تحليل حساسية البرمجة الخطية باستخدام نموذج النقل

د. راضي عبد الله علي (*)

ملخص البحث

يمثل نموذج البرمجة الخطية الشكل الرياضي للمشاكل الاقتصادية وان حل هذه المشاكل لا يتم الا بتوفر بعض المتطلبات Requirements لكي يمكن صياغتها Formulated بأسلوب علاقات رياضية تتلائم مع المواقع الفعلية للمشاكل الاقتصادية. ويمكن صياغة النموذج العام للبرمجة الخطية ومنها مشكلة النقل التي هي تمثل شكل من اشكال هذه البرمجة والتي تتكون من:-

1. دالة الهدف *Objective Function*

لكي يمكن تحديد هدف أي مشكلة اقتصادية لابد ان يكون للمشكلة المراد صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية (LP) هدف واحد اما ان يكون الهدف هو تعظيم الدالة او ان يكون الهدف تدنية الدالة حيث تمثل (C_1 , C_2 , … , C_n) معاملات دالة الهدف وتعبر عن ربح الوحدة الواحدة من الوحدات المنقولة (X_1 , X_2 , … ,X_n) في حالة كون الهدف تعظيم الارباح او كلفة الوحدة الواحدة من كل وحدة منقولة في حالة كون الهدف تدنية التكاليف (Cost Minimization) .

2.القيود *Constraints*

ان لكل هدف محددات او قيود خاصة به وهذه القيود تعد قيود اقتصادية طبيعية ، وتمثل (a_{11} , a_{12} , … , a_{nm}) معاملات القيود الرئيسية للنموذج (b_1 , b_2 , … , b_n) فهي تمثل الموارد المتاحة .

3.قيود عدم السلبية *Non - Negativity*

يمثل هذا القيد عدم امكانية وجود انشطة انتاجية للمشكلة بكميات سالبة. وتحليل الحساسية : هو دراسة تأثير التغيرات في معاملات برنامج الخطي على الحل الامثل وبأستخدام تحليل الحساسية نستطيع التعرف على كيف سيكون تأثير التغير في معامل دالة الهدف على الحل الامثل وكذلك كيف سيكون تأثير التغير في الكمية على الحل الامثل .

(*) مدرس إدارة الأعمال/ جامعة البصرة/ كلية الإدارة والاقتصاد/ قسم الاقتصاد.

أولاً : المقدمة

البرمجة الخطية Linear programming أسلوب رياضي يستخدم لتعظيم Maximize أو لأقلال Minimize دالة الهدف لعدد من التغيرات تدعى دالة الهدف Objective Function مقيدة بعدد من المعادلات أو المتباينات الخطية تدعى القيود Constraints وتعتبر العلاقة خطية عندما يؤدي تغير ما في قيمة المتغير المستقل إلى عدد ثابت من التغير من قيمة المتغير التابع .

ويستخدم هذا الأسلوب في مجالات متعددة منها على سبيل المثال إيجاد المزيج السلعي الأمثل Product وتقطيع المنتوجات Trim lose Mix والمزيج الغذائي الأمثل Feed Mix وتخطيط الإنتاج الزراعي والصناعي production Planning والمجالات العسكرية . وغيرها كثير وينتج عن تطبيق هذا الأسلوب بنموذج يدعى نموذج البرمجة الخطية Linear programming Model يتكون من أربعة عناصر هي المتغيرات ودالة الهدف والقيود والشروط .

ولكي يمكن بناء هذا النموذج يجب توفر الشروط التالية في المشكلة :-

1. دالة الهدف :- وتبين العلاقة بين المتغيرات والهدف الذي تسعى الإدارة إلى تحقيق كأن يكون الهدف تعظيم الأرباح والدخل وكمية الإنتاج أو أقلال التكاليف أو عوادم الإنتاج أو أي هدف أخر تحدده الإدارة . كما يجب أن تكون الدالة التي تعبر عن هذا الهدف خطية .
2. الموارد النادرة :- وهي المدخلات التي لا يمكن بدونها إتمام العملية أو النشاط وهي نادرة لأنها متوفرة بكميات محدودة لا يمكن زيادتها في المدى القصير مثل المعدات وأرصدة الموارد ومواصفات المنتج ومتطلبات الكمية ومحدودات التكنولوجيا وغير ذلك .
3. القيود :- والقيد عبارة عن علاقة رياضية بين المتغيرات والموارد النادرة ويكون على شكل معادلة أو متباينة خطية .

