مقارنة بين مقدرات بيز القياسية وطريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمة توزيع ماكسويل باستخدام المحاكاة

م.م. نجم عبد عليوي
وزارة التربية/مديرية تربية ذي قار

م.م. سامي عطية سيد
جامعة ميسان / كلية التربية الأساسية /قسم الرياضيات

الملخص

تم في هذا البحث استخدام المحاكاة في أيجاد مقدرات معلمة القياس θ لتوزيع ماكسويل بين مقدر الإمكان الأعظم ومقدرات بيز القياسية تحت دوال خسارة مختلفة واستندت المقارنة الى توظيف أسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو لإجراء المقارنة بين مقدرات(الإمكان الأعظم وبيز القياسي) ، وذلك بتوليد أرقام عشوائية بالاعتماد على حجوم عينة مساوية إلى (60,100 و 30 و n = 10) وقيم معالم مساوية إلى (3 و 1.5 و θ = 0.5) و(1.5 و α = 0.5) ($c = 1$) , حيث تم التوصل إلى أن مقدر بيز ذات دالة التوزيع الأولى أكفأ من مقدر بيز ذات دالة التوزيع السابق الثانية وكذلك هي أكفأ من مقدر الإمكان الأعظم ، وأن مقدر بيز باستعمال دالة الخسارة اللوغاريتمية لهُ الأفضلية على استخدام دالة خسارة الأنتروبي ، وكلما تكون قيم (α, θ) قيم صغيرة تكون نتائج المحاكاة الأفضلية لجميع التقديرات ، وأن قيم الــ MSE تقل كلما أزداد حجم العينة .

ABSTRACT

Based search method to use simulation to find the capabilities of measuring a parameter θ to distribute Maxwell between the capabilities of Bayes standard and method of maximum likelihood under the functions of different loss, and based on comparison to Monte Carlo study based on average error boxes MSE where it was concluded that the estimator Bayes with the first distribution function efficiently from estimator with a second former distribution function as well as the most efficient of the estimated maximum likelihood, and that is destined Bayes using loss logarithmic his function in preference to use the loss of entropy function ,and you are to the values of (α, θ) small values are simulation results preference to all estimates, and that the values of the MSE less greater the sample size.

1.المقدمة وهدف البحث

أَجريت العديد من الدراسات حول توزيع ماكسويل ففي عام ٢٠١٣ قدمت الباحثة نسيم البلداوي دراسة حول مقارنة مقدر الأرجحية العظمى وبعض مقدرات بيز لتوزيع ماكسويل وفقاً لدوال أسبقية لا معلوماتية كل من دالة جفري وجفري الموسعة باستعمال دالة الخسارة التربيعية والتربيعية الموسعة وأظهرت النتائج كفاءة مقدر بيز [1] ، وفي العام نفسه قامت الباحثة هدى عبد الله رشيد دراسة باستخدام المحاكاة باستعمال طريق الإمكان الأعظم والعزوم لتقدير معلمة توزيع ماكسويل [2] ، وفي عام ٢٠١٤ قام الباحثان R.S.Srivastava & Kusum Lata دراسة حول معكوس ماكسويل وتقدير المعلمة باستخدام طريقة الإمكان الأعظم والعزوم [7]

وفي عام ٢٠١١ قام الباحثان Anwer M. Hussain & Gabriel Huerta باستخدام طرائق مختلفة لتقدير المعلمة والدالة المعولية لتوزيع ماكسويل وتمت المقارنة بين الطرائق باستخدام طريقة مونت كارلو [4] .

يهدف هذا البحث إلى تقدير المعلمة باستخدام طريقة الإمكان الأعظم والطرائق البيزية القياسية باستخدام نوعين من المعلومات النوع الأول يعتمد على معلومات جفري المعتمدة على معلومة فيشر والنوع الثاني عندما يكون التوزيع المسبق لـــ θ هو التوزيع الأسي ، وتم استعمال دوال خسارة الدالة اللوغارتمية التربيعية وكذلك دالة خسارة الانتروبي وتم توظيف أسلوب المحاكاة للمقارنة بين الطرائق وتم اختيار عينات صغيرة (10) وعينات متوسطة (30, 60) وعينات كبيرة (100) لمعرفة الطريقة البيزية الأفضل من بين الطرائق البيزية وكذلك مدى ملائمة دوال الخسارة المعتمدة ومقارنة الطريقة البيزية الأفضل مع طريقة الإمكان الأعظم .

