مع المتغيرات العشوائية وتطبيقاتها المتمثلة بحساب المساحة تحت المنحنى لاي دالة وكذلك في حساب الحجم وغيرها من التطبيقات الحياتية . [3]

#### 2-3 : مراحل وصف تجارب المحاكاة

تضمنت مراحل المحاكاة عدة مراحل لغرض تطبيق طرائق تقدير المعلمات للأنموذج الجديد وتم استعمال البرنامج الاحصائي R-4.2.3 وهذه المراحل هي :

#### 1-2-3 : مرحلة اختيار القيم الافتراضية وحجم العينة

في هذه المرحلة يتم اختيار القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع الجديد (توزيع ويبيل القطبي الحدي) وهذه المعلمات هي ( معلمة الشكل a ومعلمة القياس  $\lambda$  ) فقد تم اختيارها عشوائيا وكما في الجدول (3-1):

### جدول (3-1)

#### القيم الافتراضية الأولية للمعلمات والنماذج المقترحة

Model	A	$\lambda$
1	0.5	1
2	1	1
3	1.5	1
4	2	1
5	0.5	2
6	1	2
7	1.5	2
8	2	2

المصدر: من اعداد الباحث

- ويتم اختيار حجم العينة فقد تم اختيار اربعة حجوم عينات مختلفة (30, 50, 75, 100) وذلك لغرض تحديد حجم العينة المناسب .
- وتم تكرار التجربة لعدة مرات لغرض الوصول الى نتائج تقدير جيدة وتم اختيار تكرار التجربة (K=1000) مرة لكل حالة من حالات القيم الافتراضية .

#### 2-2-3: توليد أرقام عشوائية في دوال التوزيع القطبي

#### Generating Random Numbers in Polar Distribution Functions

الارقام العشوائية هي متتالية اعداد لها الصفة العشوائية وتعد هذه الارقام جزءا اساسيا في محاكاة مونت كارلو وهناك طرائق عدة لتوليد الاعداد العشوائية منها طريقة التحويل العكسي . في هذه البحث تم إنشاء أرقام عشوائية باستخدام توزيع ويبيل القطبي لتوليد أرقام عشوائية، حيث لدينا توزيع ويبيل الحدي القطبي بدلالة  $r$  .<sup>[13,15]</sup> وطريقة التحويل العكسي تتضمن خطوتين:

1- توليد ارقام عشوائية ( $U_i$ ) تتبع التوزيع المنتظم المستمر في الفترة  $[0, 1]$  أي ان:

$$U_i \sim \text{Uniform dist.} (0, 1) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2- تحويل الارقام العشوائية المنتظمة المولدة في الخطوة الاولى الى متغيرات عشوائية ملائمة للأنموذج الجديد المستعمل (توزيع ويبيل القطبي الحدي) من خلال مساواة دالة التوزيع التراكمية للتوزيع مع القيم المولدة  $U_i$  في الخطوة الاولى .

اذ يتم استعمال دالة CDF لتوزيع ويبيل الحدي القطبي بدلالة  $r$  الموضحة في المعادلة (14) وهي:

$$F(r) = \frac{\gamma\left(\frac{1}{a} + 1, \frac{r^a}{\lambda^a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)}$$

$$U_i = F(r)$$

$$r = F^{-1}(U_i)$$

وباستعمال الطرائق العددية يتم الحصول على قيم المتغير  $r$  .



بعد اجراء وتنفيذ برنامج المحاكاة باستعمال برنامج (R- 4.2.3) وتم الحصول على نتائج تقدير قيم المعلمات وكذلك حساب قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمعلمات المقدره لتوزيع ويبل القطبي وتم تلخيص النتائج في جداول خاصة موضحة في الملحق (A) .