تبرز أهمية نموذج النقل من كونه خاصة من نموذج البرمجة الخطية ، ومن مجالات التطبيق الواسعة . فبالإضافة إلى تطبيقه على مشكلات النقل المعروفة ، فقد أمكن تطبيقه أيضاً في مجالات أخرى مثل تحديد أعلى وأقل مسار في الشبكة ، وتخصيص المكائن ، والمزيج السلعي ، وموقع المصنع ، وغيرها .

وتحليل الحساسية دراسة ضرورية للأثار التي يمكن أن تتركها التغيرات في مدخلات النموذج على المخرجات (الحل الأمثل) تأتي بعد حل النموذج ، فعالم اليوم هو عالم متغير ،

وأن هذه التغيرات قد تؤدي إلى تغير في مدخلات النموذج ، الأمر الذي يستلزم معرفة طريقة أو أسلوب لتحديد ما تتركه هذه المتغيرات من آثار على الحل الأمثل للنموذج . لقد توصل هذا البحث إلى أن التغيرات في تكاليف النقل للمتغيرات الأساسية و غير الأساسية قد يؤدي إلى تغير في الحل الأمثل ، كما أن التغير في كميات العرض والطلب سيؤدي إلى تغير في الحل الأمثل أيضاً ، وكذلك الحال بالنسبة إلى وضع قيود إضافية على النموذج .

هذا وقد احتوى البحث على مقدمة وسبعة مباحث هي : طبيعة نموذج النقل ، والحل الأساسي والحل الأمثل ، ومفهوم تحليل الحساسية في النموذج النقل ، والتغيرات في معاملات المتغيرات في دالة الهدف ، والتغيرات في العرض والطلب ، والتغيرات بسبب القيود الإضافية، وأخيراً الخاتمة .

ثانياً – طبيعة نموذج النقل

يعود أول ظهور لنماذج النقل إلى عام 1941 ، عندما قدم هتشكوك F. L. Hitchcock دراسة بعنوان ((توزيع المنتوج من عدد من المصادر إلى عدد من المواقع)) وهي أول دراسة أسهمت في حل مشكلات النقل. وفي عام 1947 قدم كوبمان T.C.Koopman دراسة بعنوان ((المنفعة المثلى من نظام النقل)) .وتعتبر هاتان الدراستان الأساسي في تطور نماذج النقل التي تستلزم نقل بضاعة من عدد من مصادر التجهيز إلى عدد من اتجاهات الطلب (أماكم الطلب)[1]. ونموذج النقل ملائم للتطبيق على حالات خاصة من مشكلات البرمجة الخطية التي تكون فيها الموارد والحاجات (المتطلبات) مقاسه بوحدة القياس نفسها (الكميات) . وقد يتبادر إلى ذهن من يقرأ اسم ((نموذج النقل)) إلى أن هذا النموذج يطبق فقط على مبتكرات النقل أو التوزيع ، بينما في الحقيقة يمكن تطبيقه على مشكلات أخرى مثل تخصيص المكائن ، وموقع المصنع ، والمزيج السلعي ، .....وغيرها[2] .

ويعرف نموذج النقل بأنه النموذج الرياضي الذي يبحث في إيجاد خطة نقل بضاعة مفردة من عدد من مصادر التجهيز Sources إلى عدد من اتجاهات الطلب Destinations بهدف تحقيق أقل كلفة نقل إجمالية.

فإذا فرضنا أن المصدر i ينقل بضاعة إلى مكان الطلب j بكلفة مقدارها c.i.j للواحدة ، وأن الكمية المنقولة من i إلى j هي X_{ij}، حيث أن :

$I=1,2,\ldots,n, \qquad j=1,2,\ldots,m$

فأن الشكل الرباعي لنموذج النقل سيكون كالآتي :[3]

$$\text{Minimize } Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

طبقاً للقيود الاتية :

1.قيود العرض :

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = a_{i}$$

2.قيود الطلب :

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_{j}$$

3.شرط التوازن :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i} = \sum_{j=1}^{n} b_{j}$$

4. شروط عدم السلبية لجميع i و j و $X_{ij} \geq 0$

بسبب خصوصية نموذج النقل فأنه يمكن صياغته على شكل جدول كالاتي :

جدول (1) خصوصية نموذج النقل

مصادر التجهيز	أماكن الطلب 1	2	....	n	العرض
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	....	C_{1n} X_{1n}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	....	C_{2n} X_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	....	C_{mn} X_{mn}	a_m
الطلب	b_1	b_2	....	b_n	

وقد ساعد الشكل الجدولي كثيراً في استنباط طرق لإيجاد حل لمشكلة النقل .

