طريقة لتوسيع التوزيع المنطقي ذو المعلمتين إلى ثلاث معلمات بإدخال معلمة الالتواء ومقارنة طرائق تقديرها بواسطة المحاكاة

أ.م.د. محمد صادق عبد الرزاق
جامعة بغداد/كلية الادارة والاقتصاد
قسم الإحصاء

المستخلص

يتضمن هذا البحث مناقشة الخصائص المختلفة لنوعين من تعميمات التوزيع اللوجستي والتي تستخدم غالبا في تمثيل نماذج البيانات ذات المنوال الوحيد والتي تتمتع بالتواء ظاهر، التوزيع الاول يسمى بالتوزيع اللوجستي الملتو (Skew logistic distribution) وهو توزيع ذو منوال وحيد ويتصف بصفة التقعر (Concave) في حالة اخذ اللوغاريتم للبيانات،واهم ما يتميز به هذا التوزيع هو ان دالة التوزبع التراكمية ومعدل الفشل والعزوم المختلفة له لايمكن تعريفها بصورة واضحة وصريحة ،مما يجعله صعب الاستخدام في التطبيق العملي، اما النوع الثاني فيسمى التوزيع اللوجستي (المنطق) (Logistic Distribution) فمن خصائصه انه توزيع ذو منوال وحيد و تتناسب فيه الدالة الاحتمالية (p.d.f) مع دالة المخاطرة (hazard) ،وان الدالة التراكمية له ودالة المخاطرة ايضا تمثل صيغة معقدة ، لكن ممكن الحصول على العزوم المختلفة له بدلالة دالة ψ ومشتقتها ،وان هذا التوزيع هو من التوزيعات الملتوية الثقيلة الذيل (Heaving tail distribution) وتسمى دالة الاحتمالية (log-concave density function) وسيتم تقدير المعلمات الثلاث (λ, μ, α) للتوزيع اللوجستي الملتو باستخدام طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم ،وبواسطة المحاكاة. حيث ستقدر معلمة الالتواء (α) اولا للتوزيع اللوجستي القياسي $SL(\alpha)$ بواسطة طريقة العزوم،لان معادلة الامكان الاعظم معقدة ولايمكن حلها بسهولة ،وبعد الحصول على المقدر $(\hat{\alpha})$ نعتمد عليه في التوصل الى مقدري $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ مما يساعد ذلك في اجراء توفيق لمنحني البيانات التي تتبع التوزيع اللوجستي الملتو واجراء اختبار حُسن المطابقة .

تنفذ تجارب المحاكاة باعتبار $(n = 10,25,50,100)$ وتكرار كل تجربة $(R = 1000)$واعتمادا على القيمة المثلى لمقدر المعلمة $(\alpha = 0.1(0.1)2)$،وبهذه التجارب نكون قد حصلنا على مقدرات لمعلمات التوزيع اللوجستي الملتو والذي يلائم الكثير من البيانات الاحصائية ،حيث لا تتبع بياناتها التوزيع الطبيعي وخاصة في التجارب الحياتية والتجارب الطبية،والبيانات المتعلقة بالظواهر الطبيعية.

Abstract

This paper discuss the generalization of a family of proportional reverse hazard distribution (PRHL) ,when the base line distribution is the tw0-parameter logistic distribution , also it is know as Type-I generalized Logistic distribution .The (PRHL) dist. Has Location , scale and Skewness parameter (μ, λ, α) . The PDF of (PRHL) always unimodal and Log-Concave, while the distribution function, hazard function have explicit forms of moments which are expressed in terms of digamma and poly gamma function. If all three parameters are unknown ,the Maximum likelihood estimators do not exist, however if the Location parameter (μ) known, then MLE for (λ, α) exist?

So we propose some alternate estimator for the skewness parameter by applying simulation procedure to generate the values of X from C.D.F of $PRHL(\alpha)$ and then estimate (α) by some numerical method. Then we use the estimator $(\hat{\alpha})$ as initial values and then estimate $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$ by MLE also for principle of comparison we estimators and use this estimators to modify the estimator of (α). The comparison between estimators ware done through MSE.