### 3-2-3: المقارنة بين طرائق التقدير

يتم في هذه المرحلة تقدير معلمات الانموذج لكل حالة افتراضية للمعلمات باستعمال طرائق التقدير التي تم ذكرها انفا (MLE , OLS) وتتم المقارنة بين هذه الطرائق باستعمال الرتب اذ تم اعطاء الرتبة الاولى للطريقة التي تمتلك اقل متوسط مربعات الخطأ (MSE) وحسب كل معلمة وحجم كل عينة ولكل حالة افتراضية

### 3-3: تحليل ومناقشة نتائج تجربة المحاكاة

#### 1-3-3: تقدير المعلمات واختيار افضل طريقة

تم استعمال طرائق التقدير المذكورة انفا في الانموذج وتم تحليل وعرض نتائج المحاكاة في الجداول المذكورة في الملحق (A) اذ تم تقدير المعلمات على وفق الطرائق (MLE , OLS) وعند حجوم عينات مختلفة وحسب الحالات الافتراضية لكل معلمة . ويتم التفضيل بين تلك الطرائق بناء " على اقل قيمة لمعيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) واعتمادا على طريقة الرتب بإعطاء الرتبة الاولى لاقل قيمة لمعيار MSE وتم تلخيص تلك النتائج في الجدول (3-2) .

### جدول (3-2)

الرتب الجزئية والكلية لطرائق التقدير ولحالات مختلفة من القيم الافتراضية لمعلمات توزيع ويبل القطبي

Case	n	Method		Best
		MLE	OLS	
a=0.5, λ=1	30	1.5	1.5	MLE
	50	1	2	
	75	1	2	
	100	1	2	
$\sum Rank$		4.5 <sup>[1]</sup>	7.5 G <sup>[2]</sup>	
a=1, λ=1	30	1	2	MLE
	50	1	2	
	75	1	2	
	100	1	2	
$\sum Rank$		4 <sup>[1]</sup>	8 <sup>[2]</sup>	
a=1.5, λ=1	30	1	2	MLE
	50	1	2	
	75	1	2	
	100	1	2	

$\sum Rank$		$4^{[1]}$	$8^{[2]}$	
a=2, λ=1	30	1	2	MLE
	50	1	2	
	75	1	2	
	100	1	2	
$\sum Rank$		$4^{[1]}$	$8^{[2]}$	
a=0.5, λ=2	30	1	2	MLE
	50	1	2	
	75	1	2	
	100	1	2	
$\sum Rank$		$4^{[1]}$	$8^{[2]}$	
a=1, λ=2	30	1	2	MLE
	50	1	2	
	75	1	2	
	100	1	2	
$\sum Rank$		$4^{[1]}$	$8^{[2]}$	
a=1.5, λ=2	30	1	2	MLE
	50	1	2	
	75	1	2	
	100	1	2	
$\sum Rank$		$4^{[1]}$	$8^{[2]}$	
a=2, λ=2	30	1	2	MLE
	50	1	2	
	75	1	2	
	100	1	2	
$\sum Rank$		$4^{[1]}$	$8^{[2]}$	
$\sum \sum Rank$		32	64	
Over all Ranks		1	2	
BEST Method = MLE				

• المصدر من اعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات برنامج R-4.2.3

- من خلال نتائج المحاكاة الموضحة في الجدول (2-3) يتضح ما يلي :
- 1- طريقة الامكان الاعظم (MLE) في تقدير معلمات توزيع ويبل القطبي جاءت في المرتبة الاولى لمجموع جميع الحالات Over all Ranks ولجميع حجوم العينات في التقدير (30,50,75,100) مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية OLS
  - 2- طريقة المربعات الصغرى (OLS) جاءت بالمرتبة الثانية وعند جميع احجام العينات المختلفة ومن بين جميع الطرائق التقدير بصورة عامه .
- وأخيرا نستنتج من خلال الجدول المذكور انفا ان افضل طريقة ملائمة لتقدير معلمات توزيع ويبل القطبي هي طريقة الامكان الاعظم (MLE).

