NumericallyTripleDimension Method For Evaluation Values of Triple Integralsof ContinuousIntegrands(MTS)

طريقة عددية ثلاثية البعد لحساب قيم التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة (MTS)

أ.علي حسن محمد — قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

عدنان وسيل كاظم شبّر — قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

المستخلص

الهدف الرئيس من هذا البحث هو التوصل الطريقةجديدة لحسابالتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة في منطقة تكاملها باستعمالالقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x وقاعدةشبه المنحرف على البعد الأوسط y وقاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي z واشتقاق حدود التصحيح (صيغة الخطأ) لها، واستعمال طريقة تعجيل رو مبرك [5] لتحسين نتائج التكاملات الثلاثية بالاعتماد علىحدود التصحيح التي وجدناها, فتبين لناإنالطريقة المركبة من طريقة تعجيل رو مبرك على القيم الناتجة من تطبيققاعدة MTS عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي إن $(h = h_1 = h_2)$ حيث h المسافات بين الإحداثيات على المحور X و h_1 المسافات بين الإحداثيات على المحور Y و h_2 المسافات بين الإحداثيات على المحور Z وأسميناها $RMTS$ يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة في منطقة تكاملها إذ أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً .

Abstract

The main aim of this search is to derivation numerically new rule to find the values of the triple integrals, Its integrands continuous in region of the integration and derivation the errors (correction terms) and to improve the results of the triple integrals we used Romberg accelerating method by depending on these correction terms that we found, this method (composition method of applying Romberg acceleration method on the obtained values of applying Mid-point rule on the dimensionzand Trapezoidal Rule on the dimensionyand Simpson'sruleon the dimensionx, when the number of subintervals of interval of interior dimension equal to the number of subintervals of interval of middle dimension and equal to the number of subintervals of exterior dimension) such that $(h = h_1 = h_2)$, h is the distances between the ordinates on the x– axis, h_1 is the distances between the ordinates on the y- axis and h_2 is the distances between the ordinates on the z– axis ,and we indicate this method by ($RMTS$) , we can depend on it to calculate the triple integrals when it integrands continuous on the region of integration and give higher accuracy in the results by few subintervals.

1.المقدمة

يتميز موضوع التحليل العددي في ابتكار طرائق متنوعة لإيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية معينة بأسلوب فعال . تعتمد كفاءة هذه الطرائق على كل من الدقة والسهولة التي يمكن بها أن تنفذ. فالتحليل العددي الحديثهو الواجهة العددية للمجال الواسع للتحليل التطبيقي .إن للتكاملات الثلاثية أهمية كبيرة في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم وإيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة على سبيل المثال الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 4x$ وفوق $z = 0$ وتحت $x^2 + y^2 = 4z$ وحساب المركز المتوسطللحجم الوقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ وفوق المستوي $z = 0$ وتحت المستوي $x + z = 4$, وكذلك إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن. فرانكآيرز [8] , مما دفع عدد من الباحثين للعمل في مجال التكاملات الثلاثية.ففي عام2009استخدمت ضياء [6] طرائق التكامل الأحادي لتكوين طرائق لحساب التكامل الثلاثي وهي $RS\,(RM)$ ، $RM\,(RM)$, $RM\,(RS)$ ناتجةمن وهذه الطرائق $RMRS\,(RS)$ و $RMRS\,(RM)$, $RMRM\,(RM)$, على البعد الأوسط (y) والبعد الداخلي (x) ومن طريقة تعجيل رو مبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM) على البعد الخارجي (z) وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة $RMRS\,(RS)$ هي الأفضل عند حساب التكاملاتالثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب . وفي عام 2010قدمت عكار [7]طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال

طريقة $RMMM$ الناتجة من تعجيل رو مبرك مع قاعدة النقطة الوسطى المطبقةعلى الأبعاد xو yو z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجيوحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقترابوبفترات جزئية قليلة نسبياً.وفي 2011 قدمت موسى [9] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة $RMSS$ ، الناتجة من تعجيل رو مبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي z وقاعدة سمبسون على البعدين الأوسط y والداخلي x عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجيوحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقترابوبفترات جزئية قليلة نسبياً. أما في هذا البحث نقدم مبرهنة مع البرهانلاشتقاق قاعدةجديدة لحساب قيم تقريبيةللتكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة وصيغة الخطأ لها وهذه القاعدةناتجة من تطبيق قاعدةالنقطة الوسطى على البعد الخارجي zوقاعدة شبه المنحرف على البعد الأوسط y وقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x،عندما $n = n_1 = n_2$ (n عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي $[a,b]$و n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليهافترة التكامل على البعد الأوسط $[c,d]$ وn_2 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي $[e,g]$)،لقد اخترنا كل من n,n_1,n_2 أعداد زوجية لأن قاعدة سمبسون تحتاج الى عدد زوجي من الفترات الجزئية [3] وفي الوقت نفسه لا توثر على مناقشتنا لقاعدة النقطة الوسطى وقاعدةشبهالمنحرفوسنرمز لهذه الطريقة بالرمز MTS ،ولأجلتحسينالنتائجنستخدمطريقة تعجيل رو مبرك ، عند ذلك نرمز لهذه القاعدة بالرمز $RMTS$ وقد حصلنا على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وبعدد قليل نسبيا من الفترات الجزئيةً.

2. حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً

مبرهنة:- لتكن الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$فأن القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي $I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz$ يمكن حسابها من القاعدة الآتية:-

$$
\begin{aligned}
MTS &= \int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{6}\sum_{r=0}^{n-1}[f(a,c,z_r+\frac{h}{2})+f(a,d,z_r+\frac{h}{2})\\
&+f(b,c,z_r+\frac{h}{2})+f(b,d,z_r+\frac{h}{2})+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(a,y_j,z_r+\frac{h}{2})+f(b,y_j,z_r+\frac{h}{2})\\
&+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}f(x_{2i-1},y_j,z_r+\frac{h}{2})+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(f(x_{2i},y_j,z_r+\frac{h}{2}))\\
&+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(f(x_{2i-1},c,z_r+\frac{h}{2})+f(x_{2i-1},d,z_r+\frac{h}{2}))+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(f(x_{2i},c,z_r+\frac{h}{2})\\
&+f(x_{2i},d,z_r+\frac{h}{2}))]
\end{aligned}
$$

وان صيغة الخطأ هي:- $E_{MTS}=I-MTS(h)=A_{MTS}h^2+B_{MTS}h^4+C_{MTS}h^6+\ldots$

حيث $A_{MTS},B_{MTS},C_{MTS},\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y,z)$ ولاتعتمد على قيمة h.

البرهان:-

يمكن كتابة التكامل الثلاثي I بشكل عام بالصورة الآتية :-

$$I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz = MST(h)+E(h) \qquad \ldots(1)$$ [1]، [9].

إذ إن $MST(h)$ هي قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد z و قاعدة سمبسون على البعد y و قاعدة شبه المنحرف على البعد x, وان $E_{MST}(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح الممكن إضافتها إلى قيم$MST(h)$, وإن

$.h=\dfrac{b-a}{n}, h_1=\dfrac{d-c}{n_1}, h_2=\dfrac{g-e}{n_2}$ (وسنأخذ $h=h_1=h_2$) ، وبفرض أنّ $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]=[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]\times[z_0,z_n]$، فيكون $x_i=x_0+ih$, $y_i=y_0+ih$, $z_i=z_0+ih$. إذ أن صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة شبه المنحرف هي :-

$$E_T(h)=-\frac{h^2}{12}(f_n'-f_0')+\frac{h^4}{720}(f_n^{(3)}-f_0^{(3)})-\frac{h^6}{30240}(f_n^{(5)}-f_0^{(5)})+\ldots \qquad \ldots(2)$$

وعند استخدام قاعدة سمبسون هي:-

$$E_S(h)=-\frac{1}{180}h^4(f_n^{(3)}-f_0^{(3)})+\frac{1}{1512}h^6(f_n^{(5)}-f_0^{(5)})-\ldots \qquad \ldots(3)$$