ثالثاً . الحل الابتدائي والحل الأمثل

على الرغم من أن نموذج النقل هو حالة خاصة من البرمجة الخطية، ويمكن تحويله إلى نموذج برمجة خطية ، وبالتالي حله يأخذني طرق حل نموذج البرمجة الخطيـة المعروفـة ، إلا إنه وبسبب هذه الخصوصية قد تم استنباط طرق خاصة لإيجاد حل أساسي ابتدائي والحل الأمثل . وفي الطرق المعروفة في إيجاد الحل الأساسي الابتدائي ما يلي(4) :

1-طريقة الركن الشمالي الغربي .

2-طريقة أقل كلفة .

3-طريقة فوجل التقريبية .

أن تطبيق هذه الطرق ينتج عنه حل أساسي ابتدائي لنموذج النقل ، وهذا الحل في معظم الحالات يكون غير أمثل – إذ يمثل مجرد عملية توزيع كميات العرض والطلب بين مصادر التجهيز وأماكن الطلب ، مستخدماً أسس معنية تقود في أغلب الأحيان إلى حل أساسي ابتدائي يكون بعيداً عن الحل الأمثل ، إلا إن أفضل هذه الطرق هي طريقة فوجل التقريبية ، إذا ينتج عنها حل قريب إلى الحل الأمثل .

أما طرق إيجاد الحل الأمثل المعروفة فهي :

1-طريقة الحجر المتنقل .

2-طريقة المضاعفات .

3-طريقة (F.F) .

وتقوم الطريقتان الأولى والثانية على أساس اختبار الحل الذي حصلنا عليه عند تطبيق إحدى طرق إيجاد حل أساسي ابتدائي . أما طريقة ((فورد وفولكيرسون)) (F. F) ، فهي تشبه الطريقة الهنكارية لحل نموذج التخصيص Assignment وينتج عنها حل أمثل .

وبسبب حاجتنا في هذه الدراسة إلى تطبيق طريقة المضاعفات ، فستقدم فيما يلي ملخصاً لخطوات هذه الطريقة[5] :

1- نستخرج مضاعف لكل صف وعمود في جدول النقل عن طريق تطبيق العلاقة الرياضية التالية :

$$C_{ij} = u_i + v_j$$

حيث أن :

C_{ij} = كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر I إلى مكان الطلب j للمتغير الأساسي .

u_I = مضاعف الصف I ونفترض عند البداية أن $u_i = 0$.

v_j = مضاعف العمود j .

كما يجب وقبل استخراج المضاعفات التأكد من تحقيق الشرط التالي :

($m + n - 1$ = عدد المتغيرات الأساسية لتغيرات الحل) .

m = عدد الصفوف .

n = عدد الأعمدة .

2. نستخرج C_{ij} لكل متغير غير أساسي في الجدول ، عن طريق تطبيق العلاقة الرياضية التالية:

$$'C_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$$

حيث أن :

$'C_{ij}$ = مقدار التغير في دالة الهدف .

3. إذا كانت $C_{ij} < 0$ ، لأي متغير غير أساسي فتنتقل إلى الخطوة 4 أما إذا كانت $C_{ij} > 0$ فننتقل إلى الخطوة 5 .

4. نختار المتغير غير الأساسي الذي يرتبط بأقل $C_{ij}{}'$ ونجد الحلقة الخاصة به عن طريق نقل بضاعة إليه من متغيرات أساسية تقع في صفة وعموده وتحويله إلى متغير أساسي ، حيث سنحصل على حل جديد وتعود إلى تطبيق الخطوات 3،2،1 .

5. تحسب تكاليف الحل الذي توصلنا إليه . والذي يمثل الحل الأمثل .

رابعاً – مفهوم تحليل الحساسية في نموذج النقل

يعرف تحليل الحساسية بشكل عام ، بأنه دراسة تأثير التغيرات في مكونات المشكلة (المدخلات) على النموذج الرياضي الذي يمثل المشكلة وحلة (المخرجات) .

ولغرض القيام بهذا العمل ، يمكن إعادة حل النموذج الرياضي بعد إضافة التغيرات الجديدة ، إلا إن هذا العمل يكون مرهقاً ويحتاج إلى وقت طويل . ولكن يمكن بعض الحالات تحتاج إلى إعادة الحل إذ لا توجد طريقة أخرى لمعرفة مدى تأثير التغيرات على نتائج النموذج. وغالباً ما تؤخذ التغيرات بشكل فردي ، إذا أن الجميع بين نوعين أو أكثر من التغيرات يشكل صعوبة أخرى تستوجب إعادة حل النموذج .

وبما أن نموذج النقل يعتبر حالة خاصة من البرمجة الخطية ، ولأن دراسة تحليل حساسية نموذج النقل توجد لها طرق رياضية خاصة ، عليه سنسير على نفس المنوال لدراسة تأثير التغيرات على نموذج النقل .