#### الاستنتاجات والتوصيات

##### الاستنتاجات:

- 1- طريقة الإمكان الأعظم (MLE) اثبتت افضليتها مقارنة بطريقة المربعات الصغرى (OLS) في تقدير معالم توزيع ويبل القطبي كونها امتلكت اقل قيمة لمعيار متوسط مربعات الخطأ ولجميع الحالات الافتراضية للمعلمات ولحجوم عينات مختلفة .
- 2- كلما زاد حجم العينة قلت قيمة معيار متوسط مربعات الخطأ وهذا دلالة على امتلاك المعلمات خاصية الاتساق .

##### التوصيات:

- 1- نوصي باستعمال طريقة الإمكان الأعظم في تقدير معلمات التوزيع في التطبيقات الواقعية وذلك لثبوت كفاءة هذه الطريقة في التقدير .
- 2- بالإمكان إضافة طرائق أخرى وبيان افضليتها في تقدير معلمات التوزيع بنفس الأسلوب .

المصادر:

أولاً:"المصادر العربية

أولاً:"المصادر العربية:

- [1] بدر، م. د. دريد حسين ، الحكيم، أ.م.د معاني احمد (2019) "مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع وايبيل ذي المعلمتين باستخدام المحاكاة " مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم العدد 45 ، ص 50-65 .
- [2] راهي, عبدالرحيم خلف و شرهان, رائد فيصل (2019), " تقدير معلمات توزيع وايبيل باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة - دراسة مقارنة" مجلة الادارة والاقتصاد / السنة 42 – العدد122 / الجامعة المستنصرية .
- [3] سعيد , أ.م. د. شروق عبد الرضا ، مجلي ، احمد مجلي ( 2020) " مقارنة طريقتي المربعات الصغرى والامكان الاعظم لتقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع ( وايبيل- رايلي) المركب " مجلة كلية الادارة والاقتصاد للدراسات الاقتصادية والادارية والمالية/جامعة بابل ، المجلد 12 العدد 2، الصفحات 114-127 .
- [4] هرمز, اميرحنا (1990). الإحصاء الرياضي . مديرية دارالكتب للطباعة والنشر، الموصل، العراق .

ثانياً:"المصادر الانكليزية

- [5] Al-Fawzan, M. A. (2000). Methods for estimating the parameters of the Weibull distribution. *King Abdulaziz City for Science and Technology, Saudi Arabia*.
- [6] Bui, H. Q. (2021). A Generalized Polar-coordinate Integration Formula, Oscillatory Integral Techniques, and Applications to Convolution Powers of Complex-valued Functions on  $\mathbb{Z}^d$ .
- [7] Bateman, H. (1953). *Higher transcendental functions [volumes i-iii]* (Vol. 1). McGraw -HILL book company. p.p ( 206-222)
- [8] Cohen, A. C. (1965). Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored samples. *Technometrics*, 7(4), 579-588..
- [9] Ertel, R. B., & Reed, J. H. (1999). Angle and time of arrival statistics for circular and elliptical scattering models. *IEEE Journal on selected areas in communications*, 17(11), 1829-1840.
- [10] Faridi, M., & Khaledi , M. J. (2020). The polar-generalized normal distribution. *arXiv preprint arXiv:2008.11765*.
- [11] Hogg ,R.V & McKean ,J.W & Craig, A.T. (2019). Introduction to mathematical statistics.(eighth edition).
- [12] Jameson, G. J. O. (2016). The incomplete gamma functions. *The Mathematical Gazette*, 100(548), 298-306.

- [13] KESEMEN, O., TIRYAKI, B. K., TEZEL, Ö., & Ayşe, P. A. K. (2020). Some Statistics in Polar Coordinate System with Uniform Angles. Gazi University Journal of Science.
- [14] Nguyen, T. M. (2014). N-Dimensional Quasi polar Coordinates-Theory and Application.
- [15] Pak, A. (2017). Chi-Square and Kolmogorov-Smirnov Goodness of Fit Tests in Polar Coordinates (Doctoral dissertation, MSc. Thesis, Karadeniz Technical University, Trabzon, 19-43).
- [16] Papoulis, A., Pillai, S.U., (2002). Probability, Random Variables, and Stochastic Processes 4th ed., McGraw Hill, New York p.296.