اما عند استخدام النقطة قاعدة الوسطى فهي:-

$$E_M(h)=\frac{1}{6}h^2(f_n'-f_0')-\frac{7}{360}h^4(f_n^{(3)}-f_0^{(3)})+\frac{31}{15120}h^6(f_n^{(5)}-f_0^{(5)})-\ldots \qquad \ldots(4)$$

فوكس [2]، حيث $f_i=f(x_i)$ ، وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل Mean-value theorem for derivatives للصيغ(2)، (3) و(4) نحصل على :

$$E_T(h)=\frac{-(x_n-x_0)}{12}h^2f^{(2)}(\zeta_1)+\frac{(x_n-x_0)}{720}h^4f^{(4)}(\zeta_2)+\ldots \qquad \ldots(5)$$

$$E_S(h)=\frac{-(x_n-x_0)}{180}h^4f^{(4)}(\bar{\zeta}_1)+\frac{(x_n-x_0)}{1512}h^6f^{(6)}(\bar{\zeta}_2)+\ldots \qquad \ldots(6)$$

$$E_M(h)=\frac{(x_n-x_0)}{6}h^2f^{(2)}(\eta_1)+\frac{7(x_n-x_0)}{360}h^4f^{(4)}(\eta_2)+\ldots \qquad \ldots(7)$$

فرانكآيرز [8]، حيث $\zeta_i,\bar{\zeta}_i,\eta_i\in(x_0,x_n)$, $i=1,2,3,\ldots$.

فبالنسبة للتكامل الأحادي $\int_a^b f(x,y,z)dx$ يمكن حسابه عددياً بقاعدة سمبسون على البعد x في الفترة $[a,b]$ و(التعامل مع y و z كثابتين) كالآتي :-

$$S=\int_a^b f(x,y,z)dx$$

$$=\frac{h}{3}[f(a,y,z)+f(b,y,z)+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}f(x_{2i-1},y,z)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}f(x_{2i},y,z)]$$

$$+[\frac{(b-a)}{-180}h^4\frac{\partial^4 f(\mu_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6 f(\mu_2,y,z)}{\partial x^6}+\ldots] \qquad \ldots(8)$$

حيث $\mu_l\in(a,b)$, $l=1,2,\ldots$. وبمكاملة طرفي المعادلة (8)على البعد الاوسط y في الفترة $[c,d]$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف نحصل على:-

$$1)\int_c^d \frac{h}{3}f(b,y,z)dy=\frac{h^2}{6}\left[f(a,c,z)+f(a,d,z)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(a,y_j,z)\right]$$

$$+\frac{h}{3}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,\lambda_1,z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,\lambda_2,z)}{\partial y^4}+\ldots\right] \ldots(9)$$

حيث $\lambda_l\in(c,d)$, $l=1,2,\ldots$.

$$2)\int_c^d \frac{h}{3}f(b,y,z)dy=\frac{h^2}{6}\left[f(b,c,z)+f(b,d,z)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(b,y_j,z)\right]$$

$$+\frac{h}{3}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,\overline{\lambda}_1,z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,\overline{\lambda}_2,z)}{\partial y^4}+\dots\right] \qquad \dots(10)$$

حيث $\overline{\lambda}_l \in (c,d)$, $l=1,2,\dots$.

$$3)\int_c^d \frac{4h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1},y,z)dy=\frac{2h^2}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}[f(x_{2i-1},c,z)+f(x_{2i-1},d,z)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2i-1},y_j,z)]$$

$$+\frac{4h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},\lambda_{i1},z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},\lambda_{i2},z)}{\partial y^4}+\dots\right]\dots(11)$$

حيث $\lambda_{il} \in (c,d)$ $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$, $l=1,2,\dots$.,

$$4)\int_c^d \frac{4h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i},y,z)dy=\frac{h^2}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}[f(x_{2i},c,z)+f(x_{2i},d,z)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2i},y_j,z)]$$

$$+\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i},\overline{\lambda}_{i1},z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i},\overline{\lambda}_{i2},z)}{\partial y^4}+\dots\right] \qquad \dots(12)$$

حيث $\overline{\lambda}_{il} \in (c,d)$ $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$, $l=1,2,\dots$,

