solving some kinds of linear partical differential equations of second order with variable coefficients which have three independent variables

حل بعض أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة والمتضمنة ثلاث متغيرات مستقلة

أ.علي حسن محمد   هدى نعيم هليب الجباري
جامعة الكوفة - كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المستخلص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو إيجاد حل بعض أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة والمتضمنة ثلاث متغيرات مستقلة والتي صيغتها العامة هي :

$$A(x,y,t)Z_{xx}+B(x,y,t)Z_{yy}+C(x,y,t)Z_{tt}+D(x,y,t)Z_{xy}+E(x,y,t)Z_{xt}+$$
$$F(x,y,t)Z_{yt}+G(x,y,t)Z_{x}+H(x,y,t)Z_{y}+I(x,y,t)Z_{t}+JZ=0$$

وهذه المعادلة سوف تحل باستخدام عدة فرضيات اعتمادا على صيغة المعادلة وهذه الفرضيات هي :

$$(1)Z(x,y,t)=e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt} ;\ x\neq 0$$

$$(2)Z(x,y,t)=e^{\int u(x)dx+\int\frac{v(y)}{y}dy+\int w(t)dt} ;\ y\neq 0$$

$$(3)Z(x,y,t)=e^{\int u(x)dx+\int v(y)dy+\int\frac{w(t)}{t}dt} ;\ t\neq 0$$

$$(4)Z(x,y,t)=e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int\frac{v(y)}{y}dy+\int w(t)dt} ;\ x,y\neq 0$$

$$(5)Z(x,y,t)=e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int\frac{w(t)}{t}dt} ;\ x,t\neq 0$$

$$(6)Z(x,y,t)=e^{\int u(x)dx+\int\frac{v(y)}{y}dy+\int\frac{w(t)}{t}dt} ;\ y,t\neq 0$$

$$(7)Z(x,y,t)=e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int\frac{v(y)}{y}dy+\int\frac{w(t)}{t}dt} ;\ x,y,t\neq 0$$

Abstract

The main aim of this search is to solve some kinds of linear partical differential equations of second order with variable cofficients which have three independent variables (x,y,t) its general form :

$$A(x,y,t)Z_{xx}+B(x,y,t)Z_{yy}+C(x,y,t)Z_{tt}+D(x,y,t)Z_{xy}+E(x,y,t)Z_{xt}+$$
$$F(x,y,t)Z_{yt}+G(x,y,t)Z_{x}+H(x,y,t)Z_{y}+I(x,y,t)Z_{t}+JZ=0$$

This equation will solve by using the following assumptions :

$$(1)Z(x,y,t)=e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt} ;\ x\neq 0$$

$$(2)Z(x,y,t)=e^{\int u(x)dx+\int\frac{v(y)}{y}dy+\int w(t)dt} ;\ y\neq 0$$

$$(3)Z(x,y,t)=e^{\int u(x)\,dx+\int v(y)\,dy+\int \frac{w(t)}{t}dt\,;\,t\neq 0}$$

$$(4)Z(x,y,t)=e^{\int \frac{u(x)}{x}dx+\int \frac{v(y)}{y}dy+\int w(t)\,dt\,;\,x,y\neq 0}$$

$$(5)Z(x,y,t)=e^{\int \frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)\,dy+\int \frac{w(t)}{t}dt}\;;\;x\;,t\neq 0$$

$$(6)Z(x,y,t)=e^{\int u(x)\,dx+\int \frac{v(y)}{y}dy+\int \frac{w(t)}{t}dt}\;;\;y\;,t\neq 0$$

$$(7)Z(x,y,t)=e^{\int \frac{u(x)}{x}dx+\int \frac{v(y)}{y}dy+\int \frac{w(t)}{t}dt}\;;\;x\;,y\;,t\neq 0$$

1-1المقدمة :

هنالك العديد من العلماء الذين درسوا واهتموا بالمعادلات التفاضلية وحاولوا ومازالوا ان يجدوا طرائق حديثة لحل المشكلات والتخلص من الصعوبات التي تواجههم في حل هذه المعادلات لما لها من اهمية ودور كبير في كثير من حقول العلم كالفيزياء والكيمياء والهندسة وغيرها من العلوم الاخرى .

حيث ان خضير [1] , 2006 ناقشت المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتبة الثانية والتي صيغتها العامة :

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=0$$

واستعملت الفرضية $y(x)=e^{\int Z(x)\,dx}$ لايجاد الحل العام لها وهذا الحل يعتمد على صيغتي الدالتين P(x),Q(x) .إذ ان الفرضية هذه تحول المعادلة الى معادلة اعتيادية من الرتبة الاولى بالمتغير المعتمد Z والمستقل x .

اما الباحثة عبد السادة [2] , 2006 فقد ناقشت المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات الرتبة الثانية والمعاملات الثابتة والتي صيغتها العامة

$$AZ_{xx}+BZ_{xy}+CZ_{yy}+DZ_{x}+EZ_{y}+FZ=0$$

إذ ان A,…,F ثوابت اختيارية .