هدف البحث

يهدف هذا البحث الى التعريف بالتوزيع اللوجستي الملتو وخصائصه الرياضية وكيفية تقدير معلماته الثلاث (λ, μ, α)حيث ان (α) تمثل معلمة الالتواء ،(μ) معلمة الموقع و (λ) معلمة القياس ،ولصعوبة الحصول على مقدرات بتطبيق الامكان الاعظم ارتأينا تقدير معلمة الالتواء (α) ثم الاعتماد عليها في تقدير المعلمتين (μ, λ) وبواسطة المحاكاة .و لان معادلات الامكان الاعظم معقدة فقد اقترح اسلوب بديل لتقدير المعلمة (α) واعتمادها في تقدير المعلمتين (μ, λ) ومن ثم مقارنة نتائج هذا المقدر المقترح لــ(α) ومقدر العزوم لنفس المعلمة والمقدرات الناتجة منها بالنسبة الى (μ, λ) بواسطة MSE .

الجانب النظري

ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع اللوجستي (μ,λ) X~logistic distribution حيث μ معلمة الموقع (Location parameter) و λ معلمة القياس (Scale parameter) و $\lambda>0$ وحسب الدالة الاحتمالية (p.d.f) في الصيغة (1) الاتية :

$$f(x;\mu,\lambda)=\frac{e^{-\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)}}{\lambda\left(1+e^{-\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)}\right)^2}\qquad -\infty<x<\infty \qquad \ldots\ (1)$$

اما الدالة التجميعية (C.D.F) فهي

$$F(x;\mu,\lambda)=\frac{1}{1+e^{-\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)}}\qquad -\infty<x<\infty \qquad \ldots\ (2)$$

ان الصيغة الدالة (1) متناظرة حول المعلمة λ ،وسوف نرمز لها اختصاراً بالتوزيع المنطقي (اللوجستي) $L(\mu,\lambda)$.

بالرغم من وجود عدة توزيعات ملتوية في الواقع التطبيقي ، لكنها ليست جميعها سهلة الاستخدام في الواقع التطبيقي،ولسنا هنا بصدد عرض هذه التوزيعات الملتوية ،لكن المهم في الامر هو ادخال معلمة الالتواء على التوزيع اللوجستي ،مما يتيح ذلك لنا استخدامه في نمذجة دوال احتمالية وحيدة المنوال وفيها التواء ظاهر في البيانات وهي صفة غالبة في معظم التطبيقات التي لا تتبع بياناتها التوزيع الطبيعي كما اشار الى ذلك كل من الباحث Azzalini والباحث Genton وعند ادخال معلمة الالتواء يصبح للتوزيع ثلاث معلمات هي معلمة الموقع (μ) ،معلمة القياس (λ)ومعلمة الالتواء (α)، عندئذ يكون شكل الدالة الاحتمالية

$$f_1(x,\alpha,\mu,\lambda)=\frac{2\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}}{(1+e^{-\lambda(x-\mu)})^2(1+e^{-\alpha\lambda(x-\mu)})}\quad -\infty<x<\infty \qquad \ldots\ (3)$$

وان معلمة الموقع $\mu\in(-\infty,\infty)$ وان $\lambda>0$

ان الصيغة (3) يمكن ان تاخذ اشكالا مختلفة بالاعتماد على قيم معلمة الالتواء (α) فيما اذا كانت سالبة او موجبة نوبسبب وجود الالتواء سيكون التوزيع اللوجستي الملتو من نوع التوزيعات الثقيلة او المتينة الذيل والتي تميل فيها البيانات للمجتمع اما لليسار او لليمين،وقارنة بالتوزيع الطبيعي الملتو.

ولابد من ملاحظة ان (p.d.f) الموضحة في الصيغة (3) للتوزيع اللوجستي الملتو ،بالرغم من انها وحيدة المنوال وهي (log-concave) **(**مقعرة لوغارتمياً**)** و بسبب طبيعة الدالة التجميعية (C.D.F) ودالة معدل الفشل (Failure rate function) للصيغة (3) فان العزوم المختلفة لا يمكن الحصول عليها بصيغ صريحة وواضحة وان مقدر الامكان الاعظم لمعلمة الالتواء غير موجود ، وبسبب هذه الصعوبات ،يبدو من غير الممكن اعتماد التوزيع اللوجستي الملتو (Skew logistic distribution) في تقدير المعلمات ومن ثم تحليل البيانات واستخراج المؤشرات منها ، و لذلك سوف نعتمد على دالة التردد المعكوسة (reverse hazard distribution function) عندما يكون التوزيع الاساسي هو (Two parameter logistic distribution) وقد اقترح العديد من الباحثين ،على سبيل المثال لا الحصر، Kotz &Balakrishnan و Olapade ، صيغ مختلفة لالتواء التوزيع اللوجستي. وفي بحثنا هذا سوف نتناول مناقشة مقترح Azzalini والذي يتضمن استخدام معكوس دالة التردد المتناسبة في التوزيع اللوجستي (PRHL) Proportional reversed hazard logistic او يمكن تسميته ايضا Type 1-generalizated logistic distribution ويتضمن توزيع (PRHL) معلمة موقع ومعلمة قياس ومعلمة التواء **(**قد تكون سالبة او موجبة**)** وان الدالة الاحتمالية له هي وحيدة المنوال وايضا مقعرة لوغارتميا ، ويمكن تمثيل العزوم بواسطة الدالة digamma والدالة polygamma وعليه يمكن استخدام (PRHL) اكبر فائدة من (Skew-logistic) في اغراض تحليل البيانات وقبل الدخول في تفاصيل التوزيع (PRHL) نورد التعاريف التالية ذات العلاقة :