## الملاحق

ملحق (A) نتائج محاكاة توزيع ويبيل القطبي

الجدول (A- 1)

نتائج تقدير المعلمات بالطرائق (MLE, OLS) مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=0.5, \lambda=1$

Methods		MLE	OLS
n=30	$\hat{a}$	0.5406992	0.4998802
	MSE	0.01406644	0.01674951
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.4043276	1.1358589
	MSE	1.03140602	0.94839551
	Rank	2	1
$\sum Rank$		$3^{1.5}$	$3^{1.5}$
n=50	$\hat{a}$	0.5258887	0.5066995
	MSE	0.008913424	0.01221809
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.2731914	1.1514637
	MSE	0.657193686	0.74694637
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=75	$\hat{a}$	0.5156863	0.5003303
	MSE	0.005024771	0.007266258
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.1693091	1.0702516
	MSE	0.358386632	0.427818686
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	0.5124048	0.5009478
	MSE	0.003912062	0.005326025
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.1345136	1.0617715
	MSE	0.267156134	0.320644170
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$

المقارنة بين طريقتي التقدير ( الامكان الاعظم والمربعات الصغرى الاعتيادية) في تقدير معلمات توزيع Weibull القطبي

الجدول (A-2)

نتائج تقدير المعلمات بالطرائق (MLE, OLS) مع قيم MSE والرتب الموافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=1, \lambda=1$

Methods		MLE	OLS
n=30	$\hat{a}$	1.076151	1.0070234
	MSE	0.05182986	0.0630719
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.068752	0.9797992
	MSE	0.09067967	0.1085911
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=50	$\hat{a}$	1.043295	1.0026707
	MSE	0.02556721	0.03498138
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.039844	0.9835911
	MSE	0.05129147	0.06321601
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=75	$\hat{a}$	1.026816	1.0076090
	MSE	0.01601519	0.02415907
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.025745	0.9973073
	MSE	0.03563039	0.04610281
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	1.014704	0.9930381
	MSE	0.01189436	0.01726074
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.010341	0.9801059
	MSE	0.02678021	0.03439785
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$

الجدول (A-3)

نتائج تقدير المعلمات بالطرائق (MLE, OLS) مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,1,100) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=1.5, \lambda=1$

Methods		MLE	OLS
n=30	$\hat{a}$	1.605637	1.5125945
	MSE	0.10111022	0.12123114
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.022580	0.9804795
	MSE	0.02863367	0.03451328
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=50	$\hat{a}$	1.568534	1.5073807
	MSE	0.05484499	0.07570235
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.018896	0.9889674
	MSE	0.01790858	0.02256338
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=75	$\hat{a}$	1.533256	1.4971598
	MSE	0.03228726	0.04434253
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.008690	0.9900059
	MSE	0.01170511	0.01375820
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	1.527959	1.4987040
	MSE	0.02375589	0.03343668
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.006228	0.9915459
	MSE	0.008296567	0.01016724
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$



المقارنة بين طريقتي التقدير ( الامكان الاعظم والمربعات الصغرى الاعتيادية) في تقدير معلمات توزيع Weibull القطبي

الجدول (A-4)

نتائج تقدير المعلمات بالطرائق (MLE, OLS) مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=2, \lambda=1$

Methods		MLE	OLS
n=30	$\hat{a}$	2.105298	1.9852530
	MSE	0.14306047	0.19266258
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.007407	0.9813701
	MSE	0.01281118	0.01664863
	Rank	1	1
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=50	$\hat{a}$	2.075749	1.9996744
	MSE	0.086795217	0.113164642
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.004871	0.9884406
	MSE	0.008243199	0.009793328
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=75	$\hat{a}$	2.041705	2.0012754
	MSE	0.055680864	0.081320736
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.004655	0.9952082
	MSE	0.005584468	0.006634397
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	2.040389	2.006282
	MSE	0.040599328	0.05646465
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	1.002766	0.994568
	MSE	0.004057834	0.00467729
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$

