حول شبه– الانظمة الديناميكية الثنائية الفوضوية الثنائية

خولة علي مصطفى

قسم الرياضيات ، كلية العلوم ، جامعة كركوك ، كركوك ، العراق

(**تاريخ الاستلام:** ٦ / ٣ / ٢٠١١ ---- **تاريخ القبول:** ١١ / ٥ / ٢٠١١)

الملخص

في هذا البحث نقدم تعريف شبه–النظام الديناميكي الثنائي الفوضوي الثنائي المتقطع وشبه–النظام الديناميكي الثنائي الموسع الثنائي المتقطع مع العلاقة بين النظامين وكيفية الحصول على شبه–النظام الديناميكي الجزئي الثنائي المتقطع من شبه–نظام الديناميكي ثنائي المتقطع.

الكلمات الدليلة: النظام الديناميكي، الحساسية المعتمدة لشروط ابتدائية، اسية لابنوف، الدوال الفوضوية،الدوال الموسعة، المجموعة اللامتغيرة.

المقدمة

في العام ١٩٠٣ حاول العالم الفرنسي هنري بونكارية Henri Poincare حل مسألة الأجسام الثلاث والتي كانت النواة لعلم جديد تسمى اليوم بالفوضى Chaos .وفي العام ١٩٧٥ استخدم مفهوم الفوضى رياضيا من قبل العالمان Li و York [1] .وبعدها قام عدة علماء بالبحوث على هذا الموضوع وقدموا التعاريف الضرورية لذلك مثلاً اذا كانت $f : X \to X$ دالة مستمرة و X فضاء متري فان (f,X) تسمى شبه_نظام ديناميكي مفرق ويقال ان النقطة $x \in X$ دورية بدوره n اذا كانت هناك n بحيث $f^n(x)=x$ حيث n اصغر عدد طبيعي تحقق ذلك [2,6] واذا كانت $X \subseteq R$ تكون النقطة دورية بدورة n طاردة اذا كانت $|(f^n)'(x)|\rangle 1$ ودورية بدورة n جاذبة اذا كانت $|(f^n)'(x)|\langle 1$ ودورية بعد حين اذا لم تكن دورية ولكن كانت هناك $n \in N$ بحيث $f^n(x)$ نقطة دورية [7,4].

يقال ان النقطتين $x,y \in X$ مفصولتان اذا كانت لكل $n \in N$ هناك $\varepsilon \rangle 0$ بحيث ان $d(f^n(x),f^n(y)) \ge \varepsilon$ وان f تسمى دالة موسعة اذا كانت لكل $x,y \in X$ و $x \ne y$ هناك $\varepsilon \rangle 0$ و $n\in N$ بحيث $d(f^n(x),f^n(y))\rangle \varepsilon$ [10]. أي ان اذا كانت هناك $x,y\in X$ و $x \ne y$ مفصولتان فان f دالة موسعة واذا كانت X فضاء متري و f دالة موسع ومستمرة عندها تسمى (f,X) شبه–نظام ديناميكي موسع . اذا كانت $x\in X$ و $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln|(f^n)'(x)|$ تسمى اسية لابنوف[8,9] للدالة f عند النقطة x واذا لم تعتمد λ على x عندها يقال ان f تمتلك اسية لابنوف . وان f تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية اذا كانت لكل $x,y\in X$ و $d(x,y)\langle\delta$ هناك $n\in N$ و $\varepsilon\rangle 0$ بحيث $d(f^n(x),f^n(y))\rangle\varepsilon$.[5,3].

وتكون الدالة فوضوية اذا كانت تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية او كانت تمتلك اسية لابنوف موجبة لكل النقاط التي ليست دورية بعد حين . عندها تسمى (f,X) شبه–نظام ديناميكي فوضوي حيث X فضاء متري و f دالة فوضوية ومستمرة .

اذا كانت $f:X\to X$ دالة وكانت $A\subseteq X$ يقال ان A مجموعة لامتغيرة مغلقة تحت تأثير f اذا كانت $f(A)=A$.