<u>تعريف (1)</u>

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا بصورة مطلقة وله دالة كثافة احتمالية f(.) ودالة تجميعية F(.) فان دالة التردد العكسية r(.) ي :

$$r(x) = \frac{f(x)}{F(x)} \qquad \dots (4)$$

<u>تعريف (2)</u>

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا بصورة مطلقة وله دالة تجميعية F(.) ومعكوس دالة تردد cr(.) فان عائلة المتغيرات العشوائية ذات دالة التردد ومن الشكل $\left\{ \alpha r(.) \quad \alpha > 0 \right\}$ تسمى PRH family وان الدالة التراكمية F(.) تسمى خط القاعدة (Baseline) لعائلة التوزيعات هذه ،وعليه فاذا كان Y متغيرا عشوائيا يمثل عضو في هذه العائلة (PRHL) وله

CDF هي (Baseline) ودالة كثافة احتمالية f(.) ودالة تجميعية CDF فان دالـــة التـــردد العكسية للمتغير Y هي $\alpha r(.)$ لبعض $\alpha > 0$ ، وان

$$G(y) = (F(y))^{\alpha} \quad , \quad g(y) = \alpha (F(y))^{\alpha-1} f(y) \qquad \ldots (5)$$

<u>تعريف (3)</u>

يعرف التوزيع (PRHL) ،بانه التوزيع الذي قاعدته الاساســية هـــي التوزيـــع اللوجســـتي (logistic dist.) ودالة كثافته الاحتمالية هي

$$f_2(x,\alpha) = \frac{\alpha e^{-x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+1}} \quad -\infty < x < \infty, \quad \alpha > 0 \qquad \ldots (6)$$

ويختصر توزيع المتغير X~PRHL بالرمز $PRHL(\alpha)$،اما دالته التجميعية فهي

$$F_2(x,\alpha) = (1+e^{-x})^{-\alpha} \qquad \ldots (7)$$

اما دالة التردد ومعكوس دالة التردد يمكن ان نعبر عنها ضمنيا بالمعادلات التالية

$$h_2(x,\alpha) = \frac{\alpha e^{-x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+1} - (1+e^{-x})} \quad -\infty < x < \infty \qquad \ldots (8)$$

$$r_2(x,\alpha) = \frac{\alpha e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad -\infty < x < \infty \qquad \ldots (9)$$

وفي هذه الحالة يمكن ادخال معلمة الموقع $\mu \in (-\infty,\infty)$ ومعلمة القيـــاس $\lambda > 0$ فـــي الصيغة (6) كالاتي

$$f_2(x,\alpha,\mu,\lambda) = \frac{\alpha\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}}{(1+e^{-\lambda(x-\mu)})^{\alpha+1}} \quad -\infty < x < \infty \qquad \ldots (10)$$

والذي سنرمز له بـــ $PRHL(\alpha,\mu,\lambda)$ ومن الملاحظ

$PRHL(\alpha) = PRHL(\alpha,0,1)$

ومن الممكن مناقشة الخصائص العامة للتوزيع $PRHL(\alpha)$،والتيمن الســـهولة تعميمهـــا على التوزيع $PRHL(\alpha,\mu,\lambda)$ ،ومن هذه الخصائص