وباستخدام مبرهنة (القيمة المتوسطة للتكامل)[4] في مكاملة حدود التصحيح الواردة في (12) على البعد الاوسط y في الفترة $[c,d]$ فنحصل على:-

$$(b-a)\int_c^d [\frac{h^4}{-180}\frac{\partial^4 f(\mu_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\mu_2,y,z)}{\partial x^6}+\dots]dy$$

$$=(b-a)(d-c)[\frac{h^4}{-180}\frac{\partial^4 f(\mu_1,\overline{\mu}_1,z)}{\partial x^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\mu_2,\overline{\mu}_2,z)}{\partial x^6}+\dots] \qquad \dots(13)$$

حيث $\overline{\mu}_l \in (c,d)$, $l=1,2,\dots$,ومن المعادلات (9), (10), (11),(12),(13) نحصل على:-

$$TS=\int_c^d[\int_a^b f(x,y,z)dx]dy=\frac{h^2}{6}[f(a,c,z)+f(a,d,z)+f(b,c,z)+f(b,d,z)$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(a,y_j,z)+f(b,y_j,z)+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1},y_j,z)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i},y_j,z))$$

$$+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(f(x_{2i-1},c,z)+f(x_{2i-1},d,z))+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(f(x_{2i},c,z)+f(x_{2i},d,z))]$$

$$+\frac{h}{3}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,\lambda_1,z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,\lambda_2,z)}{\partial y^4}+\dots\right]$$

$$+\frac{h}{3}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,\overline{\lambda}_1,z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,\overline{\lambda}_2,z)}{\partial y^4}+\dots\right]$$

$$+\frac{4h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},\lambda_{i1},z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},\lambda_{i2},z)}{\partial y^4}+\dots\right]$$

$$+\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i},\bar{\lambda}_{i1},z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i},\bar{\lambda}_{i2},z)}{\partial y^4}+\ldots\right]$$

$$+(b-a)(d-c)[\frac{h^4}{-180}\frac{\partial^4 f(\mu_1,\bar{\mu}_1,z)}{\partial x^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\mu_2,\bar{\mu}_2,z)}{\partial x^6}+\ldots]\ldots(14)$$

وبمكاملة طرفي المعادلة (14) بطريقة النقطة الوسطىواستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل في مكاملة حدود التصحيح الواردة في (14)على البعد الخارجي z في الفترة$[e,g]$نحصل على:-

$$MTS=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\frac{h^3}{6}\sum_{r=1}^{n-1}[f(a,c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(a,d,z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,d,z_r+\tfrac{h}{2})$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(a,y_j,z_r+\tfrac{h}{2})+f(b,y_j,z_r+\tfrac{h}{2})+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}f(x_{2i-1},y_j,z_r+\tfrac{h}{2})$$

$$+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}f(x_{2i},y_j,z_r+\tfrac{h}{2}))+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(f(x_{2i-1},c,z_r+\tfrac{h}{2})+f(x_{2i-1},d,z_r+\tfrac{h}{2}))$$

$$+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(f(x_{2i},c,z_r+\tfrac{h}{2})+(f(x_{2i},d,z_r+\tfrac{h}{2}))]$$

$$+\frac{h}{3}(d-c)(g-e)[\frac{h^2}{-12}\frac{\partial^2 f(a,\lambda_1,\theta_1)}{\partial y^2}+\frac{h^4}{720}\frac{\partial^4 f(a,\lambda_2,\theta_2)}{\partial y^4}+\ldots]$$

$$+\frac{h}{3}(d-c)(g-e)[\frac{h^2}{-12}\frac{\partial^2 f(b,\bar{\lambda}_1,\bar{\theta}_1)}{\partial y^2}+\frac{h^4}{720}\frac{\partial^4 f(b,\bar{\lambda}_2,\bar{\theta}_2)}{\partial y^4}+\ldots]$$

$$+\frac{4h}{3}(d-c)(g-e)\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}[\frac{h^2}{-12}\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},\lambda_{i1},\theta_{i1})}{\partial y^2}+\frac{h^4}{720}\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},\lambda_{i2},\theta_{i2})}{\partial y^4}+\ldots]$$