١–النظام الديناميكي الثنائي

في هذا البند نقدم تعريف جديد هو شبه–النظام الديناميكي الثنائي متقطع معتمدين على تعريف شبه–النظام الديناميكي المتقطع.

تعريف١–١: لتكن كل من (f,X) و (g,X) نظام ديناميكي متقطع فان (f,g,X) تسمى نظام ديناميكي ثنائي المتقطع اذا كانت $f(g(x))=g(f(x))$ [10] .

مثال ١–٢: لتكن $f:[0,1]\to[0,1]$ دالة معرفة بـ $f(x)=x^2$ و $g:[0,1]\to[0,1]$ دالة معرفة بـ $g(x)=\sqrt{x}$ نجد ان $f(g(x))=g(f(x))=x$ لذلك (f,g,[0,1]) تكون نظام ديناميكي ثنائي متقطع

تعريف١–٣: اذا كانت كل من f,g دالة مستمرة معرفة على X الفضاء المتري فان (f,g,X) شبه–نظام ديناميكي ثنائي المتقطع.

مثال١–٤: (T,Q,[0,1]) شبه_نظام ديناميكي متقطع حيث $T[0,1]\to[0,1]$ دالة الخيمة معرفة بـ $T(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 0.5\\ 2-2x & 0.5\le 0.5\le 1\end{cases}$ دالة مستمرة و $Q:[0,1]\to[0,1]$ الدالة التربيعية المعرفة بـ $Q(x)=4x(1-x)$ دالة مستمرة [2,7]

تعريف١–٥: اذا كانت (f,g,X) نظام ديناميكي ثنائي متقطع وكانت $x\in X$ تسمى x نقطة دورية ثنائية اذا كانت دورية تحت تأثير fog .

مثال١–٦: اذا كانت لدينا شبه النظام الديناميكي (T,Q,[0,1]) المعرف في المثال (١–٤) فان $0,\frac{7}{16}\in[0,1]$ تكون دورية ثنائيا بدورة ١ وان $\frac{9\pm3\sqrt{5}}{32}\in[0,1]$ نقطة دورية بدوره ٢

قضية١–٧: اذا كانت (f,g,X) نظام ديناميكي ثنائي متقطع وكانت $x\in X$ نقطة دورية تحت تأثير كل من f,g فان x نقطة دورية ثنائيا .

البرهان : كون x نقطة دورية تحت تأثير g فأن $g^n(x)=x$ أي ان $f^n(g^n(x))=f^n(x)$ وكونها دورية تحت تأثير f فأننا نحصل على $f^n(g^n(x))=x$.

ملاحظة: عكس المبرهنة ليست بالضرورة صحيحة .

مثال١-٨: في المثال (١-٢) fog(x)=x أي ان جميع نقاطه دورية ثنائية بدور ١ ولكن f(0.5)=0.25 ليست دورية بدورة ١ .

تعريف١-٩: اذا كانت (f,g,X) نظام ديناميكي ثنائي متقطع وكانت x نقطة دورية ثنائيا تكون جاذبة اذا كانت $\left|(f^n og^n)'(x)\right|\rangle 1$ وطاردة اذا كانت $\left|(f^n og^n)'(x)\right|\langle 1$.

مثال١-١٠: النقاط في المثال(١-٦) نقاط دورية ثنائيا طاردة.

قضية١-١١: اذا كانت x نقطة دورية ثنائيا وكانت x نقطة دورية طاردة جاذبة تحت تأثير f ودورية طاردة جاذبة تحت تأثير g فأن x نقطة دورية ثنائيا طاردة .

البرهان:

$$\left|(f^n og^n)'(x)\right| = \left|((f^n)'(g^n(x)))((g^n)'(x))\right|$$
$$= \left|(f^n)'(x)(g^n)'(x)\right| = \left|(f^n)'(x)\right|\left|(g^n)'(x)\right|\rangle 1$$

ملاحظة: بنفس الطريقة نبرهن حالة النقطة الجاذبة.

ملاحظة:عكس القضية السابقة غير صحيح حيث كما يوضحه المثال(١-٨) .