- اختلاف اشكال الدالة الاحتمالية (PRHL) طبقا لقيم α المختلفة ، وهي تختلف تماما عن التوزيع اللوجستي المنطقي.
- يكون التوزيع (PRHL) ملتو لليمين عندما $\alpha > 1$ ،وملتولليسار عندما $\alpha < 1$ وعندما $\alpha = 1$ يتطابق التوزيع (PRHL) مع التوزيع اللوجستي القياسي ويكون متماثل .
- ان الدالة الاحتمالية $PRHL(\alpha)$ هي من نوع (log-concave) لكل قيم α .
- تكون صيغة الدالة المولدة للعزوم لتوزيع $PRHL(\alpha)$ هي
-

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-t)x}(1+e^{-x})^{-(\alpha+1)}\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(1-t)\ \ \Gamma(\alpha+t)}{\Gamma(\alpha)} \qquad \dots\ (11)$$

ومنها يكون متوسط x هو

$$\left.\begin{aligned} E(x) &= \varphi(\alpha) - \varphi(1) \\ Var(x) &= \varphi'(\alpha) + \varphi'(1) \end{aligned}\right\} \qquad \dots\ (12)$$

علما ان

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} Ln\ \ \Gamma(x) \qquad digamma \qquad 13$$

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) \qquad Polygamma \qquad 14$$

ويكون الوسط الحسابي دالة متزايدة من α ، بينما التباين هو دالة متناقصة من α، وان الوسط الحسابي يتزايد الى ∞ ، بينما التباين يتناقص الى $\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$ عندما $\alpha \to \infty$.

اضافة لما تقدم يمكن تعريف معامل الاختلاف

$$C.V = \sqrt{\frac{\varphi'(\alpha) - \varphi'(1)}{\varphi(\alpha) - \varphi(1)}} \qquad \dots\ (15)$$

اضافة لما تقدم تكون صيغة معامل الالتواء ومعامل التفلطح للتوزيع $PRHL(\alpha)$ هي على التوالي

$$\alpha = \frac{\psi''(\alpha) - \psi''(1)}{(\psi'(\alpha) - \psi'(1))^{\frac{3}{2}}} \qquad \dots (16)$$

$$\beta = \frac{\psi''(\alpha) - \psi''(1)}{(\psi'(\alpha) - \psi'(1))^{2}} \qquad \dots (17)$$

ويمكن ايجاد العزوم الخطية الاخرى للتوزيع ايضا بدلالة $\psi(.)$ ومشتقتها ،والعزوم الثلاثة الخطية الاولى (L-moments) هي

$$\lambda_1 = \mu + \sigma(\psi(\alpha) - \psi(1))$$
$$\lambda_2 = \sigma(\psi(2\alpha) - \psi(\alpha))$$
$$\lambda_3 = \sigma(2\psi(3\alpha) - 3\psi(2\alpha) + \psi(\alpha))$$

وبما ان معاملات الالتواء المعرفة بدلالة الدالة $\psi(\alpha)$ معقدة، لذلك نلجأ الى معامل الالتواء من العينة واعتماد صيغة معامل الالتواء لبيرسون وهي

$$\alpha = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\delta}$$

وغيرهاناذا تمنا من حساب $\bar{x}$ ، M_0 و δ^2 للبيانات المولدة.

ومن الخصائص المهمة الاخرى للتوزيع (PRHL) ،بانه يمثل خليط من التوزيع لاسي وتوزيع القيمة المتطرفة،وكذلك يمكن التعبير عنه كاما (log-gamm) ،او نسبته بين توزيعين من توزيعات بيتا من النوع الاول كما اشار الى ذلك الباحث OLapade بعد عرض التوزيع وخصائصه .

تقدير المعلمات

اولا:– طريقة الامكان الاعظم

عند تطبيق طريقة الامكان الاعظم على الصيغة (3) واخذ اللوغاريتم واشتقاق لوغاريتم دالة الامكان الاعظم حصلنا على مجموعة من معادلات غير خطية، صعبة الحل جدا، لذلك تم الاستعاضة عن الصيغة (3) بالصيغة (10) والتي تمثل التوزيع $PRHL(\alpha, \mu, \lambda)$ لانها ابسط بكثير ،عند تطبيق طريقة الامكان الاعظم على الصيغة (10) حصلنا على المعادلات الغير خطية التالية

$$f_2(x, \alpha, \mu, \lambda) = \frac{\alpha \lambda e^{-\lambda(x-\mu)}}{(1 + e^{-\lambda(x-\mu)})^{\alpha+1}} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$Lf=\alpha^n\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}\prod_{i=1}^{n}(1+e^{-\lambda(x-\mu)})^{-(\alpha+1)}$$

$$LnLf=nLn\alpha+nLn\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}Ln(1+e^{-\lambda(x_i-\mu)})\quad ...(18)$$