2. طرق التقدير :

إن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ((Maxwell)) التي تحتوي على معلمة القياس Scale parameter (θ) تكون حسب الصيغة التالية [2]

$$f(x_i;\theta) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\theta^{\frac{3}{2}}} x^2 \; e^{\frac{-x^2}{\theta}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

حيث $\theta > 0$ وتمثل معلمة القياس $x \in [0,\infty)$

1.2. طريقة الإمكان الأعظم :

تعد هذه الطريقة من الطرائق المهمة لأنها تمتاز بالثبات والاتساق وتتلخص هذه الطريقة بجعل دالة الإمكان الأعظم في نهايتها العظمى ، وأن دالة الإمكان الأعظم لتوزيع ماكسويل هي :[2]

$$L(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

$$= \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\theta^{\frac{3n}{2}}}\right) \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right) e^{\frac{-\sum x_i^2}{\theta}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (٢) تصبح :

$$\ln \mathrm{L}(x_i;\theta) = n\ln\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)^n - \frac{3n}{2}\ln\theta + 2\sum \ln x_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{x^2}{\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

و باشتقاق معادلة (3) بالنسبة إلى θ ومساواتها إلى الصفر نحصل على :

$$\frac{-3n}{2}\ \frac{1}{\theta} + \frac{\sum x_i^2}{\theta^2} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)\ \hat{\theta} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{3n}$$

2.2. طريقة بيز القياسية (Standard Bayes Method) :

تعتمد طريقة بيز في تقدير المعلمات على استخدام معلومات أولية (Prior Information) عن المعلمات غير المعلومة باعتبارها متغيرات عشوائية (Random Variables) وليست كميات ثابتة من خلال توظيف دالة التوزيع السابق (Prior Distribution) للحصول على توزيع لاحق يدعى بالتوزيع البعدي (Posterior Distribution) ومنهُ يتم الوصول إلى مقدر بيز باستعمال دالـــــــة الخـــسارة (Loss function) ودالة (Risk function) التي تمثل التوقع لدالة الخسارة وبذلك يتم أيجاد أقل مخاطرة بيزية ممكنة[6] .

أما في حالة عدم توفر معلومات مسبقة عن المعلمة المراد تقديرها من الأفضل استخدام صيغة جفري (Jeffrey formula) لإِستخراج التوزيع القبلي وكما يلي :

1.2.2. دالة التوزيع السابق الأولى :

إذ يتم أستخراج دالة التوزيع السابق الأولى بالاعتماد على معلومات جفري المعتمدة على معلمة فيشر وكما يلي : [6]

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)\, g(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$$

إذ أن $I(\theta)$ هي معلومة فيشر (Fisher Information) والتي تساوي :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)\ I(\theta) = -nE\left(\frac{\partial^2 Lnf(x_i;\theta)}{\partial^2\theta}\right)$$

$$\frac{\partial Lnf(x_i;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{-3n}{2\theta} + \frac{\sum {x_i}^2}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 Lnf(x_i;\theta)}{\partial^2\theta} = -\frac{3n}{2\theta^2} - \frac{2\sum {x_i}^2}{\theta^3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

ومن تعويض معادلة (7) في معادلة (6) نحصل على :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)\ I(\theta) = \frac{3n}{2\theta^2}$$

ومن تعويض معادلة (8) في معادلة (5) نحصل على :

$$g(\theta)=\sqrt{\frac{3n}{2}}\ \frac{k}{\theta} \quad \text{(9)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

إن دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة هي : [1]

$$H(\theta|x)=\frac{L(x_i;\theta)g(\theta)}{\int_0^\infty L(x_i;\theta)g(\theta)\,d\theta} \quad \text{(10)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ومن تعويض معادلة (2) و معادلة (9)في معادلة (10) نحصل على :

$$H(\theta|x)=\frac{\theta^{\frac{-3n}{2}-1}\, e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}}}{\int_0^\infty \theta^{\frac{-3n}{2}-1}\, e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}}\,d\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(11)}$$

$$\text{Let} \quad y=\frac{\sum x_i^2}{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(12)}$$

$$|J|=\left|\frac{dy}{d\theta}\right| \Rightarrow d\theta=\frac{\theta^2}{\sum x^2}dy \quad \text{(13)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