أن التغيرات في نموذج البرمجة الخطية التي يمكن دراستها هي[6]:

1– التغيرات في معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

2– التغيرات في الموارد المتاحة (الجانب الأيمن للقيود).

3– التغيرات في معاملات المتغيرات في القيود.

4– إضافة متغيرات جديدة أو حذف متغيرات.

5– إضافة أو حذف قيود.

وتقسم هذه التغيرات إلى مجموعتين، تضم المجموعة الأولى التغيرات التي تؤثر علـى امثلية الحل، وتضم الثانية التغيرات التي تؤثر على مكانية الحل. ولأن جميع متغيـرات نمـوذج النقل لها معامل هو واحد صحيح ولا يمكن أن يتغير فأن التغيرات في معاملات المتغيرات فـي القيود لا تنطبق على نموذج النقل .

خامساً – التغيرات في معاملات دالة الهدف

غالباً ما تكون معاملات متغيرات نموذج النقل هي كلفة نقل الوحدة الواحدة من مصـدر العرض (I) الى مكان الطلب (J) ، وهذه التكاليف تتعرض للتغير بالزيادة أو النقصان ، ونحـن نعلم أن المتغيرات في نموذج النقل تنقسم إلى قسمين : متغيرات أساسية ، وهي المتغيرات التـي ظهرت في الحل الأمثل ولها قيم صفراً وأكبر من الصفر ، متغيـرات غيـر أساسـية ، وهـي المتغيرات التي لم تظهر في الحل الأمثل وليست لها قيم . الجدول (1) يمثل حل أمثـل لمشـكلة نقل مع الاختبار بطريقة المضاعفات

الجدول (2) نموذج نقل مع الحل الأمثل واختبار الأمثلية

مصادر التجهيز	أماكن الطلب 1	2	3	4	العرض	u_i
1	7 $X_{11} = 15$	2 $X_{12} = 15$	9 X_{13} 5	[illegible] 10 X_{14}	25	0
2	3 $X_{21} = 5$	[illegible] 10 X_{22}	[illegible] 7 X_{23}	5 $X_{24} = 10$	25	- 4
3	[illegible] 6 X_{31}	[illegible] 5 X_{32}	2 $X_{33} = 20$	[illegible] 6 X_{34}	20	- 7
4	[illegible] 8 X_{41}	[illegible] 6 X_{42}	[illegible] 4 X_{43}	3 $X_{44} = 30$	30	- 6
الطلب	20	15	25	40		
v_j	7	2	9	9		

الأعداد في المربعات المضللة تمثل C'_{ij}

سنناقش هذا النوع من المتغيرات بالفقرات الأربعة التالية :

1-زيادة كلفة النقل لمتغير غير أساسي :

نفرض في الجدول (1) أن C_{22} قد إزدادت من 10 وحدات نقدية إلى قيمة أكبر من 10 . ماذا سيحدث في الحل الأمثل ؟ . في هذه الحالة سيبقى الحل الأمثل كما هو والسـبب هـو أن المتغير X_{22} غير أساسي ، فأن C_{22} ستبقى موجبة وتزداد قيمتها كلما أزدادت قيمة C_{22} .

2-انخفاض كلفة النقل لمتغير غير أساسي :

لو فرضنا أن C_{22} قد انخفضت إلى أقل من 10 وحدات نقدية فقد يتأثر الحل الأمثل أو لا يتأثر تبعاً لمقدار الانخفاض في كلفة النقل . ولكن ما هو مقدار التخفيض المسموح به في C_{22} أو غيرها من كلف نقل للمتغيرات الأساسية لأبعاد الحل الأمثل على حالة؟ لاحظ الجدول التالي:

جدول (3) يمثل التخصيص المسموح به وكلفها للخلايا الغير اساسية

المتغير غير الأساسي	C_{ij}	$u_I + v_j$	$^{/}C_{ij}$	اقل تخصيص في $^{/}C_{ij}$
X14	10	9	1	2
X22	10	-2	12	-
X23	7	5	2	3
X31	6	0	6	-
X32	5	-5	10	-
X34	6	2	4	5
X41	8	1	7	8
X42	6	-4	10	-
X43	4	3	1	2

يمكننا القول إنه إذا تحقق الشرط التالي :

$$u_i + v_j \leq 0$$

فأن الحل الأمثل لن يتأثر بتخفيض كلفة النقل ، وإنه إذا كانت :

$$u_i + v_j \geq 0$$

فقد يتأثر الحل الأمثل ، وهذا يعتمد على مقدار التخفيض .