وباخذ المشتقة الجزئية للصيغة (18) بالنسبة الى α ، λ و μ على التوالي فنحصل على

$$\frac{\partial LnLf}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}-\sum_{i=1}^{n}Ln(1+e^{-\lambda(x_i-\mu)})\quad ...(19)$$

$$\frac{\partial LnLf}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda(x_i-\mu)}(-(x_i-\mu))}{(1+e^{-\lambda(x_i-\mu)})}\quad ...(20)$$

$$\frac{\partial LnLf}{\partial\mu}=n\lambda-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda(x_i-\mu)}\lambda}{(1+e^{-\lambda(x_i-\mu)})}\quad ...(21)$$

يتضح من الصيغة (19) ان مقدر الامكان الاعظم للمعلمة (α) هو

$$\alpha=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}Ln(1+e^{-\lambda(x_i-\mu)})}\quad ...(22)$$

وهي معادلة ضمنية تعتمد على المعلمتين μ و λ اذا افترضنا ان $\mu=0$ و $\lambda=1$ وتم توليد قيم من الدالة التراكمية الاتية

$$F_2(x,\alpha)=(1+e^{-x})^{-\alpha}$$

بحجوم عينات (n=15,25,50,100) وكررت التجربة (R=1000) (بافتراض ان معلمة الالتواء (α) تاخذ قيم $(\alpha=0.1(0.1)2)$ سيتم الحصول على مقدر الامكان الاعظم للمعلمة (α) ، $\hat{\alpha}_{ML}$ وباستخدام المحاكاة ايضا نقدر معلمة القياس $(\hat{\lambda})$ واخيرا بالاعتماد على مقدرات $\hat{\alpha}_{ML}$ و $\hat{\lambda}_{ML}$ نحصل على تقدير $\hat{\mu}_{ML}$ ،وبذلك يمكن اجراء ملائمة للتوزيع اللوجستي واعتماده في كثير من التجارب المتعلقة بعلوم الحياة والعلوم الزراعية والطبية والاقتصادية وغيرها .

ثانيا:– طريقة العزوم

سوف نوضح فيما يلي عزوم التوزيع اللوجستي المعرف بالدالة الاحتمالية الاتية

$$f(x,\mu,\lambda)=\frac{\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}}{(1+e^{-\lambda(x-\mu)})^2} \quad -\infty<x<\infty,-\infty<x<\infty,\lambda>0 \quad \dots \quad (23)$$

ولو افترضنا ان $\lambda=\frac{1}{\sigma}$ فان الصيغة (23) يمكن اعادة كتابتها

$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{4\sigma^2}\sec^2 h\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)\right) \quad \dots \quad (24)$$

وكلما كانت μ متناقصة فان الصيغة (24) تاخذ التواء الى جهة اليسار واذا كانت μ موجبة يكون الالتواء لليمين اما الدالة التراكمية فهي

$$F(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\left(1+e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\tanh\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right)$$

ويمكن ان نبرهن ان توقع المتغير X هو معلمة الموقع μ

$$E(x)=\mu$$

$$E(x^2)=2\frac{\sigma^2\pi^2}{6}+\mu^2=\frac{\sigma^2\pi^2}{3}+\mu^2$$

$$V(x)=\frac{\sigma^2\pi^2}{3}+\mu^2$$

$$\Rightarrow m_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\Rightarrow \hat{\mu}=\bar{x}$$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \Rightarrow \frac{\hat{\sigma}^2 \pi^2}{3} + \hat{\mu}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{3}{\pi^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \hat{\mu}^2\right)$$

وبذلك يكون مقدري العزوم للمعلمة $\hat{\mu} = \bar{x}$ و للمعلمة $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\sigma}}$ وعندئذ يمكن حساب معلمة الالتواء

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x} - M_0}{\delta}$$

وان قيمة المنوال هي

$$\text{mod}\, e = Ln(\alpha + 1)$$

وقيمة الوسيط للتوزيع (PRHL) هي

$$Me = -Ln\left(2^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$$

ويلاحظ ايضا ان دالة البقاء (Survival function) هي

$$\delta(x) = 1 - \left(1 + e^{\psi(1) - \psi(\alpha)}\right)^{-\alpha}$$

وهي دالة متناقصة من α .