$$+\frac{2h}{3}(d-c)(g-e)\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}[\frac{h^2}{-12}\frac{\partial^2 f(x_{2i},\bar{\lambda}_{i1},\bar{\theta}_{i1})}{\partial y^2}+\frac{h^4}{720}\frac{\partial^4 f(x_{2i},\bar{\lambda}_{i2},\bar{\theta}_{i2})}{\partial y^4}+\ldots]$$

$$+(b-a)(d-c)(g-e)[\frac{h^4}{-180}\frac{\partial^4 f(\mu_1,\bar{\mu}_1,\bar{\bar{\mu}}_1)}{\partial x^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\mu_2,\bar{\mu}_2,\bar{\bar{\mu}}_2)}{\partial x^6}+\ldots]$$

$$+\frac{h^2}{2}(g-e)[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(a,c,\alpha_1)}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(a,c,\alpha_2)}{\partial z^4}+\ldots]$$

$$+\frac{h^2}{2}(g-e)[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(a,d,\bar{\alpha}_1)}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(a,d,\bar{\alpha}_2)}{\partial z^4}+\ldots]$$

$$+\frac{h^2}{6}(g-e)[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(b,c,\bar{\bar{\alpha}}_1)}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(b,c,\bar{\bar{\alpha}}_2)}{\partial z^4}+\ldots]$$

$$+h^2(g-e)[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(b,d,\bar{\bar{\theta}}_1)}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(b,d,\bar{\bar{\theta}}_2)}{\partial z^4}+\ldots]$$

$$+\frac{h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{h^2}{-12}\frac{\partial^2 f(a,y_j,\alpha_{j1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(a,y_j,\alpha_{j2})}{\partial z^4}+\ldots\right]$$
$$+\frac{h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{h^2}{-12}\frac{\partial^2 f(b,y_j,\bar{\alpha}_{j1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(b,y_j,\bar{\alpha}_{j2})}{\partial z^4}+\ldots\right]$$
$$+\frac{4h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},y_j,\alpha_{ij1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},y_j,\alpha_{ij2})}{\partial z^4}+\ldots\right]$$
$$+\frac{2h^2}{3}(g-e)\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_{2i},y_j,\bar{\alpha}_{ij1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x_{2i},y_j,\bar{\alpha}_{ij2})}{\partial z^4}+\ldots\right]$$
$$+\frac{2h^2}{3}(g-e)\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},c,\bar{\bar{\alpha}}_{i1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},c,\bar{\bar{\alpha}}_{i2})}{\partial z^4}+\ldots\right]$$
$$+\frac{2h^2}{3}(g-e)\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},d,\bar{\bar{\theta}}_{i1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},d,\bar{\bar{\theta}}_{i2})}{\partial z^4}+\ldots\right]$$
$$+\frac{2h^2}{3}(g-e)\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_{2i},c,\beta_{i1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{720}\frac{\partial^4 f(x_{2i},c,\beta_{i2})}{\partial z^4}+\ldots\right]$$
$$+\frac{2h^2}{3}(g-e)\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\left[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x_{2i},d,\bar{\beta}_{i1})}{\partial z^2}+\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x_{2i},d,\bar{\beta}_{i2})}{\partial z^4}+\ldots\right]\quad\ldots(15)$$

حيث $\theta_l,\bar{\theta}_l,\bar{\bar{\theta}}_l,\bar{\bar{\mu}}_l,\alpha_{ijl},\bar{\alpha}_l,\bar{\bar{\alpha}}_l,\beta_{il},\bar{\beta}_{il},\alpha_{jl},\bar{\alpha}_{jl},,\bar{\bar{\alpha}}_{jl},\alpha_{ijl},\bar{\bar{\lambda}}_{tl},\theta_{il},\bar{\alpha}_{ijl}\bar{\theta}_{il}\in(e,g)$, $l=1,2,\ldots$
$j=1,2,\ldots,n-1$, $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$, وبما ان المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y,z)$ بالنسبة للمتغيرات x,y,z مستمرة في منطقة تكاملها فنحصل على:-

$$MTS=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\frac{h^3}{6}\sum_{r=0}^{n-1}\Big[f(a,c,z_r+\frac{h}{2})+f(a,d,z_r+\frac{h}{2})+f(b,c,z_r+\frac{h}{2})+f(b,d,z_r+\frac{h}{2})$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(f(a,y_j,z_r+\frac{h}{2})+f(b,y_j,z_r+\frac{h}{2})+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}f(x_{2i-1},y_j,z_r+\frac{h}{2})$$
$$+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(f(x_{2i},y_j,z_r+\frac{h}{2})\Big)+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(f(x_{2i-1},c,z_r+\frac{h}{2})+f(x_{2i-1},d,z_r+\frac{h}{2}))$$
$$+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(f(x_{2i},c,z_r+\frac{h}{2})+f(x_{2i},d,z_r+\frac{h}{2}))\Big]$$
$$+A_{MTS}+B_{MTS}+C_{MTS}+\ldots$$