فبالنسبة إلى المتغيرات غير الأساسية X_{22} , X_{31} , X_{32} , X_{42} مهما انخفضت الكلفة فلن يؤثر هذا على الموقف منها لأنها ستبقى متغيرات غير أساسية ، ولن تدخل إلى الحل ، أي يبقى الحل كما هو ، أما المتغيرات غير الأساسية X_{14} , X_{23},X_{34},X_{41},X_{43} فأن تخفيض C_{ij} بمقدار يساوي اقل تخفيض C_{ij} أو أكبر منه سيؤدي إلى تغير في الحل الأمثل ، وعلينا في هذه الحالة تطبيق طريقة المضاعفات الاختبار الحل الحالي وإيجاد الحل الأمثل الجديد .

3-زيادة كلفة النقل لمتغير أساسي :

أن ارتفاع كلفة النقل للمتغيرات الأساسية قد يؤدي إلى تغير في الحل الأمثل وهذا يعتمد على مقدار الزيادة التي ستحدد المتغير غير الأساسي الذي سيدخل إلى الحل بدلاً من المتغير الأساسي الذي زادت كلفة نقله .

فلو زادت c13 من 9 إلى 10 فأن v_3 ستزداد من 9 إلى 10 وكذلك u_3 ستصبح 3 الأمر الذي سيؤدي إلى انخفاض cij للمتغيرات غير الأساسية الواقعة في الصف الثالث بمقدار 1 . ولو زادت C_{13} من 9 إلى 11 فأن C_{ij} في العمود الثالث ستنخفض بمقدار 2 فتصبح $C_{43} =$ -1 وبذلك يصبح الحل الأمثل الحالي غير أمثل ، وعلينا تطبيق طريقة المضاعفات لإدخال المتغير X_{43} إلى الحل ، وإخراج المتغير X_{13} أما C_{12} فيجب أن تصبح 10 لكي يصبح الحال الحالي غير أمثل ، لأن أقل C_{ij} في العمود الثاني هو 10 حسب القاعدة التالية :

$$C_{ij} = C_{ij} + C_{ij} + 1$$

ويمكن الاستنتاج بأن الزيادة في C_{ij} للمتغيرات الأساسية ، ستؤدي إلى زيادة أو نقصان في cij للمتغيرات غير الأساسية ، عليه يمكن زيادة C_{ij} إلى الحد الذي يجعل C_{ij} للمتغيرات غير الأساسية تساوي صفراً .

4-انخفاض كلفة النقل لمتغير أساسي :

أن انخفاض كلفة النقل للمتغيرات الأساسية (متغيرات الحل) ستؤدي إلى تغير في قيمة دالة الهدف وقد يؤثر هذا التغير على الحل الأمثل الحالي ، وهذا يعتمد على مقدار التخفيض في للمتغير الأساسي .

فلو انخفضت C_{11} من 7 إلى صفر مثلاً ، فأن C_{22} تنخفض من 2 إلى -5 ، وكذلك ستنخفض C_{43} من 1 إلى - 6 . أما انخفاض C_{12} من 2 إلى صفر ، فسيؤدي إلى زيادة C_{22}' من 12 إلى 14 وكذلك زيادة C_{32}' من 10 إلى 12 ، وزيادة C_{42}' 10 إلى 12 أيضاً . أما إذا انخفضت C_{13} من 9 إلى صفر ن فأن هذا سيؤدي إلى انخفاض C_{31}' إلى - 3 وانخفاض C_{34}' إلى -5 وزيادة C_{23}' إلى 11 وانخفاض C_{32}' إلى 1 وزيادة C_{43}' إلى 10.

يمكن الاستنتاج بأن انخفاض C_{ij} للمتغير الأساسي سيؤدي إلى حدوث تغير في C_{ij}' للمتغيرات غير الأساسية بالزيادة أو النقصان . فإذا تحولت قيمة C_{ij}' لأي متغير غير أساسي إلى قيمة سالبة ، فهذا يعني أن الحل الحالي اصبح غير أمثل . أن مقدار التغير الذي يحدث في C_{ij}' قد يكون سالباً أو موجباً وهذا يعتمد على مقدار التخفيض في C_{ij} الذي سيؤدي حتماً إلى تغير في u_i أو v_j أو الاثنين معاً .

سادساً : التغير في العرض والطلب

نفترض دائماً أن نموذج النقل هو نموذج متوازن ، أي بمعنى أن مجموعة العرض يساوي مجموع الطلب إلا إن هذا الافتراض يكون في أغلب الأحيان غير واقعي فقد يحدث تغير في مجموع العرض زيادة أو نقصان ، كذلك في مجموع الطلب .