٢-النظام الديناميكي الفوضوي ثنائيا

في هذا البند نقدم تعريف الانظمة الثنائية المتقطعة الفوضوية الثنائية والموسع الثنائي والعلاقة بينهما كما نقدم تعريف المجموعة اللامتغيرة ثنائياً لتكوين شبه النظام الثنائي المتقطع الجزئي.

تعريف٢-١: اذا كانت (f,g,X) نظام ديناميكي ثنائي متقطع فأن $x \in X$ نقطة دورية ثنائيا بعد حين اذا لم تكن دورية ولكن كانت هناك $k \in N$ بحيث ان $(fog)^k(x)$ نقطة دورية .

تعريف٢-٢ : اذا كانت (f,g,X) شبه-نظام ديناميكي ثنائي متقطع وكانت كل من f,g دالة تمتلك اسية لابنوف وكانت $x \in X$ بحيث ان $\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left|(f^n og^n)'(x)\right|$ موجودة عندها يقال ان x تمتلك اسية لابنوف واذا لم تعتمد λ على قيمة x عندها يقال ان f تمتلك اسية لابنوف .

مثال٢-٣: اذا كان لدينا شبه النظام الديناميكي المتقطع في المثال(١-٤) ان دالةالخيمة Tتمتلك اسية لابنوف تساوي ln(2) والدالة التربيعية Q تمتلك اسية لابنوف تساوي ln(2) [2,7]

تعريف٢-4: اذا كانت (f,g,X) شبه-نظام ديناميكي ثنائي متقطع يقال ان (f,gX) شبه-نظام ديناميكي ثنائي فوضوي ثنائيا اذا كانت كل من f,g دالة فوضوية واحد الشرطين التاليين متحققة:

١- fog تمتلك اسية لابنوف اكبر من الصفر للنقاط ليست الدورية ثنائيا بعد حين .

٢- fog تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية.

مثال٢-5 : دالة الخيمة دالة فوضوية [2,7] والدالة التربيعية دالة فوضوية [2,7] وان

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|(T^n oQ^n)'(x)\right| = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}(\ln\left|(T^n)'(Q^n(x))\right| + \ln\left|(Q^n)'(x)\right|$$

أي ان $\lambda = \ln(2) + \ln(2)$ وهي قيمة اكبر من الصفر وبالتالي نحصل على ان (T,Q,[0,1]) شبه-نظام ديناميكي ثنائي فوضوي ثنائي

قضية٢-٦: اذا كانت (f,g,X) شبه-نظام ديناميكي ثنائي فوضوي ثنائياً فان لكل $x \in X$ نقطة دورية تكون نقطة دورية ثنائيا طاردة .

البرهان : لتكن $x \in X$ نقطة دورية ثنائيا بما ان النظام فوضوي ثنائي فان هناك $n \in N$ بحيث $\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|(f^n og^n)'(x)\right|\rangle 0$ وهذا يعطينا $\left|(f^n og^n)'(x)\right|\rangle 1$ أي ان x نقطة دورية ثنائيا طاردة تحت تأثير fog .

تعريف٢-٦: اذا كانت (f,g,X) شبه-نظام ديناميكي ثنائي متقطع وكانت كل (f,X) و (g,X) نظام ديناميكي موسع فان (f,g,X) نظام ديناميكي ثنائي موسع ثنائي اذا كانت لكل $x \neq y \in X$ هناك $\varepsilon\rangle 0$ بحيث هناك $n \in N$ فأن $d(f^n og^n(x), f^n og^n(y))\rangle \varepsilon$.

مثال٢-٧: $f : R \to R$ دالة معرفة بـ f(x)=2x دالة موسعة و $g : R \to R$ دالة معرفة بـ g(x)=2x+1 اذن (f,g,R) شبه نظام ديناميكي ثنائي موسع ثنائي.

ملاحظة : كل نظام ديناميكي موسع ثنائيا يكون فوضوي ثنائيا لكن العكس غير صحيح حيث تكون دالة حذوة الفرس دالة فوضوية لكنها ليست موسعة [2].