حيث $A_{MTS},B_{MTS},C_{MTS},\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y,z)$ ولاتعتمد على قيمة h. وبهذا تم البرهان.

3.الأمثلة

1- $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية 1.49780228857537 (مقربة إلى أربع عشرة مرتبة عشرية) .

2- $I=\int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.005256743455022(مقربةإلى خمس عشرةمرتبة عشرية) .

3- $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}dxdydz$ الذي قيمته التحليلية هي 0.473640085114802 (مقربة الى خمس عشرة مرتبة عشرية).

ملاحظة 1 :- في جميع التكاملات أعلاه المكامل معرف عند كل نقطة من نقاط منطقة التكامل الخاصة بها لذلك عند استخدام القاعدة (MTS) لتحسين نتائج التكامل نستخدم حدود التصحيح الاتية:-

$$E_{MTS}=A_{MTS}h^2+B_{MTS}h^4+C_{MTS}h^6+\cdots$$

ملاحظة 2 :- في جميع الامثلة وضعنا اسفل كل جدول القيمة التحليلية (الدقيقة) للتكاملللسهولةالمقارنة بينها وبين القيمة التقريبية التي حصلنا عليها بالطريقة $RMTS$.

ملاحظة 3 :- في عملنا هذا استعملنا لغة الماتلاب (Matlab Language) في كتابة البرنامج الخاص بحساب قيم التكاملات الثلاثية بالطريقة $RMTS$.

دونا النتائج بالنسبة للتكامل الاول في الجدول (1) مستخدمين مع القاعدة MTS طريقة تعجيل رو مبرك.

n	MTS	k=2	k=4	k=6	k=8
2	1.49726583089537				
4	1.49766852902032	1.49780276172864			
8	1.49776887170728	1.49780231926959	1.49780228977232		
16	1.49779393581076	1.49780229051192	1.49780228859475	1.49780228857606	
32	1.49780020047518	1.49780228869665	1.49780228857563	1.49780228857533	1.49780228857533
الجدول(3-1) يبين حساب القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)dxdydz$ بالطريقة $RMTS$					1.49780228857537

نستنتج من الجدول (1) انه عندما $n=n_1=n_2=32$ ان قيمة التكامل باستخدام القاعدة MTS تكون صحيحة لخمس مراتب عشرية وعند استعمال طريقة تعجيل رو مبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشريةوبـ (2^{15} فترة جزئية). أيضا حصلت موسى [9] على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية عندما $n=n_1=n_2=32$ باستخدام القاعدة MSS ، وبعد استعمالها لطريقة تعجيل رو مبرك حصلت على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية .

في الجدول(2) دونا النتائج بالنسبة للتكامل الثاني مستخدمين مع القاعدة MTS طريقة تعجيل رو مبرك.

n	MTS	k=2	k=4	k=6	k=8
2	0.005295224139490				
4	0.005269389441373	0.005260777875335			
8	0.005260100180212	0.005257003759824	0.005256752152124		
16	0.005257594936088	0.005256759854714	0.005256743594373	0.005256743458536	
32	0.005256957095565	0.005256744482057	0.005256743457213	0.005256743455036	0.005256743455022
الجدول(2) يبين حساب القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}dxdydz$ بالطريقة $RMTS$					0.005256743455022