واستخدمت الفرضية $Z(x,y)=e^{\int u(x)\,dx+\int v(y)\,dy}$ لايجاد الحل التام لها , وهذا الحل يعتمد على قيم الثوابت A , B , C , D , E , F, حيث ان الفرضية هذه تحول المعادلة الى معادلة اعتيادية من الرتبة الاولى بالدالتين u (x) , v (y) وغالبا ما تكون قابلة للفصل .

والباحثة هاني [3] , 2008 درست المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات الرتبة الثانية التي تحتوي على ثلاث متغيرات مستقلة والتي صيغتها العامة .

$$AZ_{xx}+BZ_{xy}+CZ_{xt}+DZ_{yy}+EZ_{yt}+FZ_{tt}+GZ_{x}+HZ_{y}+IZ_{t}+JZ=0$$

اذ ان A , ... , J ثوابت اختيارية.

واستعملت الفرضية

$$Z(x,y,t)=e^{\int u(x)dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}$$

لايجاد الحل التام لها , وهذا الحل يعتمد على قيم الثوابت A ,..., J . إذ ان الفرضية تحول المعادلة الى معادلة اعتيادية من الرتبة الاولى بالدوال u (x) , v (y) , w (t) .

كذلك قامت الباحثة حنون [4] , 2009 بدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة والتي صيغتها العامة .

$$A(x,y)Z_{xx}+B(x,y)Z_{xy}+C(x,y)Z_{yy}+D(x,y)Z_{x}+E(x,y)Z_{y}+F(x,y)Z=0.$$

حيث(A(x , y) , B(x , y) , C(x , y) , D(x , y), E(x , y), F(x , y دوال لـ x أو y او x , y معا.

واستعملت الفرضيات :

$$Z(x,y)=e^{\int \frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)\,dy}\;,\quad Z(x,y)=e^{\int u(x)\,dx+\int \frac{v(y)}{y}dy}\;,$$

$$Z(x,y)=e^{\int \frac{u(x)}{x}dx+\int \frac{v(y)}{y}dy}$$

لايجاد الحل التام للمعادلة اعلاه وهذا الحل يعتمد على صيغ الدوال :

A (x , y) , B (x , y) , C (x , y) , D (x , y) , E (x , y) , F (x , y)

واما الباحثة محسن [5] , 2010 فقد ناقشت المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية من الرتبة الثانية ذات الدرجة الثانية المتجانسة والتي صيغتها العامة .

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z_{xx}+\mathrm{B}(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z_{xy}+\\&\mathrm{C}(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z_{yy}+\mathrm{D}(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z_x+\\&\mathrm{E}(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z_y+\mathrm{F}(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z=0\end{aligned}$$

حيث , A

B , … , F دوال خطية للمتغير المعتمد Z واشتقاقاته الجزئية بالنسبة للمتغيرين المستقلين x , y .

واستعملت الفرضيات:

$$Z(x,y)=e^{\int u(x)dx+\int v(y)dy}\ ,\quad Z(x,y)=e^{\int \frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy}\ ,$$

$$Z(x,y)=e^{\int u(x)dx+\int \frac{v(y)}{y}dy}\ ,\quad Z(x,y)=e^{\int \frac{u(x)}{x}dx+\int \frac{v(y)}{y}dy}$$

لايجاد الحل التام لانواع المعادلات اعلاه .

وان الباحث كتاب [6] , 2011 عمل على ايجاد الحل التام لبعض اصناف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثالثة , والتي صيغتها :

$$AZ_{xxx}+BZ_{yyy}+CZ_{xxy}+DZ_{xyy}+EZ_{xx}+FZ_{yy}+GZ_{xy}+HZ_x+IZ_y+JZ=0$$

إذ A ,…, J ثوابت اختيارية .

إذ ان الفرضية $Z(x,y)=e^{\int u(x)dx+\int v(y)dy}$ حولت المعادلة اعلاه الى معادلة تفاضلية اعتيادية لاخطية من الرتبة الثانية بالدالتين المستقلين u (x) , v (y) وصيغتها العامة :

$$\begin{aligned}&A(u''(x)+3u(x)u'(x)+u^3(x))+B(v''(y)+3v(y)v'(y)+v^3(y))+\\&C(v(y)u'(x)+v(y)u^2(x))+D(u(x)v'(y)+u(x)v^2(y))+E(u'(x)+\\&u^2(x))+F(v'(y)+v^2(y))+Gu(x)v(y)+Hu(x)+Iv(y)+J=0\end{aligned}$$

والتي صنفها الى عدة اصناف بالاعتماد على قيم الثوابت A , … , J .