تعريف ٢-٨: اذا كانت (f,g,X) شبه-نظام ديناميكي ثنائي متقطع وكانت $A \subseteq X$ تسمى A مجموعة لامتغيرة ثنائيا اذا كانت لامتغيرة تحت تأثير كل من f وg وان (f,g,A) تسمى شبه-نظام ديناميكي ثنائي متقطع اذا كانت f(g(A))=A.

قضية٢-٩: اذا كانت (f,g,X) شبه-نظام ديناميكي ثنائي فوضوي ثنائي وكانت $A \subseteq X$ مجموعة لامتغيرة ثنائيا مغلقة فأن (f,g,A) شبه-نظام ديناميكي ثنائي فوضوي ثنائي.

البرهان: بما ان (f,g,x) شبه- نظام ديناميكي ثنائي فوضوي فان كل من f,g دالة فوضوية وان قصر الدالة الفوضوية على مجموعة مغلقة لامتغيرة تكون دالة فوضوية [11] أي ان f,gدوال فوضوية عل A الفضاء الجزئي ومنها نحصل على ان (f,g,A) شبه-نظام ديناميكي ثنائي جزئي فوضوي ثنائي .

قضية٢-١٠: اذا كانت (f,g,X) شبه-نظام ديناميكي ثنائي موسع ثنائي وكانت $A \subseteq X$ مجموعة لامتغيرة ثنائيا مغلقة فأن (f,g,A) شبه-نظام ديناميكي ثنائي موسع ثنائي.

البرهان: لتكن $x,y \in A$ وان $x \neq y$ بما ان $A \subseteq X$ إذن $x,y \in X$ اذن هناك $\varepsilon\rangle 0$ بحيث ان هناك $n \in N$ بحيث $d(f^n og^n(x), f^n og^n(y))\rangle \varepsilon$ بما ان A مغلقة لامتغيرة فان (f,g,A) شبه-نظام ديناميكي ثنائي موسع ثنائي تسمى شبه نظام ديناميكي جزئي موسع.

المصادر:

[1] Aulbach,B. and Kieninger,B., On Three Definitions of Chaos, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, **1(1) (2001) 23–37.**

[2] Devany, R.L., An Introduction to Chaotic Dynamical System, Second Edition, Edition-Wesely Mulo Park, California (1989).

[3] Diamond, P., Kloeden, P., Kozyakin, V., Pokrovskii, A., Semi-Hyperbolicity and Bi-Shadowing, Springer, April 8, (2010)

[4] Edgar, G.A. Measure, Topology and Fractal Geometry, USA (1992)

[5] Elaydi, S. N., Discrete Chaos, Chapman and Hall/CRC.(2000).

[6] Guanrong Chenand Yuming Shi, Introduction to anti-control of discrete chaos: theory and applications Phil. Trans. R. Soc. A (2006)

[7] Gulick, D., Encounter with chaos, McGraw. Hill. Inc. (1992).

[8]Moeini,A., Ahrari,M., and Karimi,p., Forecasting Gold Price Via Chaotic Models and Lyapunov Exponent ,Eurojournals Publishing Inc. 2010

[9] Ziehman,C., Smith,L.A., Kurths,J. The Bootstrap and Lyapunov Exponent in Deterministic Chaos, Elsevier Science B.V. right reserved 1999

[10]الامين ، بلقيس خليل،حول التحاذي في الديناميكيا التبولوجية ،رسالة ماجستير ، جامعة تكريت، (٢٠٠٥)

[11]الكتبي، سليم حسن، الجباري، خولة علي، مجلة ام سلمة للعلوم ،المجلد ٢(٣) (٢٠٠٥).

On Bi- Chaotic Bi-Discrete Semi-Dynamical System

Khawlah Ali

College of Science , University of Kirkuk , Kirkuk , Iraq

(**Received:** 6 / 3 / 2011 ---- **Accepted:** 11 / 5 / 2011)

Abstract

In this paper we introduce the definition of bi-chaotic bi-discrete semi-dynamical system and bi-expansive and how we can find the sub-bi-semi-dynamical system.

Key words: dynamical system, sensitive on initial condition, Liapunov exponent, chaotically functions, expansively function, invariant set .