بعد التعويض (12),(13) بمعادلة (11) نحصل على:

$$H(\theta|x)=\frac{y^{\frac{3n}{2}+1}\, e^{-y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\int_0^\infty y^{\frac{3n}{2}-1}\, e^{-y}\,dy}$$

وبما أن

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty y^n e^{-y}\,dy$$

لذلك يكون

$$H(\theta|x)=\frac{y^{\frac{3n}{2}+1}\, e^{-y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,\Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)}$$

لذلك دالة التوزيع الاحتمالية اللاحقة تأخذ الشكل التالي :

$$H(\theta|x)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{3n}{2}}\ e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}}}{\theta^{\frac{3n}{2}+1}\ \Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)} \quad \text{(14)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.2.2. الخسارة :

سنتناول في هذا البند بعض من دوال الخسارة لايجاد مقدرات بيز و هي:

أولاً: استعمال دالة الخسارة اللوغارتمية [5]

ان الصيغة العامة لهذه الدالة هي كالاتي

$$L(\hat{\theta},\theta) = c\left(ln\hat{\theta} - ln\theta\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

$$Risk = E\left(L(\hat{\theta},\theta)\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

$$Risk = \int_0^\infty c\left[\left(ln\hat{\theta}\right)^2 - 2\, ln\hat{\theta}\, ln\theta + (ln\theta)^2\right].H(\theta|x)\, d\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

وبأخذ المشتقة لطرفي المعادلة (17) نحصل على :

$$\frac{\partial Risk}{\partial \hat{\theta}} = 2c\frac{1}{\hat{\theta}}ln\hat{\theta} - 2c\frac{1}{\hat{\theta}}\int_0^\infty ln\theta\, H(\theta|x)\, d\theta + 0$$

$$\frac{\partial Risk}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

لذلك يكون مقدر المعلمة كالآتي :

$$ln\hat{\theta} = \int_0^\infty ln\theta\, H(\theta|x_1, \ldots, x_n)\, d\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

وبتعويض معادلة(14) في معادلة (18) نحصل على

$$ln\theta = \int_0^\infty ln\hat{\theta}\, \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{3n}{2}} e^{\frac{-\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta}}}{\theta^{\frac{3n}{2}+1}\, \Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)}\, d\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

ومن تعويض معادلة في (12),(13) في معادلة (19) نحصل على:

$$ln\theta = \int_0^\infty \frac{ln\left(\frac{\sum x_i^2}{y}\right)\left(\sum x_i^2\right)^{\frac{3n}{2}} e^{-y}}{\left(\frac{\sum x_i^2}{y}\right)^{\frac{3n}{2}+1}\Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)}\, dy$$

$$= \int_0^\infty \left[ln\left(\sum x_i^2\right) - lny\right] \frac{y^{\frac{3n}{2}-1}\, e^{-y}\, dy}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)}$$

$$\text{Let} \quad ln\hat{\theta} = I_1 + I_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

$$I_1 = \int_0^\infty ln\left(\sum x_i^2\right) \frac{y^{\frac{3n}{2}-1}\, e^{-y}\, dy}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)}$$

$$= ln\left(\sum x_i^2\right) \int_0^\infty \frac{y^{\frac{3n}{2}-1}\, e^{-y}\, dy}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)}$$

$$= ln\left(\sum x_i^2\right)$$ ………..…………….(21).

$$I_2 = \int_0^\infty lny\, \frac{y^{\frac{3n}{2}-1}\, e^{-y}\, dy}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)}$$

بما أن

$$\Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right) = \int_0^\infty y^{\frac{3n}{2}-1}\, e^{-y}\, dy$$

نلاحظ أن

…………………………………... (22) $\varphi\left(\frac{3n}{2}-1\right) = \frac{2}{3}\,\frac{\partial ln}{\partial n}\,\Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)$

Where φ is Digamma function.