كذلك ناقش الباحث حوير [7] , 2012 الحل التام لبعض انواع المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية من الرتبة الثانية ذات الدرجة المتجانسة الثالثة التي يظهر فيها المتغيرين المستقلين x , y معا والتي صيغتها العامة :

$$\begin{aligned}&A(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z^2_{xx}+B(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z^2_{xy}+\\&C(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z^2_{yy}+D(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z^2_x+\\&E(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z^2_y+F(x,y,Z,Z_x,Z_y,Z_{xx},Z_{xy},Z_{yy})Z^2=0\end{aligned}$$

إذ أن A , B , C , D , E , F دوال خطية بالمتغير Z ومشتقاته الجزئية بالنسبة للمتغيرين المستقلين x , y .

اما في عملنا سنقوم بايجاد الحل التام لبعض أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات والمتغيرة المتضمنة ثلاث متغيرات مستقلة والتي صيغتها العامة هي :

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}(x,y,t)Z_{xx}+B(x,y,t)Z_{yy}+C(x,y,t)Z_{tt}+D(x,y,t)Z_{xy}+E(x,y,t)Z_{xt}+\\&F(x,y,t)Z_{yt}+G(x,y,t)Z_x+H(x,y,t)Z_y+I(x,y,t)Z_t+JZ=0\end{aligned}$$

اذ ان A …. J دوال لـ (x , y , t)

ملاحظة : يعتمد حل هذا النمط من المعادلات على صيغ الدوال $\mathrm{A}(x,y,t),\dots,I(x,y,t)$ وبما ان عدد هذه المعادلات لا حصر لها لكثرتها سوف نقتصر في بحثنا على الاتي :-

1-2 الحل التام لبعض اصناف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة والمتضمنة ثلاث متغيرات مستقلة

أولا : أذا كانت x فقط ظاهرة فتكون المعادلة بالصيغة :

$$A_1x^2Z_{xx}+G_1xZ_x+BZ_{yy}+CZ_{tt}+FZ_{yt}+HZ_y+IZ_t+JZ=0\ldots(1)$$

بفرض ان $J,\ldots,G_1,A_1$ ثوابت

لحلها نستخدم الفرضية الاولى :

$$Z(x,y,t)=e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt};x\neq 0$$

ومن الفرضية اعلاه نحصل على :

$$Z_x=\left(\frac{u(x)}{x}\right)e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}$$

$$Z_{xx}=\left(\frac{xu'(x)+u^2(x)-u(x)}{x^2}\right)e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}$$

$$Z_y=v(y)e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}$$

$$Z_{yy}=(v^2(y)+v'(y))e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}$$

$$Z_t=w(t)e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}$$

$$Z_{tt}=(w^2(t)+w'(t))e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}$$

$$Z_{yt}=v(y)w(t)e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}$$

وبتعويض كل من $(Z_x,Z_{xx},Z_y,Z_{yy},Z_t,Z_{tt},Z_{yt})$ في المعادلة (1) نحصل :

$$\begin{bmatrix} A_1x^2\left(\frac{xu'(x)+u^2(x)-u(x)}{x^2}\right)+G_1x\left(\frac{u(x)}{x}\right) \\ +B\,(v^2(y)+v'(y))+C\,(w^2(t)+w'(t))+ \\ F\,(v(y)w(t))+Hv(y)+Iw(t)+J \end{bmatrix}e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}=0$$

وبما ان :

$$e^{\int\frac{u(x)}{x}dx+\int v(y)dy+\int w(t)dt}\neq 0$$

لذلك فأن :

$$\begin{bmatrix} A_1\left(xu'(x)+u^2(x)-u(x)\right)+G_1u(x)+ \\ B\,(v^2(y)+v(y))+C\,(w^2(t)+w'(t))+ \\ F\,(v(y)w(t))+Hv(y)+Iw(t)+J \end{bmatrix}=0\;\ldots..\;(2)$$

المعادلة الاخيرة اعتيادية وغير قابلة للفصل لذا نفرض ان : $w=\lambda_1$ فتتحول المعادلة الى :

$$A_1\left(x u'(x)+u^2(x)-u(x)\right)+$$
$$G_1 u(x)+B\left(v^2(y)+v(y)\right)+$$
$$C\lambda_1^2+F\lambda_1 v(y)+Hv(y)+I\lambda_1+J=0$$

بما ان الدالتين u , v مستقلتين :

$$\begin{bmatrix} A_1\left(x\, u'(x)+u^2(x)-u(x)\right)+G_1 u(x)= \\ -B\left(v^2(y)+v(y)\right)-C\ \lambda_1^2-F\lambda_1 v(y)- \\ Hv(y)-I\lambda_1-J=-\lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad ....(3)$$