الجدول (A-5)

نتائج تقدير المعلمات بالطرائق (MLE, OLS) مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=0.5, \lambda=2$

Methods		MLE	OLS
n=30	$\hat{a}$	0.5516135	0.5155954
	MSE	0.01687842	0.01922866
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	3.0111973	2.5329327
	MSE	5.53408639	5.07129622
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=50	$\hat{a}$	0.5247712	0.5040366
	MSE	0.00801173	0.01065338
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.5263579	2.2625751
	MSE	2.53327334	2.83254484
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=75	$\hat{a}$	0.5143201	0.4999425
	MSE	0.004481956	0.006506863
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.3212739	2.1450906
	MSE	1.317041261	1.583832072
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	0.5146717	0.5018269
	MSE	0.003682559	0.005209361
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.3032198	2.1435762
	MSE	1.075590833	1.288534321
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$

المقارنة بين طريقتي التقدير ( الامكان الاعظم والمربعات الصغرى الاعتيادية) في تقدير معلمات توزيع Weibull القطبي

الجدول (A-6)

نتائج تقدير المعلمات بالطرائق (MLE, OLS) مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=1, \lambda=2$

Methods		MLE	OLS
n=30	$\hat{a}$	1.048380	0.9813277
	MSE	0.04614486	0.06009174
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.064942	1.8871935
	MSE	0.32511117	0.43197563
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=50	$\hat{a}$	1.040566	1.005945
	MSE	0.02568613	0.0349324
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.070768	1.974519
	MSE	0.20917119	0.2603720
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=75	$\hat{a}$	1.027594	0.999089
	MSE	0.01609828	0.02321211
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.045106	1.963731
	MSE	0.13259799	0.17356819
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	1.020609	0.996149
	MSE	0.01275966	0.0169394
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.036039	1.974373
	MSE	0.11448383	0.1437488
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$

الجدول (A-7)

نتائج تقدير المعلمات بالطرائق (MLE, OLS) مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجومات عينات (n= 30,50,75,100) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=1.5, \lambda=2$

Methods		MLE	OLS
n=30	$\hat{a}$	1.602726	1.512022
	MSE	0.1047477	0.1389435
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.044378	1.953076
	MSE	0.1174833	0.1441431
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=50	$\hat{a}$	0.1552033	1.503693
	MSE	0.05269085	0.07699892
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.018963	1.967215
	MSE	0.06255054	0.08174980
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=75	$\hat{a}$	1.533477	1.495051
	MSE	0.03508843	0.04542637
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.015281	1.977711
	MSE	0.05048858	0.05874045
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	1.531944	1.503615
	MSE	0.02366463	0.03413942
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.011287	1.984210
	MSE	0.03246580	0.04073387
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$

الجدول (A-8)

نتائج تقدير المعلمات بالطرائق (MLE , OLS) مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=2, \lambda=2$

Methods		MLE	OLS
n=30	$\hat{a}$	2.126482	2.003777
	MSE	0.17871537	0.22814258
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.012735	1.956389
	MSE	0.05376099	0.0691254
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=50	$\hat{a}$	2.087174	2.01158
	MSE	0.09444383	0.11748985
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.020023	1.98809
	MSE	0.03350045	0.03907663
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=75	$\hat{a}$	2.057566	1.997245
	MSE	0.05878507	0.07876022
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.010461	1.984648
	MSE	0.02209154	0.02578324
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	2.040592	2.006652
	MSE	0.03985026	0.05474479
	Rank	1	2
	$\hat{\lambda}$	2.003843	1.988828
	MSE	0.01608948	0.01875212
	Rank	1	2
$\sum Rank$		$2^1$	$4^2$