وكميات العرض في نموذج النقل تمثل الجوانب اليمنى لقيود العرض ، وكميات الطلب، وهذا يعني أن مجموع الجوانب اليمنى لقيود العرض يساوي مجموع الجوانب اليمنى لقيود الطلب ، أي أن :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

فلو زاد العرض في أحد مصادر التجهيز بمقدار معين ، فأن العلاقة أعلاه تصبح بالشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

الأمر الذي يعني أن النموذج النقل قد اصبح غير متوازن ، عليه سنضطر إلى إضافة كمية (K) إلى الجانب الأيسر لنحافظ على التوازن نموذج النقل :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + K$$

وهذا يعني إضافة مكان طلب وهمي يحتاج كمية مقدارها K . وبالطريقة نفسها فأن زيادة كميات الطلب ستؤدي إلى افتراض مصدر تجهيز وهمي يعرض الكمية (K) . وتصبح العلاقة بالشكل التالي :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + K = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وفيما يخص البرمجة الخطية، فأن هذا يعني تغير في الموارد المتاحة (الجوانب اليمنى للقيود) ، فأن أي تغير في الجانب الأيمن لأحد قيود العرض سيؤدي إلى إضافة قيد جديد إلى قيود الطلب يكون جانبه الأيمن مساوياً لمقدار الزيادة الحاصلة في أحد قيود العرض . كما يؤدي إلى إضافة متغيرات جديدة للنموذج. وكذلك فأن زيادة الجانب الأيمن لأحد قيود الطلب سيؤدي إلى إضافة قيد جديد إلى قيود العرض يكون لجانبه الأيمن مساوياً لمقدار الزيادة الحاصلة في أحد قيود الطلب بالإضافة إلى زيادة عدد متغيرات النموذج . وكذلك الحال عند نقصان إجمالي كميات العرض وإجمالي كميات الطلب.

وعموماً يمكن القول أن التغير في كميات العرض والطلب في نموذج النقل سيؤدي إلى ثلاثة أنواع من المتغير في نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل هذا النموذج هي :

1. التغير في الموارد المتاحة (الجوانب اليمنى للقيود).
2. إضافة قيد جديد للنموذج.
3. متغيرات جديدة للنموذج.

عليه يفضل في هذه الحالة إيجاد حل أساسي ابتدائي جديد واختباره بطريقة المضاعفات.

أما إذا إزداد عدد مصادر التجهيز، وكذلك مجموع العرض، فأن هذا سيؤدي إلى إضافة قيود جديدة إلى قيود العرض يساوي عددها مصادر التجهيز ، بينما سيضاف قيد جديد إلى قيود الطلب يكون جانبه الأيمن مساوياً للزيادة الحاصلة في إجمالي كميات العرض ، وسيحدث الشيء نفسه في حالة زيادة عدد أماكن الطلب وزيادة إجمالي كميات الطلب ولكن بشكل معكوس . أما إذا تم حذف مصدر وتحويله إلى قيد يمثل مصدر تجهيز وهمي يقوم بتجهيز النقص الحاصل في إجمالي العرض، وكذلك فأن حذف مكان طلب سيؤدي إلى حذف لقيد الخاص بهذا المكان، وإضافة (نفس القيد) الذي يمثل مكان الطلب الوهمي .

سابعاً : التغير بسبب القيود الإضافية

في بعض الأحيان قيد تتوفر ظروف تحتم وضع قيود (محدودات) على نموذج النقل . والمقصود هنا بهذه القيود هو عدم السماح لمصدر معين لتجهيز بضاعة لمكان طلب معين ، أو تثبيت مصدر معين لتجهيز مكان طلب معين بكل احتياجاته أو جزء منها .

ولقد أخذنا نموذج النقل وحله الأمثل في الجدول (1) ، وافترضنا إنه قد تقرر عدم قيام المصدر (1) لتزويد مكان الطلب (2) بأية بضاعة . فكيف سيؤثر هذا القيد في الحل الأمثل ؟

لغرض عدم السماح للمصدر (1) بتجهيز مكان الطلب (2) نفترض أن $C_{12} = m$ ، حيث أن m هي كلفة كبيرة أكبر من أكبر كلفة نقل في الجدول ، سنفترض أن $m=11$ أي أن $C_{12}=11$ عند اختيار أمثلية الحل بالكلفة الجديدة سنجد أن الحل الحالي أصبح غير أمثل وعلينا إيجاد حل أمثل جديد .