وبما ان المعادلة (3) قابلة للفصل اذن :

$$A_1\left(x u'(x)+u^2(x)-u(x)\right)+G_1 u(x)=-\lambda_2^2$$
$$\Rightarrow x u'(x)+u^2(x)+\left(\frac{G_1}{A_1}-1\right)u(x)+\frac{\lambda_2^2}{A_1}=0\ ;A_1\neq 0$$
$$\Rightarrow x u'(x)+u^2(x)+A_2 u(x)+A_3=0$$
$$;A_2=\left(\frac{G_1}{A_1}-1\right),\ A_3=\left(\frac{\lambda_2^2}{A_1}\right)$$
$$\Rightarrow x\ u'(x)+\left(u(x)+\frac{A_2}{2}\right)^2+A_3-\frac{A_2^2}{4}=0$$
$$\Rightarrow x\ u'(x)+\left(u(x)+\frac{A_2}{2}\right)^2-A_4^2=0\ ;\ A_4^2=\frac{A_2^2}{4}-A_3$$
$$\Rightarrow x\frac{du}{dx}+\left(u(x)+\frac{A_2}{2}\right)^2-A_4^2=0$$

وهنالك حالتان :

$$(I)\, IF\ A_3\neq\frac{A_2^2}{4}\ (A_4\neq 0)$$
$$\Rightarrow \frac{du}{\left(u(x)+\frac{A_2}{2}\right)^2-A_4^2}+\frac{dx}{x}=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{A_4}\tanh^{-1}\left[\frac{u(x)+\frac{A_2}{2}}{A_4}\right]=Lnc_1+Lnx$$
$$\Rightarrow u(x)=A_4\tanh(A_4 Lnc_1 x)-\frac{A_2}{2}$$
$$(II)\, IF\ A_3=\frac{A_2^2}{4}\ (A_4=0)$$
$$\Rightarrow \frac{du}{\left[u(x)+\frac{A_2}{2}\right]^2}+\frac{dx}{x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{u(x)+\frac{A_2}{2}} + Lnx = -Lnc_2$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{Lnc_2 x} - \frac{A_2}{2}$$

كذلك فأن :- $B\left(v^2(y)+v'(y)\right)+C\lambda_1^2+F\lambda_1 v(y)+Hv(y)+I\lambda_1+J=\lambda_2^2$

$$\Rightarrow v'(y)+v^2(y)+B_2 v(y)+B_3=0$$

$$B_2=\left[\frac{F\lambda_1+H}{B}\right], B_3=\left[\frac{C\lambda_1^2+I\lambda_1+J-\lambda_2^2}{B}\right]$$

$$\Rightarrow v'(y)+\left[v(y)+\frac{B_2}{2}\right]^2+B_3-\frac{B_2^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow v'(y)+\left[v(y)+\frac{B_2}{2}\right]^2+B_4^2=0\ ;\ B_4^2=(B_3-\frac{B_2^2}{4})$$

وهنالك حالتان : $(I)\ IF\ B_3 \neq \frac{B_2^2}{4}\ (B_4\neq 0)$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\left(v(y)+\frac{B_2}{2}\right)^2+B_4^2}+dy=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{B_4}\tan^{-1}\left(\frac{v(y)+\frac{B_2}{2}}{B_4}\right)=c_3-y$$

$$\Rightarrow v(y)=B_4\tan(B_4c_3-B_4y)-\frac{B_2}{2}$$

$$(II)\ IF\ B_3=\frac{B_2^2}{4}\ (B_4=0)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\left(v(y)+\frac{B_2}{2}\right)^2}+dy=0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{v(y)+\frac{B_2}{2}}=c_4-y$$

$$\Rightarrow v(y)=\frac{1}{y-c_4}-\frac{B_2}{2}$$

لذلك فإن الحل التام يكون بالشكل التالي :

$$(I)\ z(x,y,t)=e^{\int\left(\frac{A_4\tanh(A_4Lnc_1x)}{x}-\frac{A_2}{2x}\right)dx+\int B_4\tan(B_4c_3-B_4y)dy+\int\lambda_1\,dt}$$

$$\text{IF } A_3 \neq \frac{A_2^2}{4} \quad \text{and} \quad B_3 \neq \frac{B_2^2}{4}$$

$$Z(x,y,t)=e^{\mathrm{Ln}\cosh(A_4\mathrm{Ln}C_1x)-\frac{A_2}{2}\mathrm{Ln}x+\mathrm{Ln}\cos\left(B_4C_3-B_4y\right)-\frac{B_2}{2}y+\lambda_1t+g}$$

$$= Ke^{\frac{-B_2}{2}y+\lambda_1 t}\,\frac{\cosh\,(A_4 \operatorname{Ln} C_1 x)}{x^{\frac{A_2}{2}}}\cos\left(B_4 c_3 - B_4 y\right)\ , K = e^g$$

$$= kx^{\frac{-A_2}{2}}e^{\frac{-B_2}{2}y+\lambda_1 t}\cosh\left(A_4 \operatorname{Ln} c_1 x\right)\ (\cos B_4 c_3 \cos B_4 y + \sin B_4 c_3 \sin B_4 y)$$

$$= x^{\frac{-A_2}{2}}e^{\frac{-B_2}{2}y+\lambda_1 t}\cos h\left(A_4 \operatorname{Ln} c_1 x)(\,d_1 \cos B_4 y + d_2 \sin B_4 y\right)$$