………………………………..……. (23) $I_2 = \varphi\left(\frac{3n}{2}-1\right)$

من تعويض المعادلة (21١) و (23) بمعادلة (20) نحصل على :

$$ln\hat{\theta} = ln\left(\sum x_i^2\right) - \varphi\left(\frac{3n}{2}-1\right)$$

…………………………………..……... (24) $\hat{\theta} = exp\left[ln\left(\sum x_i^2\right) - \varphi\left(\frac{3n}{2}-1\right)\right]$

ثانيا: دالة خسارة الانتروبي العامة [6]

الصيغة العامة لدالة خسارة الانتروبي العامة هي

$$; W > 0 \;\; ; \;\; c \neq 0\;\; L_2(\hat{\theta},\theta) = W\left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^c - c\, ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1\right]$$

$$R_{GE}\left((\hat{\theta},\theta)\right) = E\left(L_2(\hat{\theta},\theta)\right)$$

$$= \int_0^\infty W\left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^c - c\, ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1\right] H(\theta|x)\, d\theta$$

$$\frac{\partial R_{GE}}{\partial \hat{\theta}} = \int_0^\infty W\left[\frac{c}{\theta}\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^{c-1} - \frac{c}{\hat{\theta}}\right] H(\theta|x)\, d\theta$$

$$\frac{\partial R_{GE}}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

$$\text{.............................} \ (25) \left(\frac{1}{\hat{\theta}}\right) = \hat{\theta}^{c-1} \int_0^\infty \frac{1}{\theta^c} H(\theta|x)\, d\theta$$

من تعويض معادلة (14) بمعادلة (25) نحصل على :

$$\frac{1}{\hat{\theta}^c} = \int_0^\infty \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{3n}{2}} e^{\frac{-\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta}}}{\theta^{\frac{3n}{2}+c+1}\ \Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)} d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+c+1\right)}{\left(\sum x_i^2\right)^{c+1} \Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)} \int_0^\infty \frac{\left(\sum x_i^2\right)^{\frac{3n}{2}+c+1} e^{\frac{\sum x_i^2}{\theta}}}{\theta^{\frac{3n}{2}+c+1}\ \Gamma\left(\frac{3n}{2}+c+1\right)} d\theta$$

$$\frac{1}{\hat{\theta}^c} = \frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+c+1\right)}{\left(\sum x_i\right)^{c+1} \Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)}$$

$$\text{.............................} \ (26) \ \hat{\theta} = \left[\frac{\left(\sum x_i^2\right)^{c+1} \Gamma\left(\frac{3n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+c+1\right)}\right]^{\frac{1}{c}}$$

3.2.2. دالة التوزيع السابق الثانية :

ان التوزيع المسبق لــ θ و التوزيع الأسي هو كالاتي:

$$\text{...................} \ (27) \quad g_2(\theta) = \frac{1}{\theta}\, e^{\frac{-\alpha}{\theta}} \qquad ;\ \theta > 0\,;\ \alpha > 0$$

من تعويض معادلة (2) ومعادلة (27) في معادلة (9) نحصل على :

$$\text{..................................} \ (28) \ H_2(\theta|x) = \frac{\left(\sum x_i^2+\alpha\right)^{\frac{3n}{2}+1} e^{\frac{-\left(\sum x_i^2+\alpha\right)}{\theta}}}{\theta^{\frac{3n}{2}+1}\ \Gamma\left(\frac{3n}{2}+1\right)}$$

اولا: دوال الخسارة اللوغاريتمية

$$Risk = E\left(L \ \left(\hat{\theta},\theta\right)\right)$$

وبتعويض معادلة (15),(28) في معادلة (16)

$$Risk = \int_0^\infty c\left[\left(ln\hat{\theta}\right)^2 - 2\, ln\hat{\theta}\, ln\theta + (ln\theta)^2\right].H_2(\theta|x)\, d\theta$$

بأخذ المشتقة لطرفي المعادلة ومساواتها الى الصفر نحصل على :

$$ln\hat{\theta} = \int_0^\infty ln\theta\, H_2(\theta|x)\, d\theta$$

$$ln\theta = \int_0^\infty \frac{ln\theta \left(\sum x_i^2+\alpha\right)^{\frac{3n}{2}+1} e^{\frac{-\left(\sum x_i^2+\alpha\right)}{\theta}}}{\theta^{\frac{3n}{2}+1}\ \Gamma\left(\frac{3n}{2}+1\right)} d\theta \qquad \text{........................}(29)$$