نستنتج من الجدول (2) انه عندما $n=n_1=n_2=32$ ان قيمة التكامل $I=\int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}dxdydz$ تكون صحيحة لست مراتب عشرية باستخدام القاعدة MTS وعند استعمال طريقة تعجيل ومبررك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية مقربة لخمس عشرة مرتبة عشريةوبـ (2^{15} فترة جزئية).بينما حصلت عكار [7]قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية عندما $n=n_1=n_2=16$ باستخدام القاعدة MMM وعند استعمالها لطريقة تعجيل رو مبرك مع القاعدةالمذكورة حصلت على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشريةوبـ (2^{12} فترة جزئية) ،وقد حصلت موسى [9] على قيمة صحيحة لست مراتب عشرية عندما $n=n_1=n_2=32$ باستخدام القاعدة MSS وعند استعمالها لطريقة تعجيل رو مبرك مع القاعدة المذكورة حصلت على قيمة

صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشريةوبـ (2^{15} فترة جزئية). مما يدل على أفضلية الطريقة $RMTS$ على الطريقتين $RMMM$، $RMSS$ اللتين توصلتا إليهما كل من عكار [7] وموسى [9] على التوالي.

في الجدول (3) دونا النتائج بالنسبة للتكامل الثالثمستخدمين مع القاعدة MTS طريقة تعجيل رو مبرك.

n	MTS	k=2	k=4	k=6	k=8
2	0.473833488106753				
4	0.473688249415375	0.473639836518248			
8	0.473652113979703	0.473640068834479	0.473640084322228		
16	0.473643091558821	0.473640084085193	0.473640085101907	0.473640085114283	
32	0.473640836677383	0.473640085050237	0.473640085114573	0.473640085114774	0.473640085114776
الجدول(3) يبين حساب القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}dxdydz$ بالطريقة $RMTS$					0.473640085114802

يتضح من الجدول (3) انه عندما $n=n_1=n_2=32$ أن القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}dxdydz$ بقاعدة MTS تكون صحيحة لست مراتب عشرية وعند استعمال طريقة تعجيل رو مبرك مع القواعد المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية وبـ (2^{15} فترة جزئية).

5.المناقشة والاستنتاج :-

يتضح من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبيةللتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة بالقاعدة المركبة من القواعد النقطة الوسطى على البعد z وشبه المنحرف على البعد y وسمبسون على البعد x عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخليمساويةلعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الأوسطومساويةلعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجيإن (قاعدة MTS) تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات وباستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال تعجيل رو مبرك عليها،فقدحصلنا على قيمة صحيحة لخمس مرتب عشرية في المثال الاول وعلى ست مراتب في المثالين الثاني والثالث بـ (2^{15}فترة جزئية).إلا إنه عند استعمال طريقة تعجيل رو مبرك مع القاعدةالمذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقترابإلى قيم التكاملات الحقيقية بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياًففي التكامل الاول والثالث عندما $n = n_1 = n_2 = 32$ كانت النتيجة صحيحة لثلاث عشرة مرتبة عشرية وفي التكامل الثاني حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية(مقربةلخمسعشرةمرتبةعشرية) عندما $n = n_1 = n_2 = 32$،مما يدل على إن الطريقة $RMTS$ أفضل من الطريقتين $RMMM$ ، $RMSS$ اللتين توصلتا إليهما كل من عكار [7] وموسى [9] على التوالي .وبذلك يمكن الاعتماد علىهذه طريقةفي حساب التكاملات الثلاثيةذات المكاملات المستمرة.

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", compute. J.10 , pp. 87-93 , 1967.

[2] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[3] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , The Technical University of Denmark Lyngby, pp. 1-12 ,1973 .

[4] بوردين , ريتشارد ودوكلاس فاريز, " التحليل العددي " ,مديرية دار الكتب للطباعة و النشر , ترجمةخالد احمد السامرائي /كلية التربية للبناتجامعة بغداد سنة 1992

[5]سيفي , علي محمد صادق , " مبادئ التحليل العددي " , جامعة بغداد كلية العلوم ,1985 .

[6] ضياء , عذراء محمد , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2009 .

[7] عكار , بتول حاتم , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستيرمقدمة إلى جامعة الكوفة2010

[8] فرانك آيرز , " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " , دار ماكجروهيل للنشر , الدار الدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988 .

[9] موسى ، صفاء مهدي ، "حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عدديا "، بحث مقدم الى جامعة كربلاء،2011.