لنفرض أنه قد تقرر أن يقوم المصدر (3) بسد احتياجات مكان الطلب (2) أولاً ثم توزيع الباقي حسب خطة النقل الملائمة . في هذه الحالة ومن وجهة نظر البرمجية الخطية ، سنجد أن القيد الثالث من قيود العرض سيبقى على حالة ، ولكن القيد الثاني من قيود الطلب سيصبح :

$$X_{32} = 15$$

وعموماً يمكن القول أن التغير في كميات العرض والطلب في نموذج النقل سيؤدي إلى ثلاثة أنواع من المتغير في نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل هذا النموذج هي :

1. التغير في الموارد المتاحة (الجوانب اليمنى للقيود).
2. إضافة قيد جديد للنموذج.
3. متغيرات جديدة للنموذج.

عليه يفضل في هذه الحالة إيجاد حل أساسي ابتدائي جديد واختباره بطريقة المضاعفات.

أما إذا إزداد عدد مصادر التجهيز، وكذلك مجموع العرض، فأن هذا سيؤدي إلى إضافة قيود جديدة إلى قيود العرض يساوي عددها مصادر التجهيز ، بينما سيضاف قيد جديد إلى قيود الطلب يكون جانبه الأيمن مساوياً للزيادة الحاصلة في إجمالي كميات العرض ، وسيحدث الشيء نفسه في حالة زيادة عدد أماكن الطلب وزيادة إجمالي كميات الطلب ولكن بشكل معكوس . أما إذا تم حذف مصدر وتحويله إلى قيد يمثل مصدر تجهيز وهمي يقوم بتجهيز النقص الحاصل في إجمالي العرض، وكذلك فأن حذف مكان طلب سيؤدي إلى حذف لقيد الخاص بهذا المكان، وإضافة (نفس القيد) الذي يمثل مكان الطلب الوهمي .

سابعاً : التغير بسبب القيود الإضافية

في بعض الأحيان قيد تتوفر ظروف تحتم وضع قيود (محدودات) على نموذج النقل . والمقصود هنا بهذه القيود هو عدم السماح لمصدر معين لتجهيز بضاعة لمكان طلب معين ، أو تثبيت مصدر معين لتجهيز مكان طلب معين بكل احتياجاته أو جزء منها .

ولقد أخذنا نموذج النقل وحله الأمثل في الجدول (1) ، وافترضنا إنه قد تقرر عدم قيام المصدر (1) لتزويد مكان الطلب (2) بأية بضاعة . فكيف سيؤثر هذا القيد في الحل الأمثل ؟

لغرض عدم السماح للمصدر (1) بتجهيز مكان الطلب (2) نفترض أن $C_{12} = m$ ، حيث أن m هي كلفة كبيرة أكبر من أكبر كلفة نقل في الجدول ، سنفترض أن $m=11$ أي أن $C_{12}=11$ عند اختيار أمثلية الحل بالكلفة الجديدة سنجد أن الحل الحالي أصبح غير أمثل وعلينا إيجاد حل أمثل جديد .

لنفرض أنه قد تقرر أن يقوم المصدر (3) بسد احتياجات مكان الطلب (2) أولاً ثم توزيع الباقي حسب خطة النقل الملائمة . في هذه الحالة ومن وجهة نظر البرمجية الخطية ، سنجد أن القيد الثالث من قيود العرض سيبقى على حالة ، ولكن القيد الثاني من قيود الطلب سيصبح :

$$X_{32} = 15$$

أي تم حذف X_{12}, X_{22}, X_{24} منه لكي لا نسمح لمكان الطلب (2) بأخذ احتياجاتـــه مـــن مصادر أخرى غير المصدر (3) .

أما عن كمية معالجة هذا التغير في الجدول النقل ، فسيتسم عن طريـــق اســـتخراج C_{32} جديدة ووضعها بدلاً من C_{32} القديمة ، تم اختيار أمثلية الحل . وستخرج C_{32} الجديـــدة بالشـــكل الأتي :

$$^{/}C_{32} = C_{32} - (C_{32} + 1)$$

$$= 5 - 11$$
$$= - 6$$

وقد نسأل أنفسنا لماذا نفترض كلفة نقل سالبة بينما أقل كلفة نقل واقعية يمكـــن افتراضـــها هي صفر ؟ أن تحديد C_{32} الجديدة يعتمد على C_{32} القديمة وكذلك $(C_{32} + 1)$ التي تمثل مقـــدار التخفيض الذي سيسمح للمصدر (3) بتزويد مكان (2) بكل احتياجاته أو جزءاً منها .