بأستخدام التحويلات وأخذ $y=\frac{\sum x_i^2+\alpha}{\theta}$ وتعويضها بالمعادلة (29)نحصل على :

$$ln\hat{\theta}=\int_0^\infty [ln(\sum x_i^2+\alpha)-lny]\ \frac{y^{\frac{3n}{2}+1}e^{-y}\,dy}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+1\right)}$$

Let $ln\hat{\theta}=I_1+I_2$ .... (30)

$$I_1=ln\left(\sum x_i^2+\alpha\right)\int_0^\infty \frac{y^{\frac{3n}{2}+1}e^{-y}\,dy}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+1\right)}$$

$$I=ln\left(\sum x_i^2+\propto\right) \qquad \text{.............................. (31)}$$

$$I_2=\int_0^\infty lny\ \frac{y^{\frac{3n}{2}+1}e^{-y}\,dy}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+1\right)}$$

$$\varphi\left(\frac{3n}{2}+1\right)=\frac{2}{3}\frac{\partial ln}{\partial n}\ \Gamma\left(\frac{3n}{2}+1\right)$$

بما أن $\varphi\left(\frac{3n}{2}+1\right)$ تمثل مشتقة الكاما بالنسبة إلى n

$$I_2=\varphi\left(\frac{3n}{2}+1\right) \qquad \text{(32) ....}$$

بتعويض المعادلة (31) والمعادلة (32) في المعادلة (30) نحصل على :

$$ln\hat{\theta}=ln\left(\sum x_i^2+\alpha\right)-\varphi\left(\frac{3n}{2}+1\right)$$

$$\hat{\theta}=exp\left[ln\left(\sum x_i^2+\alpha\right)-\varphi\left(\frac{3n}{2}+1\right)\right] \qquad \text{(33) ....}$$

ثانيا: دالة خسارة الانتروبي العامة

$$R_{GE}\left(\left(\hat{\theta},\theta\right)\right)=E\left(L_2\left(\hat{\theta},\theta\right)\right)$$

$$=\int_0^\infty W\left[\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^c-c\ ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)-1\right]H_2(\theta|x)\,d\theta \qquad \text{................(34)}$$

وبتعويض معادلة (28) في معادلة (34) وبأخذ المشتقة بالنسبة الى θ ومساواتها للصفر نحصل على :

$$\frac{1}{\hat{\theta}^c}=\int_0^\infty \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2+\alpha\right)^{\frac{3n}{2}} e^{\frac{-\sum_{i=1}^n x_i^2+\alpha}{\theta}}}{\theta^{\frac{3n}{2}+c+1}\ \Gamma\left(\frac{3n}{2}+1\right)}\,d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+c+1\right)}{\left(\sum x_i^2+\alpha\right)^c \Gamma\left(\frac{3n}{2}+1\right)} \int_0^\infty \frac{\left(\sum x_i^2+\alpha\right)^{\frac{3n}{2}+c+1} e^{\frac{\sum x_i^2+\alpha}{\theta}}}{\theta^{\frac{3n}{2}+c+1}\Gamma\left(\frac{3n}{2}+c+1\right)} d\theta$$

$$\hat{\theta} = \left[\frac{\left(\sum x_i^2+\alpha\right)^c \Gamma\left(\frac{3n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+c+1\right)}\right]^{\frac{1}{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

الجانب التجريبي

تم استخدام المحاكاة بطريقة مونت كارلو لكونها تمتاز بالمرونة اذ تعطي القدرة على التجريب والاختبار من خلال تكرار العملية لمرات عديدة .

لذلك تم اختيار القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع فكانت $(\theta = 0.5\ ,1.5\ ,3\ )$ ، $(\alpha = 0.5\ ,1.5\ )$ ، (c=1) وكانت حجوم العينات (n = 10 , 30 , 60 , 100) وتم المقارنة بين أفضلية المقدرات التي تم التوصل إليها باستخدام مقياس (MSE) [2] .

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{\theta}_i - \theta)^2$$

واختيرت تكرار العينة (N=3000) .