حيث ان :

$$d_1 = K\cos B_4 c_3 \quad ; \quad d_2 = K\sin B_4 c_3$$

$$= x^{\frac{-A_2}{2}}e^{\frac{-B_2}{2}y+\lambda_1 t}(a_1 x^{A4} + a_2\, x^{-A4})(d_1 \cos B_4 y + d_2 \sin B_4 y)$$

$$a_1 = \frac{c_1^{A_4}}{2}\ and\ a_2 = \frac{c_1^{-A_4}}{2}$$

$$z\left(x,y,t\right) = x^{\frac{-A_2}{2}}e^{\frac{-B_2}{2}y+\lambda_1 t}\left(a_1 x^{\sqrt{\frac{A_2^2}{4}-A_3}} + a_2 x^{-\sqrt{\frac{A_2^2}{4}-A_3}}\right)\left(d_1 \cos\sqrt{B_3 - \frac{{B_2}^2}{4}} + d_2 \sin\sqrt{B_3 - \frac{{B_2}^2}{4}}\,y\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered} Z(x,y,t) = x^{-\frac{1}{2}(\frac{G_1}{A_1}-1)}\, e^{\frac{-(F\lambda_1+H)}{2B}y+\lambda_1 t}\left(a_1 x^{\sqrt{\frac{1}{4}-(\frac{G_1}{A_1}-1)^2-\frac{\lambda_2^2}{A_1}}} + a_2 x^{-\sqrt{\frac{1}{4}-(\frac{G_1}{A_1}-1)^2-\frac{\lambda_2^2}{A_1}}}\right) \\ \left(d_1 \cos\sqrt{\frac{C\lambda_1^2 + I\lambda_1 - \lambda_2^2 + J}{B} - \frac{(F\lambda_1+H)^2}{4B}}\,y + d_2 \sin\sqrt{\frac{C\lambda_1^2 + I\lambda_1 - \lambda_2^2 + J}{B} - \frac{(F\lambda_1+H)^2}{4B}}\,y\right) \end{gathered}}$$

حيث ان λ_1 , λ_2 , a_1 , a_2 , d_1 , d_2 , C_1 , C_3 ثوابت اختيارية .

$$(II)\ z(x,y,t) = e^{\int\left(\frac{1}{x\operatorname{Ln} c_2 x} - \frac{A_2}{2x}\right)dx + \int(B_4 \tan(B_4 c_3 - B_4 y) - \frac{B_2}{2})dy + \int \lambda_1 dt}$$

$$\left[\text{IF } A_3 = \frac{A_2^2}{4} \text{ and } B_3 \neq \frac{B_2^2}{4}\right]$$

$$Z(x,y,t) = e^{\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} c_2 x) - \frac{A_2}{2}\operatorname{Ln} x + \operatorname{Ln}\cos(B_4 c_3 - B_4 y) - \frac{B_2}{2}y + \lambda_1 t + g}$$

$$z(x,y,t) = k_1 e^{-\frac{B_2}{2}y + \lambda_1 t}\ \frac{\cos\,(B_4 c_3 - B_4 y)}{x^{\frac{A_2}{2}}}\operatorname{Ln} c_2 x \qquad ; k_1 = e^g$$

$$= x^{\frac{-A_2}{2}} e^{\frac{-B_2}{2}y + \lambda_1 t}(d_1 \cos B_4 y + d_2 \sin B_4 y)(\operatorname{Ln} c_2 x)$$

$$; d_1 = k_1 \cos B_4 c_3 \ \ and \ \ d_2 = k_1 \sin B_4 c_3$$

$$Z(x,y,t) = x^{\frac{-A_2}{2}} e^{\frac{-B_2}{2}y+\lambda_1 t}(d_1 \cos\sqrt{B_3 - \frac{B_2^2}{4}}\,y + d_2 \sin\sqrt{B_3 - \frac{B_2^2}{4}}\,y\,(\operatorname{Ln} c_2 x)$$

$$Z(x,y,t)=x^{-\frac{1}{2}(\frac{G_1}{A_1}-1)}e^{-(\frac{F\lambda_1+H}{B})y+\lambda_1 t}\begin{pmatrix} d_1\cos\sqrt{\frac{C\lambda_1^2+I\lambda_1-\lambda_2^2+J}{B}-\frac{(F\lambda_1+H)^2}{4B}}\,y+ \\ d_2\sin\sqrt{\frac{C\lambda_1^2+I\lambda_1-\lambda_2^2+J}{B}-\frac{(F\lambda_1+H)^2}{4B}}\,y \end{pmatrix}(Lnc_2x)$$

حيث ان: λ_1 , λ_2 , C_2, C_3, d_1 , d_2 ثوابت اختيارية

(III) $$Z(x,y,t)=e^{\int\left(\frac{A_4\tanh(A_4\ln c_1x)}{x}-\frac{A_2}{2x}\right)dx+\int\frac{1}{y-c_4}-\frac{B_2}{2}dy+\lambda_1 dt}$$