وان دالة البقاء عند المنوال هي

$$\delta(x) = 1 - \left(\frac{(\alpha+1)}{(\alpha+2)}\right)^2$$

وهي دالة متزايدة من α.

نتائج التقدير

عند تطبيق كل من طريقة الامكان الاعظم والعزوم لتقدير المعلمات الثلاث ظهرت النتائج كما في الجداول (1) ،(2) ،(3) و (4) وكما يأتي

جدول (1)

قيم متوسط مربعات الخطأ للمعلمات الثلاث عندما (n=10)

α	$\hat{\alpha}$		Best	$\hat{\lambda}$		Best	$\hat{\mu}$		Best
	MOM	MLE		MOM	MLE		MOM	MLE	
0.1	0.00332	0.79382	MOM	0.58781	0.60126	MOM	103.7763	0.04003	MLE
0.2	0.01369	0.62400	MOM	0.33376	0.35062	MOM	24.14594	0.19052	MLE
0.3	0.03128	0.47446	MOM	0.19473	0.20920	MOM	9.59790	0.36488	MLE
0.4	0.05612	0.34557	MOM	0.12668	0.13548	MOM	4.63094	0.45677	MLE
0.5	0.08821	0.23727	MOM	0.10019	0.10162	MOM	2.46108	0.72126	MLE
0.6	0.12755	0.14944	MOM	0.09754	0.09092	MLE	1.38128	0.88231	MLE
0.7	0.17414	0.08193	MLE	0.10834	0.09356	MLE	0.81298	1.02829	MOM
0.8	0.22798	0.03464	MLE	0.12651	0.10379	MLE	0.51457	1.15958	MOM
0.9	0.28907	0.00752	MLE	0.14845	0.11820	MLE	0.37070	1.27735	MOM
1	0.35742	0.00005	MLE	0.17206	0.13474	MLE	0.32072	1.38303	MOM
1.1	0.43301	0.01354	MLE	0.19607	0.15217	MLE	0.33031	1.14780	MOM
1.2	0.51586	0.04664	MLE	0.21977	0.16976	MLE	0.37894	1.56370	MOM
1.3	0.60595	0.09977	MLE	0.24273	0.18707	MLE	0.45375	1.64118	MOM
1.4	0.70330	0.17292	MLE	0.26472	0.20385	MLE	0.54366	1.71148	MOM
1.5	0.80790	0.26609	MLE	0.28566	0.21994	MLE	0.65119	1.77550	MOM
1.6	0.91975	0.37926	MLE	0.30546	0.23529	MLE	0.76437	1.83398	MOM
1.7	1.03885	0.51243	MLE	0.32423	0.24988	MLE	0.88321	1.88758	MOM
1.8	1.16521	0.66561	MLE	0.34192	0.26370	MLE	1.00580	1.93686	MOM
1.9	1.29881	0.83879	MLE	0.35859	0.27678	MLE	1.13072	1.98230	MOM
2	1.43967	1.03196	MLE	0.37432	0.28916	MLE	1.25701	2.02431	MOM

جدول (2)

قيم متوسط مربعات الخطأ للمعلمات الثلاث عندما (n=25)

α	$\hat{\alpha}$		Best	$\hat{\lambda}$		Best	$\hat{\mu}$		Best
	MOM	MLE		MOM	MLE		MOM	MLE	
0.1	0.00109	0.82355	MOM	0.63798	0.63179	MLE	1010.2351	0.03873	MLE
0.2	0.00437	0.64850	MOM	0.38714	0.37986	MLE	23.40680	0.14083	MLE
0.3	0.00984	0.49385	MOM	0.22821	0.22294	MLE	9.16672	0.27803	MLE
0.4	0.01750	0.36058	MOM	0.13321	0.13025	MLE	4.33023	0.42681	MLE
0.5	0.07355	0.24867	MOM	0.07947	0.07782	MLE	2.21087	0.57325	MLE
0.6	0.03939	0.15785	MOM	0.05155	0.05002	MLE	1.15787	0.71064	MLE
0.7	0.05361	0.08781	MOM	0.03956	0.03720	MLE	0.60532	0.83645	MOM
0.8	0.07003	0.03832	MLE	0.03734	0.03346	MLE	0.31680	0.95028	MOM
0.9	0.08863	0.00919	MLE	0.04103	0.03529	MLE	0.17941	1.05275	MOM
1	0.10942	0.00030	MLE	0.04822	0.04038	MLE	0.13380	1.14486	MOM
1.1	0.13240	0.01156	MLE	0.05740	0.04740	MLE	0.14639	1.22772	MOM
1.2	0.15756	0.04292	MLE	0.06763	0.05547	MLE	0.19708	1.30241	MOM
1.3	0.18492	0.09433	MLE	0.07830	0.06405	MLE	0.27329	1.36993	MOM
1.4	0.21446	0.16578	MLE	0.08904	0.07279	MLE	0.36684	1.43114	MOM
1.5	0.24620	0.25724	MOM	0.09962	0.08148	MLE	0.47224	1.48681	MOM
1.6	0.28012	0.36869	MOM	0.10990	0.08997	MLE	0.58575	1.53762	MOM
1.7	0.31623	0.50015	MOM	0.11979	0.09820	MLE	0.70471	1.58412	MOM
1.8	0.35453	0.65159	MOM	0.12926	0.10612	MLE	0.82727	1.62682	MOM
1.9	0.39501	0.82302	MOM	0.13829	0.11370	MLE	0.95206	1.66615	MOM
2	0.43769	1.01443	MOM	0.14688	0.12094	MLE	1.07810	1.70246	MOM