جدول (١) متوسط مربعات الخطأ عندما $(\hat{\theta} = 0.5)$

n	MLE	Bayes 1		Bayes 2			
		θ Log_1	θ Ent_1	θ Log_2		θ Ent_2	
				$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.5$
10	0.0000324209	0.0000141243	0.0000141257	0.0000321607	0.0000324571	0.0000325704	0.00003287023
30	0.0000106204	0.00000287356	0.000002873308	0.0000159296	0.0000162545	0.000016357	0.0000166715
60	0.000003242095	0.000001412429	0.00000141237	0.00000321607	0.00000324571	0.00000325704	0.00000328702
100	0.000002270742	0.000000841751	0.00000084170	0.00000233416	0.00000234612	0.00000227626	0.00000228790

جدول (2) متوسط مربعات الخطأ عندما $(\hat{\theta} = 1.5)$

N	MLE	Bayes 1		Bayes 2			
		$\theta\ Log_1$	$\theta\ Ent_1$	$\theta\ Log_2$		$\theta\ Ent_2$	
				$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.5$
10	0.03012918	0.000083333	0.00006291	0.0281768	0.0283087	0.03019939	0.03034005
30	.0.00178417	0.0000258621	0.000025801	0.00174881	0.00178631	0.001740575	0.001740575
60	0.0003402241	0.00001271186	0.00001269695	0.0003366122	0.0003369153	0.000340377	0.0003006837
100	0.0002341407	0.000007575758	0.0000075735	0.000239477	0.0002395984	0.0002342	0.0002343184

جدول (3) متوسط مربعات الخطأ عندما $(\hat{\theta} = 3)$

n	MLE	Bayes 1		Bayes 2			
		$\theta\ Log_1$	$\theta\ Ent_1$	$\theta\ Log_2$		$\theta\ Ent_2$	
				$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.5$
10	0.05076594	0.00033333	0.000011848	0.04656143	0.04060789	0.0507948	0.0508239
30	0.03095051	0.000103448	0.00001015887	0.03026428	0.03028244	0.0309598	0.03097838
60	0.005779468	0.0000508471	0.0000050371	0.00571804	0.00571929	0.0057801	0.00578136
100	0.00396235	0.00003030303	0.00000302311	0.00404941	0.004049903	0.003962591	0.00396308

نتائج المحاكاة

١) من جدول (١) و (٢) و (٣) نلاحظ بأن مقدر بيز ذات دالة التوزيع الأولى أكفأ من مقدر بيز ذات دالة التوزيع السابق الثانية وكذلك هي أكفأ من مقدر الإمكان الأعظم .

٢) نلاحظ بأن مقدر بيز باستعمال دالة الخسارة اللوغاريتمية لهُ الأفضلية على استخدام دالة خسارة الأنتروبي .

٣) أظهرت نتائج المحاكاة ولجميع التقديرات الأفضلية عندما تكون فيه كل من (α, θ) قيم صغيرة .

٤) أظهرت نتائج البحث بأن قيم (MSE) تقل كلما أزداد َ حجم العينة وهذا يتفق مع النظرية الإحصائية .

التوصيات

- يوصي الباحثان باعتماد طريقة بيز الثانية مع دوال خسارة أخرى .
- يوصي الباحثان باعتماد طريقة التقلص ومقارنتها مع الطرق البيزية .

المصادر

[1] Al-Baldawi , Tasnim H. K. (2013) "Comparison of maximum likelihood and some Bayes Estimation for Maxwell Distribution based on Non-iformative Priors" J. Baghdad for sci. vol. 10 (2) .

[2] Rashee ,Huda A. (2013) " Mini max Estimation of the parameter of the Maxwell Distribution under quadratic lose function" Journal of AL Rafidain University college , ISSN(1681-6870) .

[3] Fan. G. (2016) "Estimation of the loss and Risk functions of parameter of Maxwell Distribution" .

[4] Husain, Anwar M. and Huerta G.(2016)"Bayesian Estimation and prediction for the Maxwell failure Distribution Based on type || censored data.

[5] Li La(2013) "mini max Estimation of parameter of Generalized Exponential Distribution under square log Errer Loss and MLINEX Loss Function" Reserch journal of Mathematics and Statistics 5 (3):24-27 .

[6] Oayd G. R. (2012) "A comparison of Bayes Estimation for parameter and Reliability and Failure Rate functions for Rayleigh Distribution by using Balanced and unbalance loss functions" , M. Sc. In statistics thesis , university of Mustansiriah.

[7] Singh K. L. Srivastava R. S. (2014) "Inverse Maxwell Distribution as a Survival mode , Genesis and parameter Estimation" , Research journal of math and statistical Sci. , ISSN(2320-6047) .