IF $A_3\neq\frac{A_2^2}{4}$ and $B_3=\frac{B_2^2}{4}$

$$Z(x,y,t)=e^{\text{Ln}\cosh(A_4\text{Ln}C_1x)-\frac{A_2}{2}\text{Ln}x+Ln(y-c_4)-\frac{B_2}{2}y+\lambda_1 t+g}$$

$$=K_2e^{\frac{-B_2}{2}y+\lambda_1 t}(y-c_4)\frac{\cosh(A_4\text{Ln}C_1x)}{x^{\frac{A_2}{2}}}\qquad ;\ K_2=e^g$$

$$=x^{\frac{-A_2}{2}}e^{\frac{-B_2}{2}y+\lambda_1 t}(y-c_4)(a_1x^{A_4}+a_2x^{-A_4})$$

$$a_1=k_2\frac{c_1^{A_4}}{2}\ and\ a_2=k_2\frac{c_1^{-A_4}}{2}$$

$$=x^{\frac{-A_2}{2}}e^{\frac{-B_2}{2}y+\lambda_1 t}(y-c_4)\left(a_1x^{\sqrt{\frac{A_2^2}{4}-A_3}}+a_2x^{-\sqrt{\frac{A_2^2}{4}-A_3}}\right)$$

$$z(x,y,t)=x^{-\frac{1}{2}(\frac{G_1}{A_1}-1)}e^{-(\frac{F\lambda_1+H}{2B})y+\lambda_1 t}(y-c_4)\left(a_1x^{\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{G_1}{A_1}-1)^2-\frac{\lambda_2^2}{A_1}}}+a_2x^{-\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{G_1}{A_1}-1)-\frac{\lambda_2^2}{A_1}}}\right)$$

حيث ان λ_1 , λ_2 , a_1, a_2 , C_1, C_4 ثوابت اختيارية

(V) $$Z(x,y,t)=e^{\int(\frac{1}{xLnc_2x}-\frac{A_2}{2x})dx+\int(\frac{1}{y-c_4}-\frac{B_2}{2})dy+\int\lambda_1 dt}$$

IF $A_3=\frac{A_2^2}{4}$ and $B_3=\frac{B_2^2}{4}$

$$z(x,y,t)=e^{Ln(Lnc_2x)-\frac{A_2}{2}Lnx+Ln(y-c_4)-\frac{B_2}{2}y+\lambda_1 t+g}$$

$$Z(x,y,t)=k_3e^{\lambda_1 t-\frac{B_2}{2}y}\frac{(y-c_4)}{x^{\frac{A_2}{2}}}Lnc_2x\qquad ;k_3=e^g$$

$$Z(x,y,t)=k_3x^{\frac{-A_2}{2}}e^{\lambda_1 t-\frac{B_2}{2}y}(y-c_4)Lnc_2x$$

$$Z(x,y,t) = k_3 x^{\frac{-1}{2}(\frac{G_1}{A_1}-1)} e^{\lambda_1 t - \frac{(F\lambda_1+H)}{2B}y} (y-c_4) Ln c_2 x$$

حيث ان K_3 , λ_1 , C_4 , C_1 ثوابت اختيارية

ثانيا : اذا كانت كل من t , y , x -: ظاهرة فتكون المعادلة

$$\begin{bmatrix} A_1 x^2 Z_{xx} + B_1 y^2 Z_{yy} + C_1 t^2 Z_{tt} + D_1 x\, y\, Z_{xy} + E_1 x\, t\, Z_{xt} \\ +F_1 y\, t\, Z_{yt} + G_1 x\, Z_x + H_1 y\, Z_y + I_1 t\, Z_t + J\, Z = 0 \end{bmatrix} ....(4)$$

بفرض ان $A_1, B_1, ..., J$ ثوابت

نستخدم الفرضية الآتية للحصول على الحل التام لهذه المعادلة :-

$$Z(x,y,t) = e^{\int \frac{U(x)}{x}dx + \int \frac{V(y)}{y}dy + \int \frac{W(t)}{t}dt}$$

بعد الحصول على : $\left[Z_{yt}, Z_{xt}, Z_{xy}, Z_t, Z_y, Z_{xx}, Z_x, Z_{yy}, Z_{tt} \right]$

من الصيغ اعلاه تصبح المعادلة :-

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_1\left(x u'(x) + u^2(x) - u(x)\right) + B_1\left(y v'(y) + v^2(y) - v(y)\right) \\ + C_1\left(t w'(t) + w^2(t) - w(t)\right) + D_1 u(x) v(y) + E_1 u(x) w(t) \\ + F_1 v(y) w(t) + G_1 u(x) + H_1 v(y) + I_1 w(t) + J \end{bmatrix} e^{\int \frac{U(x)}{x}dx + \int \frac{V(y)}{y}dy + \int \frac{W(t)}{t}dt} = 0....(5)$$