جدول (3)
قيم متوسط مربعات الخطأ للمعلمات الثلاث عندما (n=50)

α	$\hat{\alpha}$ MOM	$\hat{\alpha}$ MLE	Best	$\hat{\lambda}$ MOM	$\hat{\lambda}$ MLE	Best	$\hat{\mu}$ MOM	$\hat{\mu}$ MLE	Best
0.1	0.00039	0.83675	MOM	0.65811	0.64430	MLE	100.2944	0.03396	MLE
0.2	0.00159	0.65908	MOM	0.41092	0.39377	MLE	23.09981	0.12493	MLE
0.3	0.00359	0.50186	MOM	0.24674	0.23286	MLE	8.98963	0.24975	MLE
0.4	0.00639	0.36649	MOM	0.14363	0.13461	MLE	4.20158	0.38734	MLE
0.5	0.01000	0.25296	MOM	0.08160	0.07658	MLE	2.10608	0.52425	MLE
0.6	0.01440	0.16090	MOM	0.04604	0.04357	MLE	1.06682	0.65356	MLE
0.7	0.01960	0.08989	MOM	0.02724	0.02600	MLE	0.52300	0.77244	MOM
0.8	0.02561	0.03958	MOM	0.01893	0.01798	MLE	0.24043	0.88025	MOM
0.9	0.03242	0.00974	MLE	0.01717	0.01587	MLE	0.10730	0.97741	MOM
1	0.04003	0.00018	MLE	0.01945	0.01740	MLE	0.06486	1.06480	MOM
1.1	0.04844	0.01081	MLE	0.02416	0.02117	MLE	0.07988	1.14343	MOM
1.2	0.05765	0.04153	MLE	0.03029	0.02627	MLE	0.13247	1.21431	MOM
1.3	0.06766	0.09230	MOM	0.03721	0.03212	MLE	0.21020	1.27837	MOM
1.4	0.07847	0.16309	MOM	0.04448	0.08355	MLE	0.30499	1.33643	MOM
1.5	0.09009	0.25387	MOM	0.05184	0.04472	MLE	0.41141	1.38923	MOM
1.6	0.10251	0.36464	MOM	0.05913	0.05109	MLE	0.52576	1.43739	MOM
1.7	0.11572	0.49538	MOM	0.06625	0.05734	MLE	0.64544	1.48145	MOM
1.8	0.12974	0.64610	MOM	0.07312	0.06342	MLE	0.76859	1.52190	MOM
1.9	0.14456	0.81679	MOM	0.07973	0.06929	MLE	0.89390	1.55913	MOM
2	0.16018	1.00744	MOM	0.08604	0.07494	MLE	1.02037	1.59350	MOM

جدول (4)
قيم متوسط مربعات الخطأ للمعلمات الثلاث عندما (n=100)