لنفرض إنه قد تقرر أن يقوم المصدر (2) بتجهيز كل ما متوفر لديه من بضاعة إلى مكان الطلب (3) لسد جميع احتياجاته . سنجد هنا أن :

$$C_{23} = C_{23} - (^{/}C_{23} + 1)$$
$$=7-(2+1)$$
$$= 4$$

أي إنه يمكن في هذه الحالة افتراض أن $C_{32} = 0$ لأن مقدار التخفيض المطلوب في الكلفة هـــو أقل من الكلفة.

ثامناً : الخاتمة

نموذج النقل حالة خاصة من نموذج البرمجة الخطية ، وبسبب هذه الخصوصية فإنه لا يمكن دراسة جميع التغيرات على مدخلات نموذج البرمجة الخطية وتأثيرها على الحل الأمثل وتطبيقها حرفياً على نموذج النقل . مما سبق يمكننا الاستنتاج إنه يمكن دراسة تحليل حساسية نموذج النقل وحسب الحالات التالية:

1-التغيرات في معاملات دالة الهدف :

حيث ندرس مدى التأثير الذي يتركه التغير في معاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في دالة الهدف على الحل الأمثل . وقد تبين لنا أن زيادة معامل المتغير غير الأساسية في دالة الهدف على الحل الأمثل . وقد تبين لنا أن زيادة معامل المتغير غير الأساسي في دالة الهدف سوف لن يؤثر الحل الأمثل الحالي ، بينما نقصان المعامل قد يؤدي إلى تغير في الحل الأمثل وهذا يعتمد على قيمة cij للمتغير غير الأساسي . وأن زيادة أو نقصان معامل المتغير الأساسي في دالة الهدف قد تؤدي إلى تغير في الحل الأمثل .

2-التغيرات في كميات العرض والطلب :

تبين لنا من البحث أن التغير في كميات العرض والطلب يؤدي إلى تغيرات في نموذج النقل . فإذا ازداد العرض مثلاً فسيتحول نموذج النقل إلى نموذج غير متوازن الأمر الذي يستلزم إضافة مكان طلب وهمي لاستيعاب الزيادة ، وهذا يعني إضافة قيد جديد إلى قيود الطلب ، كما يعني إضافة متغيرات للنموذج . كذلك الحال عند انخفاض كميات العرض ، فسيؤدي هذا إلى إضافة مصدر تجهيز جديد وإضافة قيد جديد لقيود العرض وإضافة متغيرات جديدة للنموذج . ويحدث الشيء نفسه عند حدوث تغير في كميات الطلب .

3-التغيرات بسبب القيود الإضافية :

تبين لنا من البحث أن إضافة محدد جديد لنموذج النقل سيؤدي إلى تغير في الحل الأمثل الحالي. فعند تثبيت مصدر تجهيز لسد احتياجات مكان طلب معين، فسنضطر في هذه الحالة إلى افتراض تخفيض معين في كلفة النقل بهدف إدخال متغير غير أساسي إلى الحل، وكذلك الحال عند منع مصدر تجهيز معين في سد احتياجات مكان طلب معين فسنضطر إلى افتراض زيادة كبيرة في كلفة النقل بهدف إخراج متغير أساسي من الحل وإحلال متغير غير أساسي محله.

الهوامش

1. Cupta P.K , and D, S . Hira , Operations Research , S. Chand and Co , LTD , Ram Najar , New Delhi , 1994 , P , 145
2. Taha , Hamdy A , Operations Research An Introduction , Macmilam Publishing Co , InC New York 1987 , P. 159 .
3. صادق ماجد محمد، بحوث العمليات، مطبعة دار الحكمة/ جامعة البصرة، 1991، ص261.
4. Taha , Hamdy A , OP cit . PP168 – 181
5. Ibid , P , 176
6. Herpert Moskowitz and Gordonp. Wright, operations Research techniques, prentice – Hall. 1979, P.429 .

Linear Programming Sensitivity Analysis by Suing Transportation Method

Abstract

Linear Programming Model represents, as a mathematical form of the economic problems solving these problems cannot do unless some requirements would be available. The availability of these requirements male it possible to formulate them into mathematical relation ship, which is suitable with the real position of the economic problems there fore it can be formulated the gender model of the linear programming in which, the transportation problems candela to be one of there programming that contained the following points:

1. Objective function, inurned to decide the aim of any economic problem hence it would be put only one aim and that could be maximal or minimize the function.
2. Constraints for every goal there would be its own constraints. These constraints are economic or natural. The (a_{11} , a_{12} , ... , a_{mn}) are the parameters of the model , (b_1 , b_2 , ... , b_n) are the available resources .
3. Non – negativity constraints: This constraint represented and there would be no possibility of finding productive activities for the problem and in negative quantity.