وبما ان : $e^{\int \frac{U(x)}{x}dx + \int \frac{V(y)}{y}dy + \int \frac{W(t)}{t}dt} \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_1\left(x u'(x) + u^2(x) - u(x)\right) + B_1\left(y v'(y) + v^2(y) - v(y)\right) \\ + C_1\left(t w'(t) + w^2(t) - w(t)\right) + D_1 u(x) v(y) + E_1 u(x) w(t) \\ + F_1 v(y) w(t) + G_1 u(x) + H_1 v(y) + I_1 w(t) + J \end{bmatrix} = 0......(6)$$

المعادلة الاخيرة تفاضلية اعتيادية غير قابلة للفصل وان الدوال u , v , w مستقلة لذا نفرض ان : $w = \lambda_2$, $u = \lambda_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_1(\lambda_1^2 - \lambda_1) + B_1\left(y v'(y) + v^2(y) - v(y)\right) + C_1(\lambda_2^2 - \lambda_2) + D_1 \lambda_1 v(y) + E_1 \lambda_1 \lambda_2 + \\ F_1 v(y)\lambda_2 + G_1 \lambda_1 + H_1 v(y) + I_1 \lambda_2 + J \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow B_1\left(y v'(y) + v^2(y) - v(y)\right) + D_1 \lambda_1 v(y) + F_1 v(y)\lambda_2 + H_1 v(y)$$
$$+ A_1(\lambda_1^2 - \lambda_1) + C_1(\lambda_2^2 - \lambda_2) + E_1 \lambda_1 \lambda_2 + G_1 \lambda_1 + I_1 \lambda_2 + J = 0$$

نفرض ان :

$$A_1(\lambda_1^2 - \lambda_1) + C_1(\lambda_2^2 - \lambda_2) + E_1 \lambda_1 \lambda_2 + G_1 \lambda_1 + I_1 \lambda_2 + J = \lambda_3^2$$

$$\Rightarrow B_1\left(y v'(y) + v^2(y) - v(y)\right) + D_1 \lambda_1 v(y) + F_1 v(y)\lambda_2 + H_1 v(y) = -\lambda_3^2$$

$$\Rightarrow \left(y v'(y) + v^2(y)\right) + \left[\frac{\lambda_1 D_1 + \lambda_2 F_1 + H_1}{B_1} - 1\right] v(y) + \frac{\lambda_3^2}{B_1} = 0$$

$$\Rightarrow y v'(y) + v^2(y) + A_2 v(y) + A_3 = 0$$

$$A_2 = \left[\frac{\lambda_1 D_1 + \lambda_2 F_1 + H_1}{B_1} - 1\right] \ and\ A_3 = \left[\frac{\lambda_3^2}{B_1}\right];$$

$$\Rightarrow y\,v'(y)+\left(v(y)+\frac{A_2}{2}\right)^2+A_3-\frac{A_2^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow y\,v'(y)+\left(v(y)+\frac{A_2}{2}\right)^2+A_4^2=0\ \ ;A_4^2=\frac{A_2^2}{4}-A_3$$

وهنالك حالتان :

$$(I)IF\ A_3\neq\frac{A_2^2}{4}\ (A_4\neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\left(v(y)+\frac{A_2}{2}\right)^2-A_4^2}+\frac{dy}{y}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A_4}\tanh^{-1}\left[\frac{v(y)+\frac{A_2}{2}}{A_4}\right]=Lnc_1+Lny$$

$$v(y)=A_4\tanh(A_4Lnc_1y)-\frac{A_2}{2}$$

$$(II)IF\ A_3=\frac{A_2^2}{4}\ \ (A_4=0)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\left(v(y)+\frac{A_2}{2}\right)^2}+\frac{dy}{y}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{v(y)+\frac{A_2}{2}}+Lny=-Lnc_2$$

$$\Rightarrow v(y)=\frac{1}{Lnc_2y}-\frac{A_2}{2}$$

لذلك فأن الحل التام يعطى بـ :

$$(I)\ Z(x,y,t)=e^{\int\frac{\lambda_1}{x}dx+\int\left(\frac{A_4\tanh(A_4Lnc_1y)}{y}-\frac{A_2}{2y}\right)dy+\int\frac{\lambda_2}{t}dt}$$

$$IFA_3\neq\frac{A_2^2}{4}$$

$$\Rightarrow Z(x,y,t)=e^{\lambda_1Lnx+Ln\cosh(A_4Lnc_1y)-\frac{A_2}{2}Lny+\lambda_2Lnt+g}$$

$$=k\,x^{\lambda_1}t^{\lambda_2}\frac{\cosh(A_4Lnc_1y)}{y^{\frac{A_2}{2}}}\ ;k=e^{g}$$