α	$\hat{\alpha}$ MOM	$\hat{\alpha}$ MLE	Best	$\hat{\lambda}$ MOM	$\hat{\lambda}$ MLE	Best	$\hat{\mu}$ MOM	$\hat{\mu}$ MLE	Best
0.1	0.00020	0.84617	MOM	0.66753	0.64872	MLE	98.96105	0.03233	MLE
0.2	0.00083	0.66678	MOM	0.42290	0.39892	MLE	22.73728	0.11931	MLE
0.3	0.00188	0.50761	MOM	0.25687	0.23674	MLE	8.80999	0.23937	MLE
0.4	0.00033	0.37062	MOM	0.15035	0.13653	MLE	4.08832	0.37237	MLE
0.5	0.00523	0.25585	MOM	0.08470	0.07640	MLE	2.02509	0.50512	MLE
0.6	0.00753	0.16286	MOM	0.04582	0.04135	MLE	1.00442	0.63069	MLE
0.7	0.01025	0.09115	MOM	0.02404	0.02184	MLE	0.47256	0.74619	MOM
0.8	0.01339	0.04031	MOM	0.01310	0.01200	MLE	0.19829	0.85094	MOM
0.9	0.01695	0.01003	MLE	0.00895	0.00817	MLE	0.07127	0.94532	MOM
1	0.02093	0.00010	MLE	0.00905	0.00811	MLE	0.03352	1.03018	MOM
1.1	0.02533	0.01039	MLE	0.01177	0.01039	MLE	0.05227	1.10649	MOM
1.2	0.03014	0.04079	MOM	0.01607	0.01410	MLE	0.10792	1.17525	MOM
1.3	0.03537	0.09125	MOM	0.02127	0.01866	MLE	0.18821	1.23735	MOM
1.4	0.04103	0.16174	MOM	0.02696	0.02370	MLE	0.28516	1.29362	MOM
1.5	0.04710	0.25222	MOM	0.03284	0.02896	MLE	0.39346	1.34475	MOM
1.6	0.53592	0.36267	MOM	0.03875	0.03428	MLE	0.50946	1.39138	MOM
1.7	0.06050	0.49310	MOM	0.04456	0.03957	MLE	0.63060	1.43402	MOM
1.8	0.06782	0.64350	MOM	0.05022	0.04474	MLE	0.75506	1.47315	MOM
1.9	0.07557	0.81385	MOM	0.05568	0.04977	MLE	0.88155	1.50915	MOM
2	0.08373	1.00418	MOM	0.06092	0.05462	MLE	1.00909	1.54238	MOM

الاستنتاجات

من خلال تحليل نتائج الجداول(1,2,3,4) يتبين ما يلي

اولا:- استنتاجات المعلمة α

عندما (n=10) فان طريقة الامكان الاعظم هي افضل من طريقة العزوم في معظم حالات قيم α المأخوذة اي عندما $\alpha \in (0.7,2)$ ،اما عندما (n=25) فان طريقة العزوم هي الافضل عندما $\alpha \in (0.1,0.7)$ وكذلك عندما $\alpha \in (1.5,2)$،وتزداد افضلية طريقة العزوم عندما تكون (n=50,100) .

ثانيا:- استنتاجات المعلمة λ

ان طريقة الامكان الاعظم هي افضل من طريقة العزوم في حالة (n=10) وعندما $\alpha \in (0.6,2)$ اما طريقة العزوم فهي الافضل عندما $\alpha \in (0.1,0.5)$،اما عندما (n=25,50,100) فان طريقة الامكان الاعظم هي الافضل في جميع قيم α اي $\alpha \in (0.1,2)$.

ثالثا:-استنتاجات المعلمة μ

من ملاحظة النتائج في الجداول السابقة يتبين ان طريقة الامكان الاعظم هي افضل من طريقة العزوم عندما $\alpha \in (0.1,0.6)$ وفي جميع حالات حجوم العينة،اما طريقة العزوم فهي افضل من طريقة الامكان الاعظم عندما $\alpha \in (0.7,2)$.

References

1. Azzalini,A.(1985),"A class of distribution which includes the normal ones" Scandinavian Journal of Statistics Vol.12,171-178.
2. Balakrishnan,N.(1992),"Handbook of Logistic distribution ",Dekker New York.
3. Genton,M.G.(2004),"Skew-Elliptical distribution and their Application", A Journey Beyond Normality, Chap man &Hall/CRC,Boca Raton.
4. Johnson, N.l, Kotz,S. and Balakrishnan,N.(1995)."Continuous Univariate Distributions", Vol2, 2nd edition, Wiley and Sons, New York.
5. Lapade,A.k,(2004)."On extended Type-I generalized Logistic distribution ".International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol.57, 3069-3074.
6. Zelterman, D. (1987),"Parameter estimation in the generalized Logistic distribution", Computational statistics and Data Analysis, Vol.5, 177-184.