$$=y^{\frac{-A_2}{2}}x^{\lambda_1}\,t^{\lambda_2}\,(a_1y^{A_4}+a_2y^{-A_4})$$

$$a_1=k\,\frac{c_1^{A_4}}{2}\ and\ a_2=k\,\frac{c_1^{-A_4}}{2}$$

$$Z(x,y,t)=y^{\frac{-A_2}{2}}x^{\lambda_1}t^{\lambda_2}\left(a_1 y^{\sqrt{\frac{A_2^2}{4}-A_3}}+a_2 y^{-\sqrt{\frac{A_2^2}{4}-A_3}}\right)$$

$$\boxed{Z(x,y,t)=x^{\lambda_1}t^{\lambda_2}y^{-\frac{1}{2}(\frac{\lambda_1D_1+\lambda_2F_1+H_1}{B_1}-1)}\left(a_1 y^{\sqrt{\frac{-1}{4}(\frac{(\lambda_1D_1+\lambda_2F_1+H)^2}{B_1}-1)}}+a_2 y^{-\sqrt{\frac{-1}{4}(\frac{(\lambda_1D_1+\lambda_2F_1+H)^2}{B_1}-1)}}\right)}$$

حيث ان λ_1 , λ_2 , a_1 , a_2 ثوابت اختيارية

$$(II)\ IFA_3=\frac{A_2^2}{4}\ \Rightarrow$$

$$Z(x,y,t)=e^{\int\frac{\lambda_1}{x}dx+\int(\frac{1}{yLnc_2y}-\frac{A_2}{2y})dy+\int\frac{\lambda_2}{t}dt}$$

$$=e^{\int\lambda_1 Lnx+Ln(Lnc_2y)-\frac{A_2}{2}Lny+\lambda_2 Lnt+d}$$

$$=k_1x^{\lambda_1}t^{\lambda_2}y^{-\frac{A_2}{2}}(Lnc_2y);k_1=e^d$$

$$\boxed{Z(x,y,t)=k_1x^{\lambda_1}t^{\lambda_2}y^{-(\frac{\lambda_1D_1+\lambda_2F_1+H_1}{2B_1}-1)}(Lnc_2y);c_2y>0}$$

حيث ان λ_1 , λ_2 , k_1 , c_2 ثوابت اختارية .

Example:

To solve the following 2nd order P. D. E. with non constant coefficients .

$$x^2Z_{xx}+y^2Z_{yy}-2t^2Z_{tt}+3xtZ_{xt}+6ytZ_{yt}+2xZ_x-3yZ_y+2xyZ_{xy}-tZ_t+3Z=0$$

حيث ان :

$$A_1=1,B_1=1,C_1=-2,D_1=2,E_1=3,F_1=6,G_1=2,H_1=-3,I_1=-1,J=3$$

وبما ان :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_1D_1+\lambda_2F_1+H_1}{B_1}-1\right)^2\neq\frac{\lambda_3^2}{B_1}$$

لذا سوف نستخدم الصيغة (I) من النوع الثاني :

فيكون الحل التام هو :

$$Z(x,y,t)=x^{\lambda_1}t^{\lambda_2}y^{-(2\lambda_1+6\lambda_2-4)}\left(a_1y^{\sqrt{\frac{(2\lambda_1+6\lambda_2-4)^2}{4}-\lambda_3^2}}+a_2y^{-\sqrt{\frac{(2\lambda_1+6\lambda_2-4)^2}{4}-\lambda_3^2}}\right)$$

References

[1]Kudaer, R.A. , 2006, "Solving Some Kinds of Linear Second Order Non -Homogeneous Differential Equations with Variable Coefficients", M.sc. thesis, University of Kufa , College of Education for Girls, Department of Mathematics.

[2]Abd Al - Sada , N.Z. , 2006 , "The Complete Solution of Linear Second Order Partial Differential Equations" , M.sc. thesis , University of Kufa , College of Education for Girls, Department of Mathematics.

[3]Hani N.N. , 2008, "On Solutions of Partial Differential Equations of second order with Constant Coefficients ", M.sc. thesis, University of Kufa, College of Education for Girls, Department of Mathematics.

[4]Hanon W.H. , 2009, "On Solutions of Partial Differential Equations and Their Physical Applications ", M.sc. thesis, University of Kufa, College of Education for Girls, Department of Mathematics.

[5]Mohsin,L.A. , 2010,"Solving Special Types of Second Order Ordinary Differential Equations", M.s. thesis, University of Kufa, College of Education for Girls, Department of Mathematics.

[6]Ketap, S. N. , 2011, " The Complete Solution for Some Kinds of Linear Third Order Partial Differential Equations ", M.sc. thesis, University of Kufa, College of Education for Girls, Department of Mathematics.

[7]Haoer .R .S, 2012, "Solving Some Kinds of Second order Partial differential Equations with Homogeneous Degree of Three" M.SC. thesis university of Kufa , College of Education , Department of Mathematics .

[8]Braun, M.,"Differential Equation and Their Applications",4th ed.New York: Spring-verlag, 1993.